

## ANÁLISES INELÁSTICAS DE ESTRUTURAS DE AÇO COM ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO NÃO LINEAR

**Ronaldo Rigobello, Jorge Munaiar Neto e Humberto B. Coda**

Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São-carlense, 400 – CEP: 13.566-590 – São Carlos, SP, Brasil,  
ronbello@sc.usp.br, <http://www.set.eesc.usp.br>

**Palavras-chave:** análise não linear; plasticidade; estruturas de aço aporticadas; elementos finitos; análise inelástica.

**Resumo.** Neste artigo são apresentadas análises inelásticas de estruturas de aço aporticadas, com o emprego de elemento finito de pórtico laminado de formulação não linear geometricamente exata com base na posição dos nós dos elementos finitos, ao invés de deslocamentos. Tal elemento finito permite considerar seção transversal qualquer com material não homogêneo e sua representação geral é tridimensional. O mapeamento do contínuo se faz por meio de vetores generalizados não restritos, isto é, vetores não unitários que não mantêm a ortogonalidade entre si após a mudança de configuração de um corpo, diferentemente das formulações clássicas. Além disso, são considerados na hipótese cinemática básica modos de empenamento e deformação com variação na direção transversal. Um esquema que gera automaticamente as funções de forma e suas derivadas permite o uso de qualquer grau de aproximação para o referido elemento. Adota-se uma lei constitutiva tridimensional completa e cinemática de Reissner e, portanto, as simulações com esse elemento consideram o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes para verificação dos critérios tridimensionais de resistência na plasticidade. São apresentadas análises de casos clássicos presentes na literatura para validar os resultados obtidos com o elemento finito de pórtico não linear. Tais análises incluem a consideração de imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais, indispensáveis no contexto das análises avançadas de estruturas de aço. Os resultados obtidos comprovam a eficácia do elemento finito de pórtico laminado não linear e sua formulação quando aplicado em análises inelásticas de estruturas de aço aporticadas.

## 1 INTRODUÇÃO

Análises não lineares inelásticas, isto é, análises inelásticas com o cálculo do equilíbrio estrutural na posição deslocada, permitem avaliar diretamente a resistência e o comportamento de estruturas de aço diante das ações a que devem ser submetidas. O rápido desenvolvimento da tecnologia dos computadores e a necessidade de procedimentos mais racionais no cálculo das estruturas impulsionaram diversas pesquisas referentes a métodos de análises não lineares inelásticas de estruturas de aço nas últimas três décadas.

De acordo com [Kim e Lee \(2002\)](#) e [Chiorean e Barsan \(2005\)](#), análises não lineares inelásticas podem ser divididas em duas categorias, em relação à consideração da plasticidade nos elementos: análises com plasticidade concentrada e análises com plasticidade distribuída (ou zonas plásticas).

As análises com plasticidade concentrada têm por base a teoria das rótulas plásticas ([White, 1993](#); [Chen et al., 1996](#); [Chan e Zhou, 2004](#); [Ngo-Huu et al., 2007](#)). Nesse tipo de análise a plastificação do material é considerada concentrada em rótulas plásticas sem dimensão. Regiões do elemento estrutural fora das rótulas plásticas são assumidas com comportamento elástico. Além disso, de acordo com o exposto em [Chiorean e Barsan \(2005\)](#), a formação de rótula plástica só ocorre quando o esforço solicitante na seção for maior que o esforço resistente plástico da seção. Caso contrário o comportamento da seção é assumido elástico como um todo.

A abordagem de problemas por meio de rótulas plásticas permite o uso de poucos elementos finitos na simulação de um elemento estrutural, não necessita da integração das propriedades da seção transversal e, portanto, reduzem significativamente o esforço computacional. No entanto, de acordo com [Kim e Lee \(2002\)](#), apesar de serem tidas como práticas para fins de projeto, tais análises devem ser verificadas por meio de análises com plasticidade distribuída. Em [Chiorean e Barsan \(2005\)](#) afirma-se ainda que pelo fato da plasticidade ser concentrada apenas nas extremidades dos elementos, os modelos com rótulas plásticas são menos precisos na obtenção da rigidez dos elementos.

As análises com plasticidade distribuída utilizam modelos bem mais refinados e, portanto, de acordo com [Kim e Lee \(2002\)](#), são mais precisas. Estas análises normalmente utilizam elementos finitos de pórtico ou elementos finitos do tipo casca. Em análises com elementos finitos de pórtico o elemento estrutural é discretizado em segmentos e a seção transversal de cada segmento é subdividida em um número adequado de elementos planos ([Vogel, 1985](#); [Ziemian, 1993](#); [Jiang et al., 2002](#); [Alvarenga e Silveira, 2009](#)).

A rigidez da seção é obtida por meio da integração das propriedades físicas e disposição geométrica dos elementos planos, que podem estar em regime elástico ou plástico, pois estados de tensão e deformação nos elementos da seção transversal podem ser monitorados durante a análise. Em geral, nas análises com elementos de pórtico somente a tensão normal é considerada para verificação dos critérios de resistência. Numa abordagem não convencional, em [Chiorean e Barsan \(2005\)](#) a plastificação gradual da seção transversal, sujeita à ação combinada de força axial e momentos fletores, é descrita por relações momento-curvatura-esforço normal e momento-deformação axial-esforço normal calibradas em ensaios numéricos.

Análises de estruturas apertadas com elementos finitos do tipo de casca ([Avery e Mahendran, 2000](#); [Kim e Lee, 2002](#)) necessitam de um grande número de elementos finitos tridimensionais na modelagem das estruturas. No entanto, modelos com elementos do tipo de casca permitem capturar a ocorrência de instabilidades locais nos perfis, resultando em análises mais refinadas e precisas.

Em [Ngo-Huu et al. \(2007\)](#) menciona-se que apesar das soluções obtidas com emprego de

plasticidade distribuída serem consideradas relativamente mais precisas, estas têm como característica serem reconhecidas pela grande demanda de esforço computacional e usualmente aplicáveis apenas para fins de pesquisa. Porém, com os crescentes avanços na capacidade de processamento dos computadores com custos acessíveis, além da possibilidade da paralelização dos códigos de cálculo, este fator deixa cada vez mais de ser impeditivo para aplicação para fins além da pesquisa.

Diante do exposto, em termos de plasticidade, as análises realizadas com o emprego de elementos finitos de pórtico laminado não linear são enquadradas como análises com plasticidade distribuída. Além disso, uma característica importante a ser mencionada é o fato de se adotar na formulação do referido elemento de pórtico proposto uma lei constitutiva tridimensional completa e, portanto, as simulações com esse elemento consideram o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes para verificação dos critérios tridimensionais de resistência na plasticidade.

Com relação a não linearidade geométrica, a formulação do elemento finito empregado neste trabalho está inserida no contexto do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) (Coda, 2003). O MEFP tem por base o princípio da mínima energia potencial e a posição dos nós dos elementos finitos, ao invés de deslocamentos e giros, geralmente utilizados em formulações tradicionais de elementos finitos.

Tal formulação tem como característica principal, ser de natureza não linear geometricamente exata, portanto, bastante adequada à resolução de problemas que envolvam tal não linearidade. Nesta formulação, o gradiente da função mudança de configuração é escrito a partir das posições inicial e final como função de espaço adimensional auxiliar (Coda e Paccola, 2010; Coda e Paccola, 2008; Coda, 2009; Coda et al., 2006).

Por meio da função mudança de configuração obtém-se uma medida de deformação objetiva (invariante a movimentos de corpo rígido) que possibilita a criação de um funcional de energia. Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial a este funcional resulta um sistema não linear de equações, cuja solução pode ser obtida por um método comumente aplicável, como o de Newton-Raphson, por exemplo.

## **2 BASES DA FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO NÃO LINEAR**

A formulação apresentada neste tópico tem por base as informações contidas em Coda e Paccola (2010) e Coda (2009) e objetiva situar a formulação do elemento finito de pórtico laminado não linear e apresentar as principais diferenças em relação às demais formulações de elementos de elementos finitos de pórtico. Diferentemente das formulações tradicionais para elementos de pórtico tridimensionais, a formulação aqui apresentada não utiliza esquemas de rotação finita, como, por exemplo, a formulação de Euler-Rodrigues, que consiste de uma extensão da teoria linear para representar grandes rotações e possuem natureza necessariamente incremental.

A estratégia adotada consiste na descrição de sólidos por meio de vetores generalizados não restritos. O mapeamento do contínuo é feito por meio de vetores não unitários que não mantém a ortogonalidade entre si após a mudança de configuração de um corpo, ao contrário das formulações clássicas.

Para evitar problemas de travamento (locking), que podem ocorrer devido à influência do coeficiente de Poisson e de aproximações desbalanceadas para deformações normais, bem como para aquelas referentes ao cisalhamento, são introduzidos, na hipótese cinemática básica, modos de empenamento e deformação com variação nas direções transversais. O mapeamento resultante representa um sólido longo, chamado comumente de pórtico. Tal

mapeamento utiliza somente variáveis vetoriais no espaço Euclidiano e, como consequência, os valores de tensão, deformação e posição são medidas objetivas, isto é, independentes da trajetória descrita pelo sólido

## 2.1 Mapeamento posicional com vetores não restritos

Com a abordagem proposta, o mapeamento clássico via MEF é substituído por um mapeamento que têm por base vetores não restritos. Na [Figura 1](#) têm-se um elemento sólido bidimensional com o formato quadrilateral, mapeado a partir do espaço adimensional, definido pelas coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  para a sua forma real, seguindo o procedimento clássico, conforme [Figura 1a](#), bem como o procedimento vetorial, conforme [Figura 1b](#).

Inicialmente, a transformação é mostrada para o caso de um elemento bidimensional linear e, em seguida, o procedimento é generalizado para qualquer ordem de aproximação desejada para o elemento.

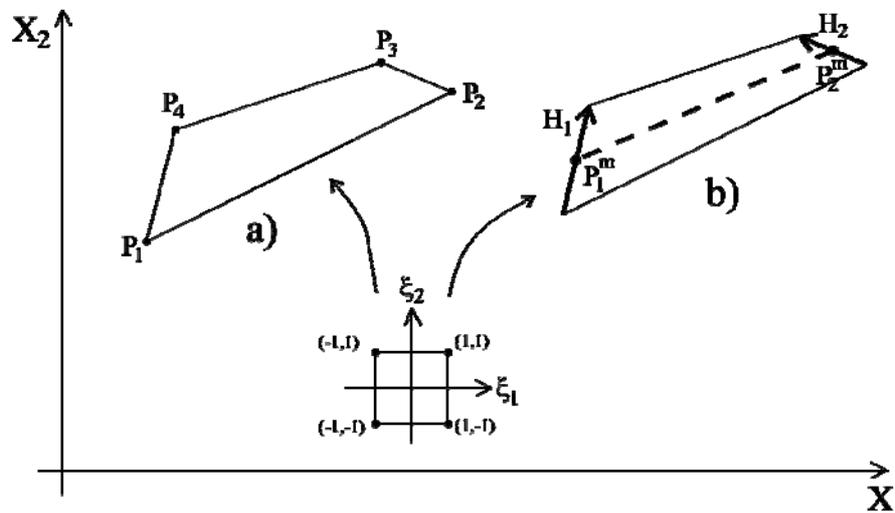


Figura 1: Elemento Sólido bidimensional: (a) Mapeamento clássico e (b) Mapeamento vetorial.

