

OTIMIZAÇÃO DO PERFIL I DE AÇO DE VIGAS MISTAS AÇO- CONCRETO COM INTERAÇÃO PARCIAL

Amilton R. Silva, João B. M. Sousa Junior e Francisco de A. das Neves

*Departamento de Engenharia Civil – Escola de Minas
Universidade Federal de Ouro Preto
35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil
amilton@metalicas.em.ufop.br, joao@em.ufop.br, fassis@em.ufop.br*

Palavras Chave: Otimização, Vigas Mistadas, Elemento de Interface, Deslizamento, Simplex.

Resumo: Seções mistas aço-concreto são cada vez mais frequentes na prática. A ação conjunta dos dois materiais, geralmente garantida pela presença de conectores mecânicos, aumenta consideravelmente o desempenho do elemento estrutural misto. Na maioria dos casos práticos estes elementos são formados por uma laje de concreto ligada a uma viga de aço de perfil I. Neste trabalho é apresentado um processo para a determinação das dimensões do perfil de aço do tipo I de forma que a área da seção transversal de aço seja mínima e as restrições de projeto, definidas por normas, sejam satisfeitas. A seção de concreto e suas barras de reforço são definidas pelo projetista, já as dimensões do perfil I do aço são otimizadas por meio de um processo iterativo, que aproxima o problema de busca do ponto ótimo em cada passo em um problema linear, limitando o tamanho do passo, e define o ponto ótimo para cada passo utilizando o método Simplex.

1 INTRODUÇÃO

Com a utilização cada vez mais freqüente do aço na construção civil e com a presença do concreto garantida no preenchimento das lajes, tem-se verificado na prática um crescente uso de elementos estruturais formados por seção transversal mista. Tais elementos estruturais conseguem um melhor comportamento estrutural quando comparados com os mesmos trabalhando isoladamente. A ação conjunta dos diferentes materiais que compõem a seção mista é, na maioria das vezes, garantida por meio de conectores mecânicos. Por motivos geralmente práticos ou econômicos, a interação entre os diferentes elementos estruturais que compõem o elemento misto, promovida pelos conectores, é parcial, ou seja, um deslocamento relativo entre os diferentes elementos acontece na interface de contato entre eles, o que geralmente é chamado na literatura de deslizamento na interface.

O objetivo principal deste trabalho consiste na implementação de uma rotina de otimização dentro de um programa de elementos finitos. Para simular o comportamento de vigas mistas com interação parcial são utilizados elementos de viga para representar o comportamento dos materiais acima e abaixo da interface de deslizamento da seção mista, e elementos de interface para representar o comportamento da interface de deslizamento. As variáveis de projetos são as dimensões do perfil I de aço, já as dimensões da seção de concreto e as barras de reforço são definidas pelo projetista. Através de um processo iterativo, controlando o tamanho do passo a cada iteração, o problema não linear de variação do comportamento estrutural da viga mista em relação às dimensões do perfil I de aço é aproximado por um problema linear, o qual tem seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 é apresentado o método Simplex que será utilizado em cada passo do processo iterativo na solução de um problema linear restrito. Na Seção 3 o algoritmo Simplex implementado é verificado usando um exemplo simples com solução conhecida. Na Seção 4 são apresentadas as restrições de projeto para análise de viga mista com interação parcial. Na Seção 5 é apresentada a função objetivo e o problema analisado é colocado na forma padrão do Simplex. Na Seção 6 é analisado um exemplo de viga mista para diferentes restrições da altura do perfil de aço, e por último, na Seção 7, algumas conclusões são citadas.

2 O MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex foi desenvolvido por Dantzig no final da década de 40 e marca o início da era moderna na otimização. Com o desenvolvimento, logo em seguida, dos computadores digitais este método se consolidou e firmou como uma poderosa ferramenta de otimização no campo da economia, administração e engenharia. De forma sucinta é apresentado abaixo o problema de programação linear e o algoritmo Simplex para solução deste.