As funções de forma lineares adotadas no mapeamento clássico do MEF, [Figura 1a](#), são dadas pelas equações (1) a (4), com  $\xi_1, \xi_2 \in [-1, 1]$ , em que  $\xi_i$  representam coordenadas adimensionais.

$$\omega_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (1)$$

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (2)$$

$$\omega_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (3)$$

$$\omega_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (4)$$

Para o caso da discretização vetorial, [Figura 1b](#), as funções de forma lineares são dadas pelas equações (5) e (6).

$$\varphi_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \quad (5)$$

$$\varphi_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \quad (6)$$

O mapeamento clássico do MEF é descrito pela Eq. (7).

$$X_i(\xi_1, \xi_2, X_{\ell i}) = \omega_\ell(\xi_1, \xi_2) X_{\ell i} \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (7)$$

Na Eq. (7),  $X_i$  são quaisquer coordenadas de pontos do contínuo,  $\omega_\ell(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de forma e  $X_{\ell i}$  são as coordenadas dos nós  $P_\ell$ , denominados de parâmetros de posição nodal. O mapeamento vetorial equivalente à Eq. (7) é apresentado por meio da Eq. (8), cujas coordenadas da linha de referência ( $X_{\ell i}^m$ ) e os vetores generalizados ( $H_{\ell i}$ ) são dados em (9).

$$X_i(\xi_1, \xi_2, X_{\ell i}^m, V_{\ell i}) = \varphi_\ell(\xi_1) X_{\ell i}^m + \frac{H_{\ell i} \varphi_\ell(\xi_1)}{2} \xi_2 \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } \ell = 1, 2 \quad (8)$$

$$X_{1i}^m = \frac{X_{1i} + X_{4i}}{2}; \quad X_{2i}^m = \frac{X_{2i} + X_{3i}}{2};$$

$$H_{1i} = X_{4i} - X_{1i} \quad \text{e} \quad H_{2i} = X_{3i} - X_{2i} \quad (9)$$

Por meio da análise da Eq. (8) fica evidente que o mapeamento vetorial é feito com o emprego de vetores não unitários ( $H_{\ell i}$ ) como parâmetros, os quais resultam não ortogonais a “linha de referência”, definida pela reta que liga os pontos  $P_1^m$  e  $P_2^m$  (ver Figura 1b). Assumindo uma altura constante ( $h_0$ ) para o elemento de pórtico, como normalmente é feito, a Eq. (8) é simplificada para o mapeamento descrito na Eq. (10).

$$X_i(\xi_1, \xi_2, X_{\ell i}^m, V_{\ell i}) = \varphi_\ell(\xi_1) X_{\ell i}^m + \frac{h_0}{2} \xi_2 V_{\ell i} \varphi_\ell(\xi_1) \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } \ell = 1, 2 \quad (10)$$

Na Eq. (10),  $V_{\ell i}$  é um vetor generalizado e sua aproximação ao longo do elemento tem a mesma natureza da linha de referência. Por simplicidade, na configuração inicial do corpo analisado, os vetores generalizados são unitários e são adotados ortogonais à linha de referência. Para a configuração atual, no entanto, os vetores generalizados podem não ser ortogonais e unitários em relação à linha de referência. Esta é a principal característica do mapeamento com vetores não restritos.

Por fim, a Eq. (11) apresenta a versão tridimensional da Eq. (10), cujo mapeamento é ilustrado por meio da Figura 2. Este mapeamento é totalmente similar àquele dado pela Eq. (10) e, conseqüentemente, apresenta a mesma objetividade.

$$X_i(\xi_1, \xi_2, X_{\ell i}^m, V_{\ell i}) = \varphi_\ell(\xi_1) X_{\ell i}^m + \frac{h_0}{2} \xi_2 V_{\ell i} \varphi_\ell(\xi_1) \quad (11)$$

com  $i = 1, 2$  e  $\ell = 1, 2$

Esta forma de descrição do contínuo resulta em nove graus de liberdade para cada nó do elemento finito, no qual se define um plano. Apresenta, portanto, três graus de liberdade adicionais se comparados à formulação clássica, proporcionando assim flexibilidade cinemática de mudar a configuração da seção transversal nas duas direções, bem como de

distorcê-la sobre seu plano. Vale ressaltar ainda que o grau de aproximação, ao longo da linha de referência, pode ser de qualquer ordem, sem mudar o significado físico ou matemático do mapeamento descrito.

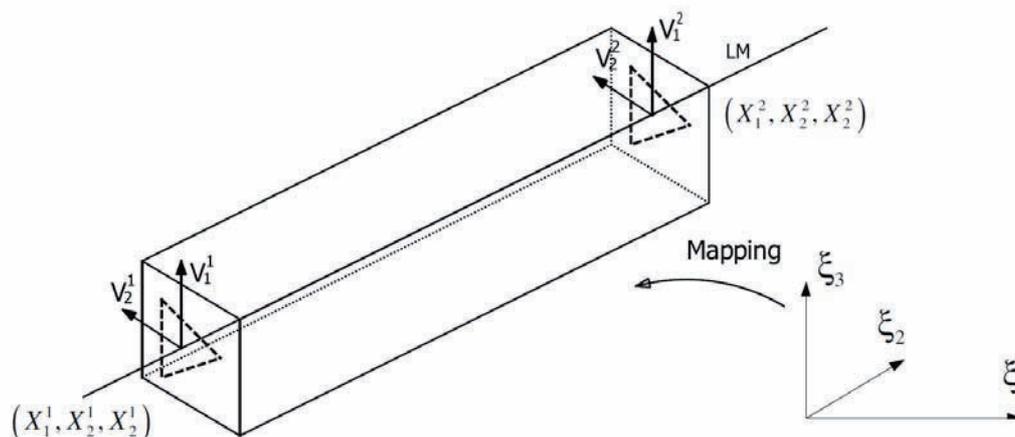


Figura 2: Mapeamento Vetorial tridimensional. FONTE: Coda (2009).

É importante mencionar que na Figura 2 uma seção quadrilátera é apresentada juntamente com uma representação auxiliar triangular. Essa representação triangular define o plano da seção e, portanto, o comportamento da seção transversal.

Os parâmetros  $h_0^1$  e  $h_0^2$  não são, necessariamente, as alturas da seção transversal na posição atual, pois os vetores generalizados não são necessariamente ortogonais à linha de referência. Como já mencionado anteriormente, na configuração inicial,  $V_{\hat{i}}^1$  e  $V_{\hat{i}}^2$  são adotados unitários e geralmente ortogonais à linha de referência e ortogonais entre seus pares. É importante destacar que esta imposição não é feita em relação à configuração atual.

Porém, a ortogonalidade dos vetores em relação à linha de referência na configuração inicial depende do tipo de conexão que o usuário pretende considerar na continuidade dos elementos para mapeamento do contínuo: conexão de canto ou conexão curva, ilustrada por meio da Figura 3.

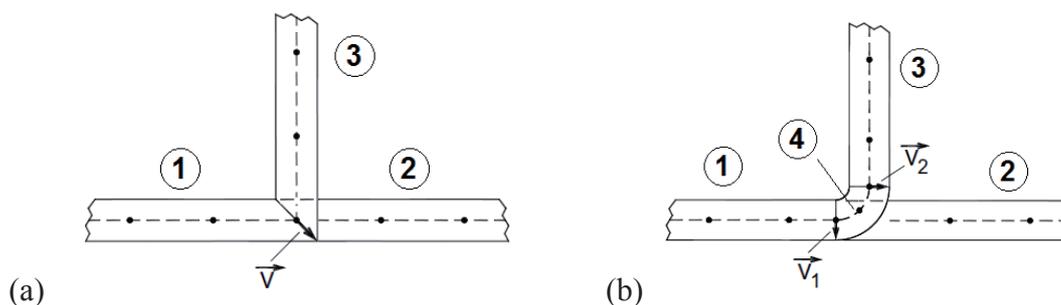


Figura 3: Tipos de conexão para o elemento de pórtico laminado não linear:  
a) Conexão de canto. b) Conexão curva.

De acordo com Coda e Paccola (2010) a conexão de canto (Figura 3a) é adequada para elementos longos e esbeltos. A conexão curva (Figura 3b) é adequada para elementos curtos (não esbeltos) e é obtida com o emprego de um elemento curvo entre elementos que se deseja conectar. Este último tipo de conexão mantém inicialmente o valor unitário e a ortogonalidade entre os vetores e é o tipo de conexão utilizado nas análises apresentadas no presente trabalho.

## 2.2 Mapeamento da mudança de configuração

Como mencionado anteriormente, a estratégia apresentada não apresenta nenhuma restrição com relação aos vetores  $V_{\ell i}^1$  e  $V_{\ell i}^2$  na configuração atual do corpo. Na configuração atual, os vetores não são unitários nem mesmo ortogonais entre si, ou mesmo em relação à linha de referência, de modo que passam a ser denominados, de agora em diante, como **vetores generalizados**, representados por  $g_{\ell i}^1$  e  $g_{\ell i}^2$ , e constituem a base não ortogonal que gera a seção transversal na configuração atual.

Na Figura 4 esquematiza-se o mapeamento posicional para um elemento de pórtico cúbico. É um mapeamento típico de configurações iniciais e atuais para um sólido curvo com aproximação cúbica (no sentido longitudinal da linha de referência) e que apresenta uma geometria plana no sentido transversal. Embora nessa figura seja esquematizado um elemento cúbico, o elemento apresentado em Coda (2009) e Coda e Paccola (2010) é de aplicação mais geral, pois permite ao usuário escolher a ordem desejada da aproximação.

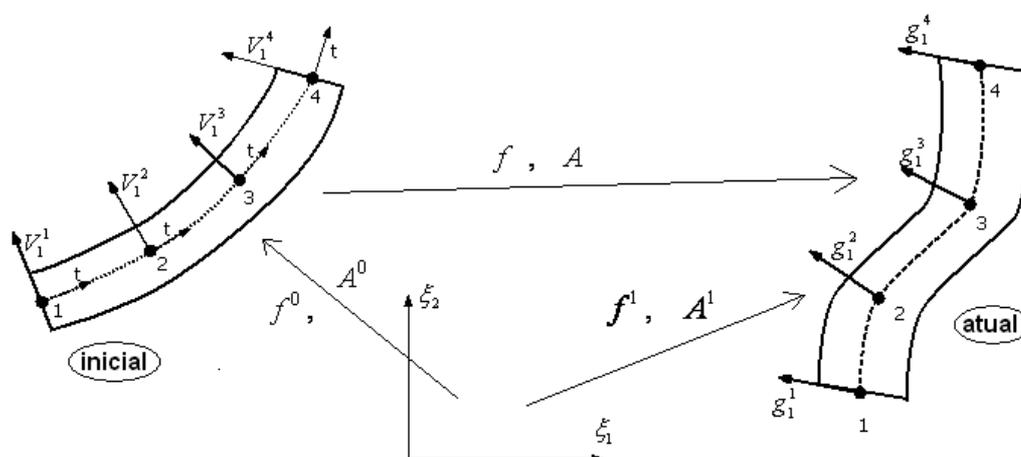


Figura 4: Mapeamento posicional das configurações inicial e atual do elemento, com relação ao espaço adimensional ( $\xi_1$  e  $\xi_2$ ).

As variáveis  $f$  e  $A$  Figura 4 representam, respectivamente, a descrição Lagrangeana da função mudança de configuração e seu gradiente. Da mesma forma,  $(f^0; f^1)$  e  $(A^0; A^1)$  representam, respectivamente, os mapeamentos e seus gradientes do espaço adimensional para as configurações inicial (0) e atual (1), cujas funções mudança de configuração são apresentadas nas equações (12) e (13).

$$f_i^0 = x_i = \varphi_\ell(\xi_1)X_{\ell i}^m + \frac{h_0^1}{2} \xi_2 V_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \frac{h_0^2}{2} \xi_3 V_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) \tag{12}$$

$$f_i^1 = y_i = \varphi_\ell(\xi_1)Y_{\ell i}^m + \frac{h_0^1}{2} \xi_2 g_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \frac{h_0^2}{2} \xi_3 g_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) \tag{13}$$

Nas últimas equações, o índice inferior  $\ell$  não é mais limitado apenas a dois nós e, neste caso,  $i$  varia de 1 a 3. O gradiente da função mudança de configuração, para levar em conta o mapeamento no espaço adimensional, é apresentado na Eq. (14).

$$A = A^1(A^0)^{-1} \quad \text{ou} \quad A_{ij} = A_{ik}^1 B_{kj}^0 \tag{14}$$

Na Eq. (14), vale  $B^0 = (A^0)^{-1}$ . Por meio dessa Eq., pode-se escrever a Eq. (15), que

apresenta o alongamento de Cauchy-Green à direita. O tensor de deformação de Green é dado em (16), em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kroenecker.

$$C = A^t A = (A^0)^{-t} A_1^t A_1 (A^0)^{-1} \quad \text{ou} \quad C_{ij} = B_{\gamma_i}^0 A_{\beta\gamma}^1 A_{\beta\alpha}^1 B_{\alpha_j}^0 \quad (15)$$

$$\mathbb{E}_{ij} = \frac{1}{2} [C_{ij} - \delta_{ij}] \quad (16)$$

Como afirmado anteriormente, os vetores  $g_i^1$  e  $g_i^2$ , juntamente com a linha de referência, geram o sólido analisado. No entanto, a geometria da seção transversal pode ser melhorada para considerar diferentes formatos de seção e materiais. Nesse sentido, é necessário substituir as constantes  $h_0^1$  e  $h_0^2$  por uma discretização que, multiplicado pelos respectivos vetores base  $V_i^1$  e  $V_i^2$  na configuração inicial, resultem em geometria qualquer para a seção transversal. Tal procedimento compreende uma mudança de configuração da seção transversal que depende somente das transformações  $V_i^1 \rightarrow g_i^1$  e  $V_i^2 \rightarrow g_i^2$ .

Por último, pode-se adotar para esta discretização o mapeamento bidimensional feito por elementos finitos triangulares isoparamétricos de aproximação cúbica, conforme esquematizado na Figura 5.

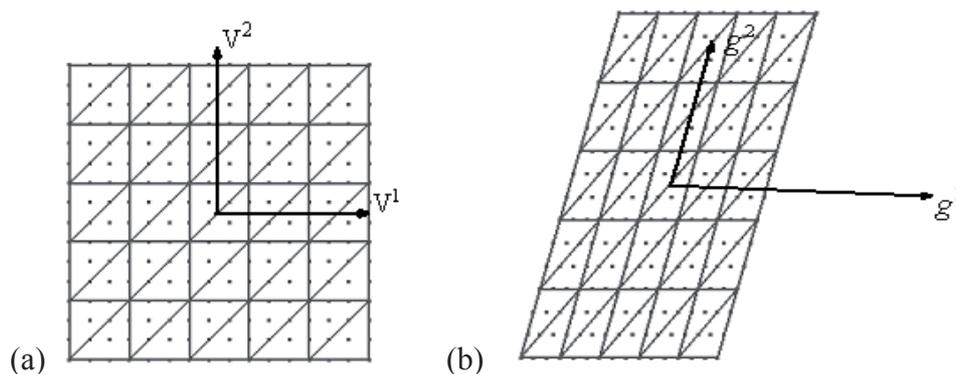


Figura 5: Definição geral da geometria de uma seção transversal.  
(a) Configuração Inicial e (b) Configuração atual.

O par de vetores  $V_i^1$  e  $V_i^2$  na Figura 5 representa uma base ortonormal referente à configuração inicial, enquanto o par de vetores  $g_i^1$  e  $g_i^2$  constitui base genérica referente à configuração atual. Por este motivo, as equações (12) e (13) são reescritas a seguir nas formas apresentadas pelas equações (17) e (18).

$$f_i^0 = x_i = \varphi_\ell(\xi_1) X_{\ell i}^m + \alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) V_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) V_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) \quad (17)$$

$$f_i^1 = y_i = \varphi_\ell(\xi_1) Y_{\ell i}^m + \alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) \quad (18)$$

Com relação às equações (17) e (18),  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são coordenadas adimensionais ordinárias do elemento finito triangular,  $\alpha^j$  e  $\beta^j$  (valores conhecidos) são coordenadas dos pontos que constituem a malha auxiliar da seção transversal e  $\psi^j(\gamma_1, \gamma_2)$  a matriz das funções de forma do elemento triangular.

### 2.3 Aperfeiçoamento da cinemática da seção transversal: modos de empenamento e deformação com variação linear na direção transversal

Ao se adotar uma relação constitutiva tridimensional completa e cinemática de Reissner pode surgir travamento (locking) volumétrico. Isto ocorre devido à influência do coeficiente de Poisson e de aproximações desbalanceadas para deformações normais, bem como para aquelas referentes ao cisalhamento (Coda, 2009). Para corrigir este problema, na última referência faz-se a apresentação da cinemática da seção transversal aperfeiçoada por meio da introdução de deformação com variação na direção transversal e a consideração de efeitos de empenamento.

O primeiro aperfeiçoamento consiste da introdução, na Eq. (18), de deformação com variação nas direções transversais ao eixo da barra, o que diferencia a formulação aqui apresentada das já conhecidas formulações clássicas que, por não adotarem tal aperfeiçoamento, apresentam deformações constantes na referida direção.

Este aperfeiçoamento garante um comportamento de contínuo para a seção que pode ser descrito, como a deformação apresentando variação linear ao longo das direções transversais da barra (eixos da seção transversal). Esta flexibilidade cinemática é expressa pela modificação da Eq. (18), resultado na Eq. (19).

$$f_i^1 = y_i = \varphi_\ell(\xi_1) Y_{\xi_1}^m + \alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) + \left\{ [\alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2 (\Lambda_\ell^1 \varphi_\ell(\xi_1)) \right\} g_{i\ell}^1 \varphi_\ell(\xi_1) + \left\{ [\beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2 (\Lambda_\ell^2 \varphi_\ell(\xi_1)) \right\} g_{i\ell}^2 \varphi_\ell(\xi_1) \quad (19)$$

Nessa última Eq. são considerados os termos apresentados nas equações (20) e (21), os quais representam valores de intensidade da taxa de deformação transversal. Os parâmetros nodais associados a esta cinemática adicional são  $\Lambda_\ell^1$  e  $\Lambda_\ell^2$ . Os termos  $[\alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2$  e  $[\beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2$  representam os modos de aperfeiçoamento transversal.

$$a^1(\xi_1) = \Lambda_\ell^1 \varphi_\ell(\xi_1) \quad (20)$$

$$a^2(\xi_1) = \Lambda_\ell^2 \varphi_\ell(\xi_1) \quad (21)$$

A cinemática descrita pela Eq. (19) não está totalmente livre dos efeitos de travamento quanto à torção, juntamente ao emprego de uma lei constitutiva tridimensional completa. Para corrigir esta deficiência, em Coda (2009) e Coda e Paccola (2010) se propõe introduzir o modo de empenamento na cinemática do problema. Este procedimento guarda similaridade com a técnica da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Para mais informação a respeito do assunto, os leitores são convidados ler os trabalhos de Dinis et al. (2006) e demais trabalhos citados nessa referência.

Basicamente, são duas as principais diferenças entre a referida técnica e a formulação aqui apresentada. Na formulação aqui empregada o modo de empenamento é introduzido numa base não ortogonal  $g_i^1$  e  $g_i^2$  e, portanto, não relacionado a um sistema de eixos rígidos. A segunda diferença é que a técnica da GBT, da forma como é apresentada, limita-se à aplicação em seções abertas de parede fina homogêneas, por empregar solução analítica com base em Vlasov (1961) para o modo do empenamento, o que não é o caso da formulação aqui descrita.

A fim de se criar o modo de empenamento, resolve-se o problema linear da torção de Saint-Venant via MEF, de acordo com a Eq. (22), considerando material não homogêneo e geometria inicial da seção transversal, por meio de uma discretização da seção como aquela

ilustrada por meio da [Figura 5a](#), por exemplo.

$$D^{\text{el}}(\gamma_1, \gamma_2) = D^{\text{el}}\psi_\ell(\gamma_1, \gamma_2) \quad (22)$$

Na Eq. (22)  $D^{\text{el}}$  são os valores dos deslocamentos devido ao empenamento para os  $\ell$  pontos de cada elemento finito triangular (índice superior el) auxiliar da discretização seção transversal, conforme [Figura 5a](#), por exemplo. A direção do empenamento, desenvolvido no elemento de pórtico analisado, é dada pelo produto do vetorial entre  $g_i^1$  e  $g_i^2$ , formalizado na Eq. (23), em que  $\zeta_{ijk}$  define o tensor usual de produto vetorial.

$$n_i(\xi_1) = \zeta_{ijk} g_j^1(\xi_1) g_k^2(\xi_1) = \zeta_{ijk} [g_{j\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1)] [g_{k\ell}^2 \phi_\ell(\xi_1)] \quad (23)$$

É importante notar que o modo de empenamento, dada pela Eq. (22), refere-se a uma intensidade de empenamento associado ao problema da torção de Saint-Venant. Para problemas gerais, esta intensidade varia ao longo do elemento estrutural. Conseqüentemente, o empenamento desenvolvido numa seção transversal qualquer (função de  $\xi_1$ ) é dado de acordo com a Eq. (24).

$$w_i^{\text{el}}(\xi_1, \gamma_1, \gamma_2) = [D^{\text{el}}\psi_\ell(\gamma_1, \gamma_2) n_i(\xi_1)] \zeta_{ijk} [g_{j\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1)] [g_{k\ell}^2 \phi_\ell(\xi_1)] \phi_\ell(\xi_1) W_\ell \quad (24)$$

Com relação à Eq. (24),  $W_\ell$  é a intensidade do empenamento (escalar) a ser determinada para cada nó  $\ell$  do elemento finito e  $w_i^{\text{el}}$  é o deslocamento segundo a direção  $n_i$  para um ponto qualquer da seção transversal. Nesse sentido, o aperfeiçoamento é alcançado pela adição da Eq. (24) na Eq. (19), resultando na Eq. (25).

$$\begin{aligned} f_i^1 = y_i = & \phi_\ell(\xi_1) Y_{\ell i}^m + \alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1) + \beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2) g_{i\ell}^2 \phi_\ell(\xi_1) + \\ & \left\{ [\alpha^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2 (\Lambda_\ell^1 \phi_\ell(\xi_1)) \right\} g_{i\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1) + \left\{ [\beta^j \psi^j(\gamma_1, \gamma_2)]^2 (\Lambda_\ell^2 \phi_\ell(\xi_1)) \right\} g_{i\ell}^2 \phi_\ell(\xi_1) + \\ & [D^{\text{el}}\psi_\ell(\gamma_1, \gamma_2)] \zeta_{ijk} [g_{j\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1)] [g_{k\ell}^2 \phi_\ell(\xi_1)] \phi_\ell(\xi_1) W_\ell \end{aligned} \quad (25)$$

A Eq. (25) representa um mapeamento vetorial objetivo do espaço adimensional para a configuração atual do corpo, considerando deformação com variação na direção transversal e empenamento. Este mapeamento resulta em 12 graus de liberdade para cada nó que são: três translações  $Y_{\ell i}^m$ , seis componentes vetoriais  $g_{i\ell}^1$  e  $g_{i\ell}^2$ , dois valores de intensidade da taxa de deformação nas direções transversais  $\Lambda_\ell^1$  e  $\Lambda_\ell^2$  e intensidade do empenamento  $W_\ell$ .

## 2.4 Técnica de solução

A técnica de solução tem por base o princípio da mínima energia potencial total. A energia potencial total ( $\Pi$ ) é descrita pela Eq. (26).

$$\Pi = \int_{V_0^{\text{el}}} u_e dV_0^{\text{el}} - F_{\text{nod}j} Y_{\text{nod}j} \quad (26)$$

Na Eq. (26)  $F$  é o vetor de forças externas conservativas aplicadas,  $Y$  é o vetor posição (incluindo todos os graus de liberdade) e  $u_e$  é a energia específica de deformação, escrito de acordo com a Eq (27), na qual  $C$  é o alongamento de Cauchy-Green à direita e  $\mathbb{E}$  o tensor de deformações de Green, dados pelas Eq. (15) e (16), respectivamente.

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{ij} C_{ijkl} \mathbb{E}_{kl} \quad (27)$$

Para obtenção da solução, a minimização da energia potencial total  $\Pi$  é feita com o clássico procedimento de Newton-Raphson.

### 3 REGRA E CRITÉRIOS DA PLASTICIDADE

No presente trabalho a plasticidade do material é assumida segundo o critério de Von Mises. A regra de fluxo adotada é a da plasticidade não associativa e o encruamento é assumido isotrópico.

De maneira genérica, a equação de uma superfície plástica num modelo com encruamento pode ser dada de acordo com a equação (28), em que a tensão limite de escoamento  $\bar{\sigma}$  é dependente do parâmetro  $k$ , denominado parâmetro de encruamento isotrópico, e  $\bar{f}$  é uma função do estado de tensão  $\sigma$  no ponto de interesse.

$$f = \bar{f}(\sigma) - \bar{\sigma}(k) = 0 \quad (28)$$

Assumindo o critério de plasticidade segundo a superfície de Von Mises a Eq. (28) é reescrita na forma da equação (29), de acordo com Simo e Hughes (1998).

$$f = \left( \frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma}(k) \leq 0 \quad (29)$$

O termo  $P$  é uma matriz simétrica definida da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad (30)$$

O tensor de tensões  $\sigma$  é escrito na forma vetorial de acordo com a Eq. (31).

$$\sigma^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T \quad (31)$$

A tensão equivalente  $\bar{\sigma}$  é definida de acordo com uma lei isotrópica linear, na forma apresentada na Eq. (32), em que  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento do material,  $H$  é o módulo plástico tangente do material.

$$\bar{\sigma}(k) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_0 + Hk) \quad (32)$$

As deformações plásticas (incrementais) são definidas segundo uma lei de fluxo não associativa. Assim, parte-se da hipótese que o sólido em escoamento poderá se comportar como um fluido compressivo, ou seja, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície responsável, em princípio, por definir apenas o limite elástico do material. Supõe-se também que se deva estabelecer a direção do fluxo plástico mantendo uma relação com as tensões, sendo esta relação semelhante à relação elástica (tensão/deformação).

Então, pode-se escolher um tensor unitário qualquer “ $n$ ” como sendo a direção do fluxo

plástico. No caso, é interessante que este esteja relacionado com a direção da tensão de tentativa da maneira como apresentado na Eq. (33) em que  $C^p$  é um tensor plástico semelhante ao tensor constitutivo elástico  $C$ .

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \mathbf{n} = \Delta \lambda \frac{C^{p^{-1}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{tent}}}{\left| C^{p^{-1}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{tent}} \right|} \quad (33)$$

Pode-se adotar como particularização da Eq. (33), o tensor elástico  $C$  no lugar do tensor plástico  $C^p$ . Isso faz com que o fluxo plástico tenha seu retorno dado na direção das deformações elásticas aplicadas ao corpo, o que pode induzir variação volumétrica na fase plástica. Como o sentido do estado de tentativa elástico preserva as condições de complementaridade de Kuhn-Tucker, a direção de geral de  $\mathbf{n}$  pode ser consistentemente encontrada por meio da equação (34).

$$\mathbf{n} = \frac{C^{p^{-1}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{tent}}}{\left| C^{p^{-1}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{tent}} \right|} \quad (34)$$

Para a hipótese de encruamento por deformação, o parâmetro  $k$  se relaciona com a norma do tensor das taxas de deformação plástica  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  de acordo a Eq. (35), em que  $\varepsilon^{\text{eq}}$  é denominada deformação plástica equivalente e  $K_p$  é um termo cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado se possa recuperar o caso unidimensional.

$$k = \int K^p \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = \varepsilon^{\text{eq}} \quad \text{ou} \quad \Delta k = K^p \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = \Delta \varepsilon^{\text{eq}} \quad (35)$$

Nas formulações clássicas o termo  $K^p$  é obtido a partir da hipótese de incompressibilidade, adotando-se o coeficiente de deformação transversal na plasticidade igual a 0,5. Define-se aqui  $\nu^p$ , por similaridade, como coeficiente de Poisson ‘plástico’, pois este controla a variação volumétrica do material na fase plástica, da mesma forma como foi definido em [Botta et al. \(2008\)](#). Assim, ao se idealizar o fluxo plástico como o fluxo de um fluido compressível, o parâmetro  $K^p$  é dado por meio da equação (36), como função do coeficiente de Poisson ‘plástico’  $\nu^p$ .

$$K^p(\nu^p) = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^{p^2}}} \quad (36)$$

Por fim, seguindo a estratégia apresentada em [Mesquita \(2002\)](#), através de uma adequada manipulação das relações constitutivas do modelo proposto, pode-se obter o multiplicador plástico para o presente caso de não associatividade por meio de uma equação explícita como a equação (37), sem o uso de procedimentos iterativos.

$$\Delta \lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{\text{tent}}}{\frac{1}{\left| C^{p^{-1}} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{\text{tent}} \right|} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{\text{tent} \top} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{\text{tent}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} H K_p} \quad (37)$$

Com vistas a uma melhor compreensão do procedimento implícito de integração do critério de von Mises aqui brevemente discutido, apresenta-se os passos do algoritmo na [Figura 6](#), onde assume-se  $\nu^p$  igual a  $\nu$  e, portanto,  $C^p$  igual a  $C$ , tendo em vista que a seção transversal pode se deformar livremente na direção transversal

Em seguida são apresentadas análises inelásticas com um código de cálculo desenvolvido com base na formulação discutida até aqui.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa
 
$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$$

$$\sigma_{i+1}^{\text{tent}} = C(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$k_{i+1}^{\text{tent}} = \varepsilon_i$$
2. Calcular o critério de plasticidade com as tensões de tentativa
 
$$f_{i+1}^{\text{tent}} = \left( \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{\text{tent} \top} P \sigma_{i+1}^{\text{tent}} \right)^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma}(k_{i+1}^{\text{tent}})$$
3. Se  $f_{i+1}^{\text{tent}} \leq 0$ 
  - 3.1. Então  $\rightarrow$  finalizar
  - 3.2. Senão:
    - 3.2.1. Determinar  $\Delta\lambda_{i+1}$ 

$$n_{i+1} = \frac{C^{-1} \sigma_{i+1}^{\text{tent}}}{|C^{-1} \sigma_{i+1}^{\text{tent}}|} \quad K^p = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu^2}}$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{\text{tent}}}{\frac{1}{|C^{-1} \sigma_{i+1}^{\text{tent}}|} \left( \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{\text{tent} \top} P \sigma_{i+1}^{\text{tent}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} H K^p}$$
    - 3.2.2. Atualizar as variáveis internas com o valor de
 
$$\sigma_{i+1} = \left( 1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{|C^{-1} \sigma_{i+1}^{\text{tent}}|} \right) \sigma_{i+1}^{\text{tent}}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$k_{i+1} = k_i + K \Delta\lambda_{i+1}$$

Figura 6 – Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D. Fonte: Mesquita (2002).

## 4 EXEMPLOS

No presente item são apresentados exemplos de análises inelásticas com a aplicação de um código de análise estrutural (CAE), desenvolvido em linguagem FORTRAN, que utiliza a formulação apresentada nos itens anteriores para o elemento finito de pórtico laminado não linear. Tais exemplos têm por objetivo validar o CAE em análises inelásticas de estruturas de aço aporticadas. Como o elemento finito utilizado não é capaz de capturar eventuais instabilidades locais nos elementos estruturais, os perfis utilizados nas análises apresentadas a seguir possuem seções classificadas como compactas.

### 4.1 Pilar com tensão residual

Em Chen et al. (1996) são apresentados os resultados obtidos para a análise de um pilar, no contexto de plasticidade distribuída, submetida à compressão e momentos iguais em ambas as extremidades com imperfeição inicial, como ilustrado esquematicamente pela Figura 7a,

extraída de [Alvarenga e Silveira \(2009\)](#). Além disso, foi assumido para o elemento o padrão de tensão residual proposto por [Galambos e Ketter \(1957\)](#), ilustrado na [Figura 7b](#).

A análise foi conduzida empregando-se um perfil de aço com seção W8x31 (padrão americano) com índices de esbeltez iguais a 20, 60 e 100, considerando-se apenas a flexão em torno do eixo de maior inércia. Além disso, os elementos da seção transversal são plenamente compactos para evitar a ocorrência de flambagem local, não capturada com as ferramentas numéricas utilizadas.

A imperfeição inicial do pilar têm variação senoidal ao longo do comprimento e amplitude máxima  $\delta_0$  igual a  $L/1000$  no meio do vão. O módulo de elasticidade foi tomado igual a 200.000 MPa e a tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) foi assumida igual a 250 MPa.

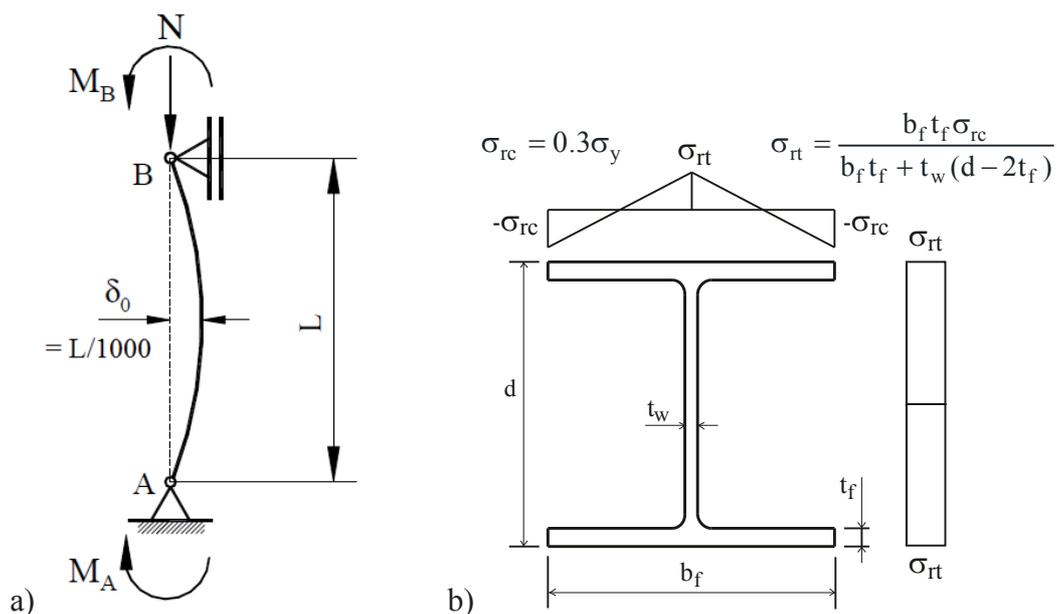


Figura 7: a) Geometria do problema. Ilustração extraída de [Alvarenga e Silveira \(2009\)](#). b) Distribuição de tensões residuais segundo [Galambos e Ketter \(1957\)](#).

Inicialmente estudou-se a resposta do modelo desprovido de tensão residual para serem realizados testes de malha e avaliar a resposta confrontando-se os resultados do CAE com resultados do código ANSYS v9.0. As análises com o ANSYS foram efetuadas com a discretização da viga-coluna em 6 elementos quadráticos do tipo BEAM189 segundo o eixo do pilar, com um total de 13 nós, cuja seção transversal foi dividida elementos quadriláteros quadráticos lagrangeanos, de acordo com a [Figura 8c](#). A discretização do modelo com o CAE foi efetuada inicialmente considerando-se 4 elementos cúbicos segundo o eixo da barra. Para efeito de estudo de malha da seção transversal, essa foi discretizada de acordo com os dois padrões apresentados nas [Figura 8a](#) (malha esparsa) e [8b](#) (malha refinada).

Os resultados obtidos com o modelo para a discretização da seção transversal segundo a malha esparsa e aqueles obtidos com a discretização da malha refinada foram idênticos. Então, empregando-se a discretização da malha esparsa para a seção transversal, comparou-se ainda os resultados obtidos para um modelo com o comprimento dividido em quatro elementos finitos cúbicos e outro com apenas dois elementos cúbicos. Para esse teste os resultados também foram idênticos.

Assim, os resultados a serem apresentados a seguir obtidos com o CAE referem-se ao modelo de elementos finitos com dois elementos cúbicos ao longo do comprimento do pilar e seção transversal discretizada de acordo com a [Figura 8a](#).

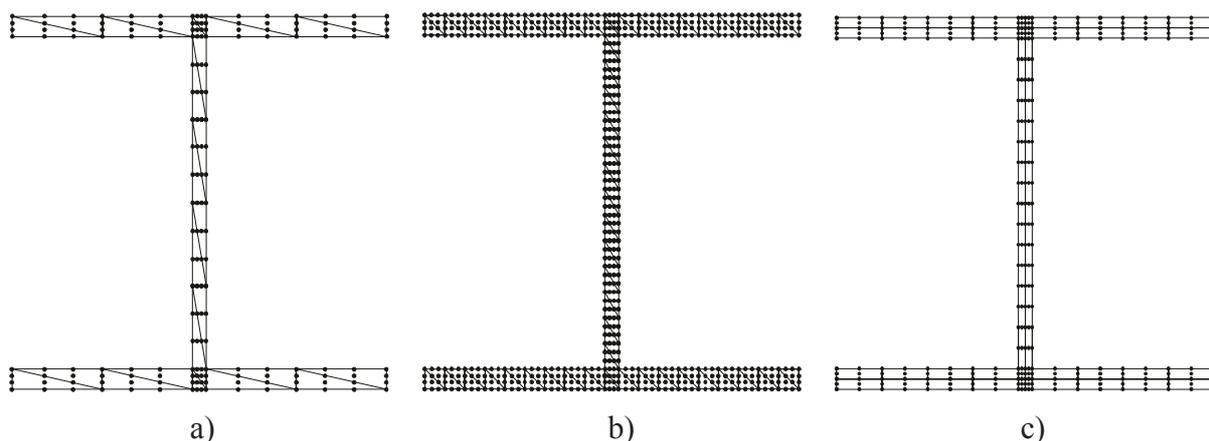


Figura 8: Discretização da seção transversal para análise: a) CAE - Malha esparsa; b) CAE - Malha refinada; c) ANSYS – BEAM189.

Na Figura 9 podem ser vistos os resultados das curvas de interação para análise sem a consideração de tensão residual, obtidos com o ANSYS e com o CAE, para as relações de esbeltez  $L/r$  iguais a 20, 60 e 100. Como pode ser constatado, por meio da análise dessa figura, as curvas obtidas com o ANSYS e com o CAE resultaram praticamente idênticas.

Na Figura 11 são apresentados os resultados das curvas de interação para análise com consideração de tensão residual obtidos com o CAE e aqueles apresentados em Chen et al. (1996). Verifica-se que os resultados obtidos com o CAE são bastante próximos àqueles obtidos em Chen et al. (1996) na análise do problema em questão.

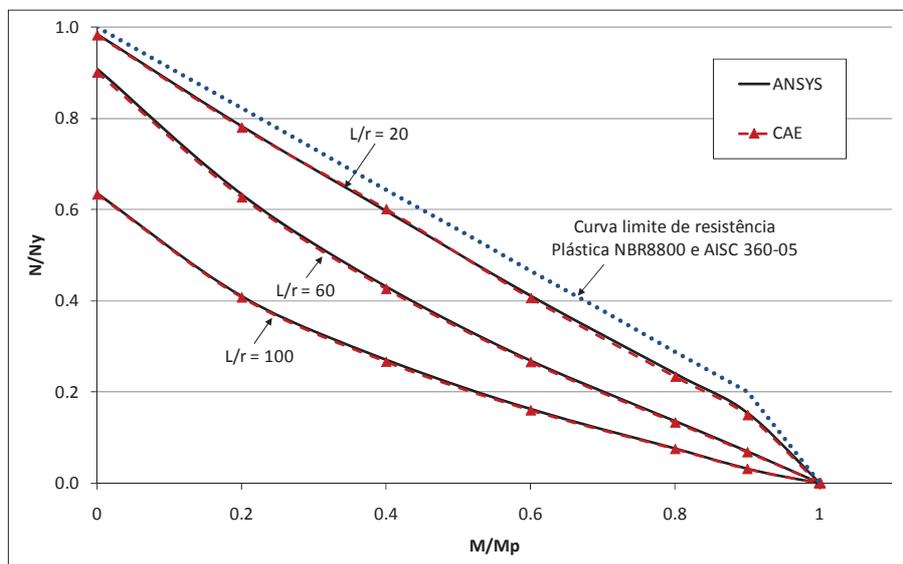
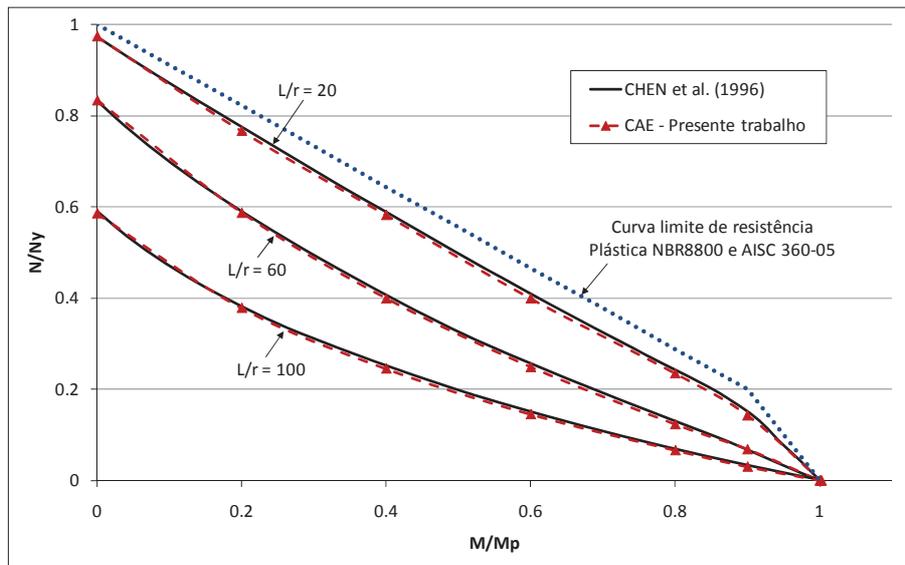


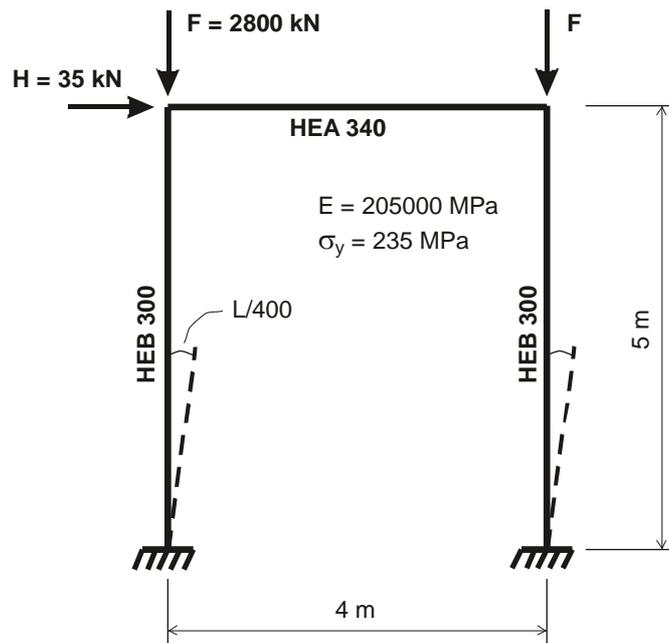
Figura 9: a) Curvas de interação para análise sem consideração de tensão residual. b) Curvas de interação para a análise com consideração de tensão residual



## 4.2 Portal de VOGEL

De acordo com [Toma e Chen \(1992\)](#), este é um dos três exemplos recomendados pelo [ECCS \(1984\)](#) para a validação da resposta de análises inelásticas de qualquer formulação. Outros dois serão apresentados nos itens que se seguem e se referem à análise de um pórtico com duas águas e a análise de um pórtico de edifício com duas naves e seis andares.

O portal de Vogel, cuja geometria é ilustrada na [Figura 11](#) é um dos mais simples e mais utilizados exemplos de referência para análises não lineares inelásticas e, portanto, uma escolha lógica para análises iniciais com vistas à validação de formulações e de códigos de cálculo.



O problema do portal em questão, proposto e resolvido por Vogel (1985), trata de um portal engastado nas bases, sujeito, simultaneamente, a duas cargas verticais  $P$  e uma carga horizontal de  $H$ , como

No modelo desse pórtico são consideradas imperfeições geométricas globais, por meio da aplicação de um deslocamento correspondente a  $L/400$  ao topo do pórtico, e imperfeições geométricas locais, por meio da aplicação de uma configuração senoidal aos pilares com uma flecha máxima correspondente a  $L/1000$  no meio do vão.

Diversos trabalhos utilizam o portal de Vogel para validar suas formulações e estratégias de modelagem. Em Vogel (1985), Ziemian (1993), Clarke et. al (1993) e Alvarenga e Silveira (2009) este problema é analisado com elementos de pórtico com plasticidade distribuída. Em Avery e Mahendran (2000) e Kim e Lee (2002) o problema é analisado utilizando-se o pacote comercial ABAQUS e elementos finitos do tipo casca. Em Chen et al. (1996) o portal é analisado por meio da teoria das rótulas plásticas. Em Chan e Zhou (2004) utiliza-se a teoria das rótulas plásticas com função polinomial de ordem elevada para análise do portal.

O material do problema em questão é um aço com resistência ao escoamento  $\sigma_y$  igual a 235 MPa e módulo de elasticidade  $E$  igual a 205000 MPa. Adota-se uma relação constitutiva trilinear como aquela ilustrada na Figura 12a, segundo Toma e Chen (1992), na qual o encruamento inicia-se a partir de  $10\epsilon_y$  ( $\epsilon_y$  é a deformação de início da plastificação) e o módulo de elasticidade tangente  $E_{st}$  é tomado igual a 2 % do módulo de elasticidade  $E$ .

As tensões residuais consideradas seguem a recomendação apresentada em ECCS (1984), cujo padrão aplicado a perfis laminados está representado por meio da Figura 12b.

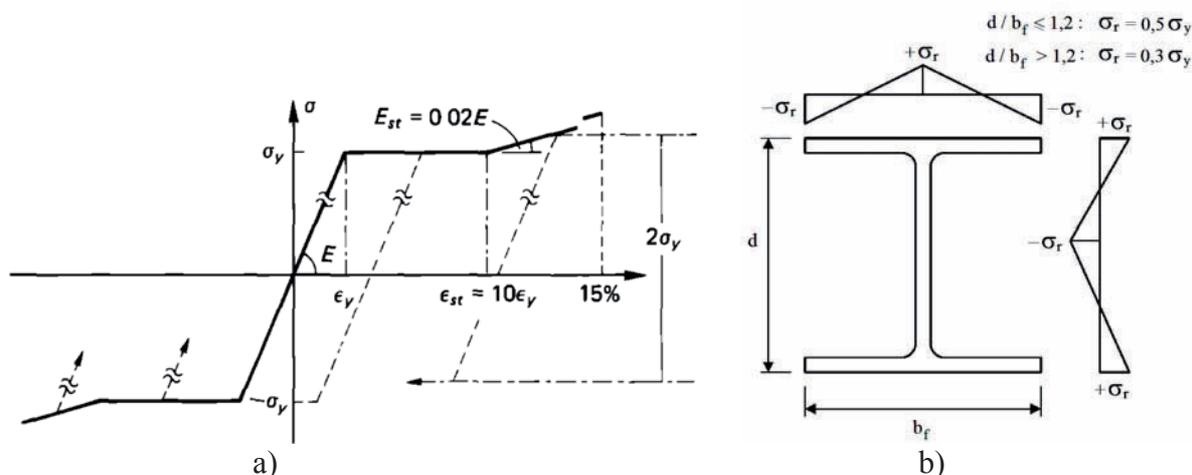


Figura 12: a) Relação constitutiva adotada. Fonte: Toma e Chen (1992). b) Padrões de tensões residuais recomendados em ECCS (1984) para perfis I laminados

Na presente análise, utilizaram-se duas discretizações longitudinais para os elementos do portal: uma primeira com 2 elementos cúbicos por elemento estrutural e uma segunda com 4 elementos cúbicos por elemento estrutural. Dada a natureza vetorial da formulação do elemento finito utilizado, as conexões entre os pilares e a viga são feitas por meio de elementos curvos rígidos de comprimento reduzido. Neste trabalho as conexões entre vigas e pilares são feitas por meio de elementos curvos rígidos de raio igual a 1 cm.

A discretização segundo o eixo dos elementos estruturais, considerando 4 elementos finitos cúbicos por elemento estrutural, e aquela empregada para a seção transversal dos elementos finitos, pode ser vista nas Figura 13a e Figura 13b, respectivamente.

Vale ressaltar ainda que se considera apenas a análise plana do portal e, por isso, a vigas e

os pilares são lateralmente contidos fora do plano da análise. Além disso, os elementos das seções transversais dos perfis são considerados compactos para que não ocorram instabilidades locais.

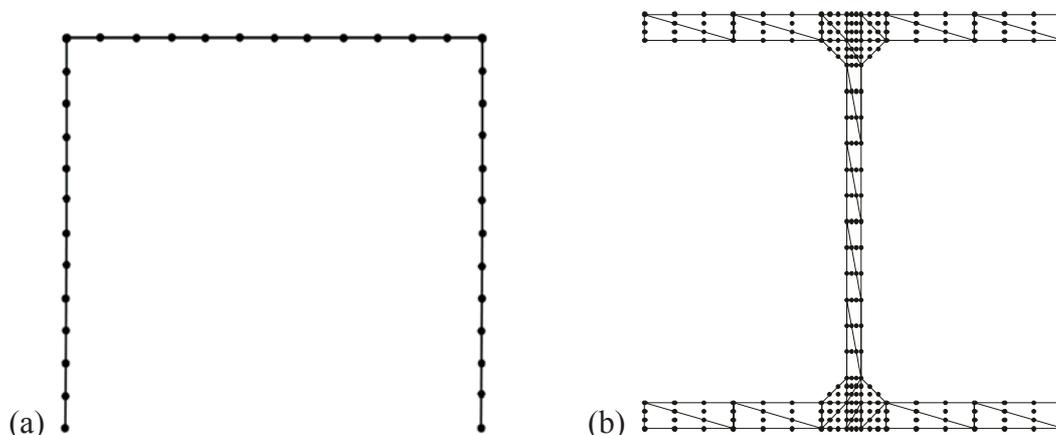


Figura 13: Discretização do modelo com para análise com o CAE: (a) Discretização longitudinal dos elementos estruturais e (b) Discretização típica da seção transversal.

Na Tabela 1, são apresentados os resultados obtidos para o fator de carregamento no momento do colapso, denominado  $\lambda_{col}$ , obtidos em diferentes trabalhos e por diferentes técnicas.

LEGENDA: PD-P = Plasticidade distribuída com elementos de pórtico;  
 PD-C = Plasticidade distribuída com elementos do tipo casca; RP = rótulas plásticas;  
 EPE = elementos cúbicos por elemento estrutural

REFERÊNCIA	Método	$\lambda_{col}$
Vogel (1985)	PD-P	1,022
	RP	1,017
Ziemian (1993)	PD-P	1,00
	RP	1,05
Clarke et al. (1993)	PD-P	1,023
CHEN et al. (1996)	RP	0,96
Avery e Mahendran (2000)	PD-C	1,01
Kim e Lee (2002)	PD-C	1,03
Chan e Zhou (2004)	RP	1,033
Alvarenga e Silveira (2009)	PD-P	1,007
Presente trabalho – 2 EPE	PD-P	1,031
Presente trabalho – 4 EPE	PD-P	1,019

Tabela 1: Portal de Vogel – Fator de carregamento no colapso ( $\lambda_{col}$ )

Na Figura 14 são apresentados os resultados da evolução dos deslocamentos no topo do pilar esquerdo em função do fator de carregamento  $\lambda$  obtido com o CAE, considerando a discretização com 4 elementos cúbicos por elemento estrutural. A título de comparação, nesta mesma figura são apresentados também os resultados obtidos em Vogel (1985), Ziemian (1993) e Kim e Lee (2002), tendo sido utilizado nessa última referencia, para a modelagem do portal, um total de 8952 elementos do tipo casca com o emprego do programa ABAQUS.

Os valores obtidos para  $\lambda_{col}$ , por meio do código CAE, foram 1,031 e 1,019 considerando 2

e 4 elementos finitos cúbicos por elemento estructural, respectivamente. Obviamente os resultados obtidos com a discretização que utiliza 4 elementos cúbicos por elemento estructural são mais preciso, mas a diferença é consideravelmente pequena.

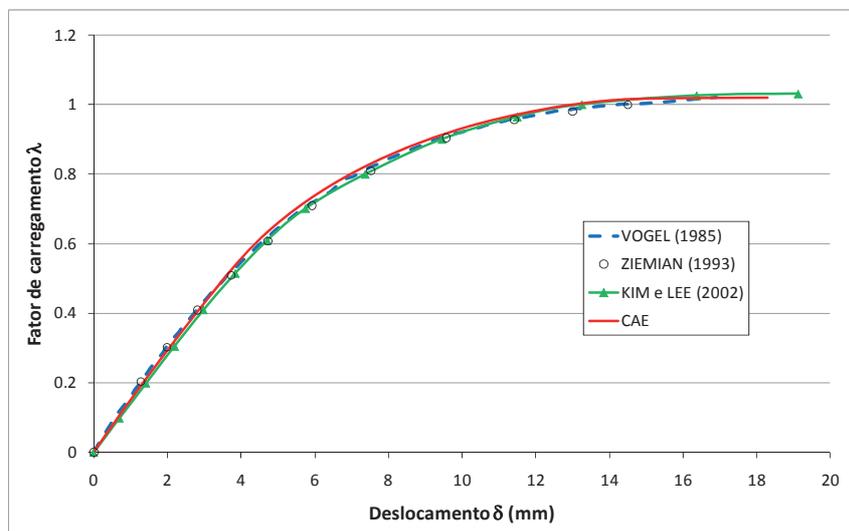


Figura 14: Deslocamento no topo do pilar esquerdo em função do fator de carregamento  $\lambda$  para o portal de Vogel.

Além disso, os resultados de  $\lambda_{col}$  obtidos com o CAE estão bastante próximos daqueles apresentados na Tabela 1, obtidos por outros autores. Além disso, o comportamento da curva  $\delta \times \lambda$  obtido com o CAE está de acordo com os resultados obtidos em Vogel (1985), Ziemian (1993) e Kim e Lee (2002), o que nos permite concluir que o CAE foi eficiente na análise do portal de Vogel.

### 4.3 Pórtico tridimensional de aço de dois andares com seções tipo H

Na Figura 15 apresenta-se a geometria do pórtico tridimensional de aço de dois andares, analisado originalmente em NGO-HUU et al. (2007). As seções das vigas e dos pilares consistem de perfis H150x160x6.5x10.

A resistência ao escoamento e o módulo de elasticidade são 320 MPa e 221000 MPa, respectivamente. O material é assumido com comportamento elasto-plástico perfeito. O padrão de tensão residual utilizado foi o mesmo recomendado em ECCS (1984) e ilustrado anteriormente por meio da Figura 7b. São consideradas apenas imperfeições globais referentes ao desaprumo em cada nível de pavimento. Os valores considerados, extraídos de NGO-HUU et al. (2007) são listados na Tabela 2.

Em NGO-HUU et al. (2007) analisa-se o problema em questão por meio de modelo com elementos de pórtico e plasticidade concentrada (rótulas plásticas), com a consideração da plastificação gradual da seção transversal por meio da discretização da seção transversal em elementos planos. Com vistas à geração de resultados para comparação, no referido trabalho, o pórtico em questão também foi modelado com 49840 elementos tipo casca S4R5 empregando-se o código ABAQUS.

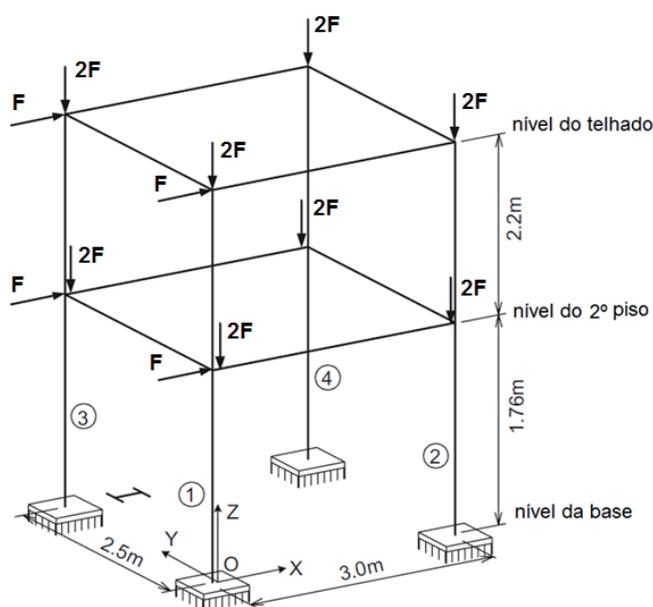


Figura 15: Pórtico tridimensional de aço com seções tipo H.

Nível	Desaprumo (mm)							
	Pilar 1		Pilar 2		Pilar 3		Pilar 4	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
Telhado	4,51	11,08	5,49	11,41	-8,17	6,58	-4,31	12,04
Segundo Piso	1,39	6,88	-0,68	6,77	-5,11	2,11	-3,96	6,19
Base	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2: Imperfeições globais referentes ao desaprumo consideradas na análise do pórtico tridimensional de aço. Fonte: NGO-HUU et al. (2007)

Na análise com o CAE são utilizados 4 elementos finitos cúbicos por elemento estrutural e seção transversal discretizada de acordo com o padrão apresentado na Figura 8a. Na Tabela 3 são apresentados os carregamentos últimos obtidos nas análises realizadas em NGO-HUU et al. (2007), e aquele obtido no presente trabalho.

REFERÊNCIA	$F_u$ (kN)
NGO-HUU et al. (2007) – ABAQUS	75,0
NGO-HUU et al. (2007) – plasticidade concentrada	72,2
Presente trabalho	71,8

Tabela 3: Carregamento último ( $F_u$ ) obtido nas análises.

Na Figura 16 são apresentadas curvas deslocamento *versus* força aplicada considerando o nível do segundo piso e do telhado, Figura 16a e Figura 16b, respectivamente.

Por meio da análise pode-se notar que os resultados obtidos com o CAE (presente trabalho) são similares àqueles apresentados em NGO-HUU et al. (2007), ficando mais próximo aos resultados obtidos por meio do método das rótulas plásticas. No referido trabalho atribui-se as diferenças obtidas em relação ao modelo com elementos do tipo cascas ao fato de se utilizar apenas um elemento de pórtico na análise com plasticidade concentrada, concluindo que um único elemento finito não é suficiente para capturar o comportamento não

linear de maneira tão precisa.

No entanto, deve-se mencionar ainda que a diferença das formulações dos elementos finitos e principalmente a discretização explícita das regiões de conexão, por meio de elementos finitos tipo casca, podem ter influenciado nas diferenças dos resultados obtidos em relação a aqueles obtidos com elementos finitos de pórtico.

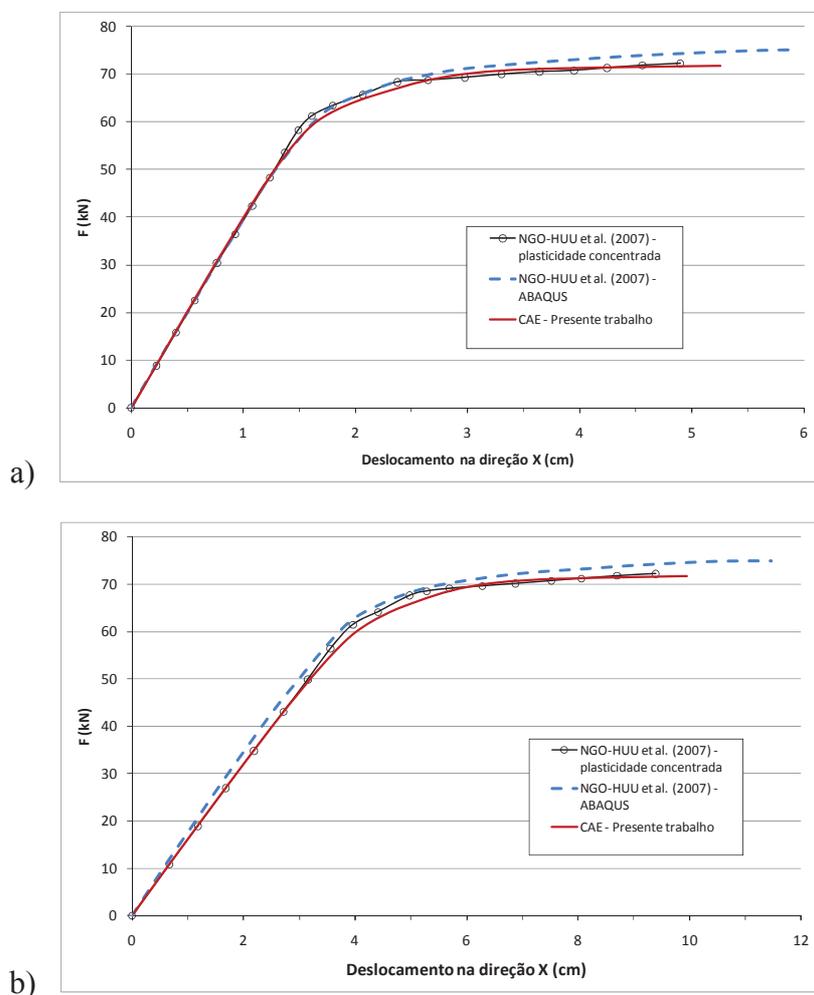


Figura 16: Curvas deslocamento x força aplicada: (a) Nível do segundo andar e (b) Nível do telhado.

#### 4.4 Pórtico tridimensional de aço com seis andares

Este exemplo consiste de pórtico de aço de seis andares cuja geometria é apresentada por meio da [Figura 17](#). Tal exemplo também foi analisado anteriormente em [LIEW et al. \(2000\)](#) utilizando o conceito de plasticidade concentrada (rótulas plásticas) e em [JIANG et al. \(2002\)](#) empregando-se o conceito de plasticidade distribuída com elementos de pórtico.

O material de todos os elementos da estrutura é um aço com resistência ao escoamento igual a 250 MPa e módulo de elasticidade é igual 206.850 MPa. A estrutura é submetida a ações horizontais e verticais atuando simultaneamente. Com relação ao carregamento vertical a estrutura é sujeita a um carregamento de piso igual a 9,6 kN/m<sup>2</sup>, o qual é convertido em forças concentradas equivalentes aplicados ao topo dos pilares de cada andar. O carregamento horizontal da estrutura é devido à ação do vento, a qual é simulado por meio de forças concentradas iguais a 53,376 kN atuando na direção Y, aplicadas em cada junção de pilar com

viga da fachada.

No que se refere à discretização da estrutura em elementos finitos, no presente trabalho cada elemento estrutural foi discretizado em 4 elementos finitos cúbicos e a seção transversal de cada elemento finito discretizada de acordo com o padrão apresentado anteriormente na Figura 8a.

A Tabela 4 apresenta os resultados referentes ao fator de carregamento  $\lambda$  no colapso obtido na análise da estrutura realizada no presente trabalho e nas referências consultadas.

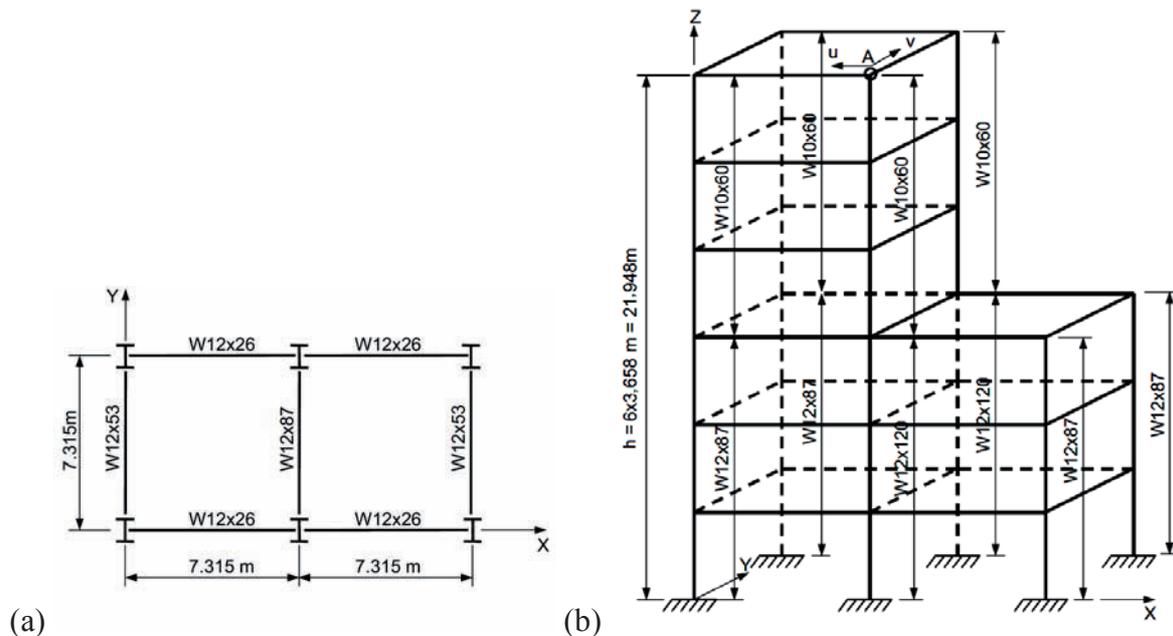


Figura 17: Pórtico tridimensional de aço com seis andares: (a) Vista em Planta e (b) Perspectiva.

REFERÊNCIA	$\lambda$
LIEW et al. (2000)	1,01
JIANG et al. (2002)	1,03
Presente trabalho	1,01

Tabela 4: Fator de carregamento  $\lambda$  no colapso.

Os resultados referentes as curva deslocamento normalizado x fator de carregamento são apresentados na Figura 18. Com relação aos resultados de JIANG et al. (2002), esses foram obtidos com uma discretização que emprega 9 elementos finitos cúbicos por elemento estrutural uma vez que, segundo esse trabalho, foi a que propiciou os resultados mais próximos daqueles apresentados em LIEW et al. (2000), utilizados como referência.

Por meio da análise dos deslocamentos apresentados na Figura 18 e dos fatores de carregamento  $\lambda$  apresentados na Tabela 4 pode-se notar que os resultados obtidos com o CAE (presente trabalho) estão bastante próximos daqueles apresentados em LIEW et al. (2000), que foram obtidos por meio do conceito de plasticidade concentrada (rótulas plásticas).

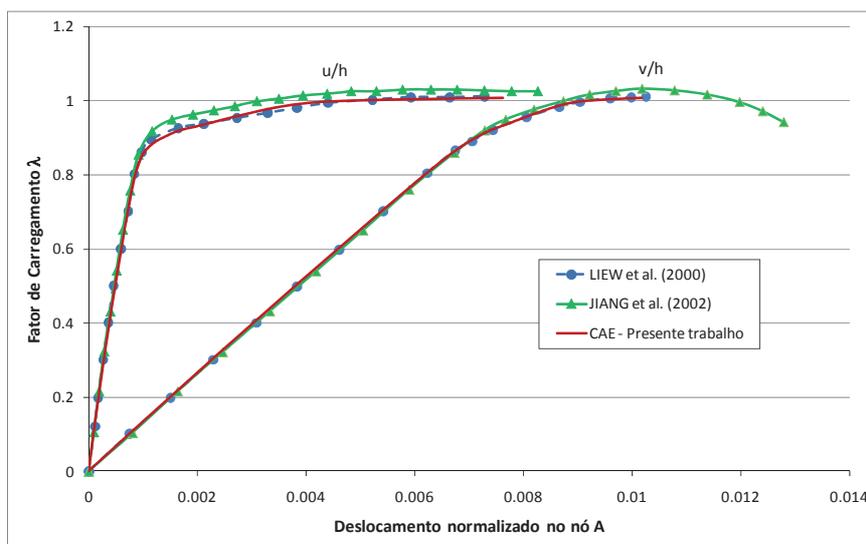


Figura 18: Deslocamentos normalizados no ponto A segundo as direções  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Assim, pode-se concluir que com apenas 4 elementos finitos cúbicos a formulação do código de cálculo utilizado no presente trabalho se mostrou bastante eficiente, principalmente quando se compara os resultados obtidos no presente trabalho em relação aqueles obtidos em [JIANG et al. \(2002\)](#), que também emprega o conceito de plasticidade distribuída. Isto porque nessa última referência foram necessários 9 elementos finitos cúbicos por elemento estrutural para obtenção da resposta do problema mais próxima daquela obtida em [LIEW et al. \(2000\)](#).

## 5 CONCLUSÕES

Neste artigo foram apresentadas análises inelásticas de estruturas aporticadas de aço com o emprego de elemento finito de pórtico laminado de formulação não linear geometricamente exata, que tem por base a posição dos nós do modelo ao invés de deslocamentos, comumente utilizados nas formulações tradicionais de elementos finitos.

Os resultados das análises efetuadas foram confrontados com resultados apresentados por outros autores, com o intuito de verificar a eficiência do código de cálculo utilizado. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios e comprovam a eficácia do elemento finito de pórtico laminado não linear e sua formulação quando aplicado em análises inelásticas de estruturas de aço aporticadas.

Por utilizar 12 graus de liberdade por nó e ser de natureza intrinsecamente não linear, o que é uma vantagem, a formulação aqui discutida tem como desvantagem um custo computacional maior que as formulações convencionais, com base em deslocamentos e giros. No entanto, é um preço adequado para a utilização de uma formulação exata, sem aproximações com relação à consideração da não linearidade geométrica, e bastante robusta.

Além disso, apesar de não explorado neste trabalho, situações em que seja importante considerar efeitos de instabilidade lateral com torção e efeitos do empenamento em análises inelásticas podem ser adequadamente modeladas com o emprego do elemento finito de pórtico aqui utilizado.

## REFERÊNCIAS

- Alvarenga, A.R., and Silveira, R.A.M, Second-order plastic-zone analysis of steel frames Part I: Numerical formulation and examples of validation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6:323 – 342, 2009.
- Avery, P., and Mahendran, M., Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures* 22:901-919, 2000.
- Botta, A.S., Paccola, R.R., Venturini, W.S., Coda, H. B., A discussion on volume change in the plastic phase. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:1149–1162, 2008.
- Chan, S.L., and Zhou, Z.H., Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. II: Three hinges along member. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 130(4):545– 553, 2004.
- Chen, W.F., Goto, Y., Liew, J.Y.R., *Stability design of semi-rigid frames*. John Wiley & Sons, 1996.
- Chiorean, C.G., Barsan, G.M., Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks. *Computers and Structures*, 83:1555–1571, 2005.
- Clarke, M.J., Bridge, R.Q., Hancock, G.J., Trahair, N.S., Australian trends in the plastic analysis and design of steel building frames. *In: Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames*. Structural Stability Ressearch Council. Lehigh University, Bethlehem, PA, 1993.
- Coda, H.B., A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:3712–3722, 2009.
- Coda, H.B., *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.
- Coda, H.B., and Paccola, R.R., Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross section. *Applied Mathematical Modelling*, 34: 1107-1137, 2010.
- Coda, H.B., and Paccola, R.R., A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5:205–223, 2008.
- Coda, H.B., Greco, M., Venturini, W.S., Gesualdo, F.A.R., Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and design*, 42(12):1031-1112, 2006.
- Dinis, P.B.; Camotim, D.; Silvestre, N. (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily ‘branched’ open crosssections. *Thin Walled Structures*, 44(1):20–38, 2006.
- European Convention for Constructional Steelwork – ECCS, *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints*. Technical Committee 8—Structural Stability Technical Working Group 8.2 – System. Publication no. 33, 1984.
- Galambos, T.V.; Ketter, R.L., *Further studies of columns under combined bending and thrust*. Fritz Engineering Laboratory Report No. 205A.19, Lehigh University, Bethlehem, 1957.
- Jiang, X.M., Chen H., Liew J.Y.R., Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*; 58(2): 193–212, 2002.
- Kim, S.-E., and Lee, D.H., Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*, 24(6):735–44, 2002.
- Liew J.Y.R., Chen, H., Shanmugam, N.E., Chen W.F. Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures. *Engineering Structures*, 22(10): 1324–38, 2000.
- Mesquita, A.D. *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo*. Tese (Doutorado) – Escola de

- Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2002.
- White, D.W. Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 24(2):121–52, 1993.
- Ngo-Huu, C., Kim, S.-E., Oh, J.R., Nonlinear analysis of space steel Frames using fiber plastic hinge concept. *Engineering Structures*, 29:649–657, 2007.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R., *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- Toma, S., Chen, W.F., European calibration frames for second-order inelastic analysis. *Engineering Structures*, 14(1):7-14, 1992.
- Vlasov, V.Z., *Thin-walled elastic beams*. 2nd edition. National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.
- Vogel, U., Calibratin Frames. *Stahlbau* 10: 295-301, 1985.
- Ziemian, R.D., Examples of frame studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. In: *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames*. Structural Stability Ressearch Council. Lehigh University, Bethlehem, PA, 1993.