Na programação linear tanto a função objetivo como as restrições de igualdade ou desigualdade são lineares. O conjunto de pontos viáveis forma um poliedro, o qual é convexo e tem suas faces dadas por polígonos. A programação linear é iniciada e analisada na sua forma padrão,

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1)$$

onde \mathbf{c} e \mathbf{x} são vetores em \mathfrak{R}^n , \mathbf{b} é um vetor em \mathfrak{R}^m e \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$. Todo problema de otimização linear com restrições de igualdade e desigualdade pode ser facilmente colocado na forma padrão dada pela Eq. (1). Para maiores detalhes de como fazer isto para as diferentes formas da programação linear, consultar Nocedal e Wright (2006); Vanderplaats (1984); Haftka e Kamat (1985).

Usando o método de Lagrange o problema (1) pode ser colocado na forma dada pela Eq. (2), onde os multiplicadores de Lagrange foram separados em um vetor $\boldsymbol{\pi}$ de ordem m , para as restrições de igualdade, e um vetor \mathbf{s} de ordem n , para as restrições de desigualdade.

$$\mathfrak{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{s}^T \mathbf{x} \quad (2)$$

A linearidade do problema (1) e sua convexidade garantem que se um ponto viável \mathbf{x}^* satisfaz a condição de otimalidade de primeira ordem de KKT (Karush, Kuhn e Tucker, veja Bazaraa e Shetty (1993)), dada pela Eq. (3), então este ponto é um ponto de ótimo do problema (1).

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \quad (3-a)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3-b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3-c)$$

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad (3-d)$$

$$x_i s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3-e)$$

Se \mathbf{x}^* satisfaz a condição de (3-a), então

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^*)^T \mathbf{x}^* = (\mathbf{A}\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^{*T} \mathbf{x}^*,$$

da condição (3-b) tem-se $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$, das condições (3-c,d) e (e) tem-se $\mathbf{s}^{*T} \mathbf{x}^* = 0$, portanto $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^*$.

Do resultado do parágrafo anterior é fácil ver que qualquer outro ponto viável $\bar{\mathbf{x}}$, ou seja, $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, satisfaz $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. Isto porque

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^*)^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^{*T} \bar{\mathbf{x}},$$

como $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$, e das condições (3-c) a (3-e) tem-se $\mathbf{s}^{*T} \bar{\mathbf{x}} \geq 0$, logo $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. Portanto, o ponto $\bar{\mathbf{x}}$ será ótimo se e somente se $\mathbf{s}^{*T} \bar{\mathbf{x}} = 0$, o que significa que para os valores de $s_i \geq 0$ deve-se necessariamente ter $\bar{x}_i = 0$.

Considerando que a matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ tem posto linha completo, ou seja, igual a m , e que podemos definir um subconjunto $\beta(\mathbf{x})$ do conjunto de índice $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que,

(i) $\beta(\mathbf{x})$ contém exatamente m índices.

(ii) $i \in \beta(\mathbf{x})$ implica em $x_i = 0$.

(iii) A matriz $\mathbf{B}_{m \times m}$, definida por $\mathbf{B} = [A_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}$, é não singular onde A_i é a i ésima coluna de \mathbf{A} .

Se todas as condições acima são satisfeitas para um ponto de projeto \mathbf{x} , então tal ponto é dito ser um ponto viável básico. O método Simplex gera em seu processo iterativo uma seqüência de pontos viáveis básicos, parando quando um destes pontos satisfizer as condições dadas pela Eq. (3-a) a (3-e), o qual será o ponto de ótimo do problema linear da Eq. (1). Este ponto pode ser único, ou seja, um vértice do poliedro, ou mais de um vértice do poliedro. No caso de mais de um vértice do poliedro ser ponto de ótimo tem-se que, qualquer ponto na reta, ou plano, que liga tais vértices do poliedro serão também ponto de ótimo.

Nas iterações do Simplex é avaliado se o ponto viável básico, que é um vértice do poliedro, satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT. Caso satisfaça, então tal ponto será o ponto de solução do problema (1); caso contrário, um novo ponto viável básico,

ou seja, outro vértice do poliedro, deve ser avaliado. Tal ponto é obtido definindo um novo subconjunto $\beta(\mathbf{x})$ do conjunto de índice $\{1, 2, \dots, n\}$.

Para entender qual índice em $\beta(\mathbf{x})$ deve sair e qual deve entrar, para definir outro ponto viável básico em uma iteração do Simplex, vamos definir o subconjunto $\eta(\mathbf{x})$ do conjunto de índice $\{1, 2, \dots, n\}$, como sendo o complemento de $\beta(\mathbf{x})$. E da mesma forma que foi definida \mathbf{B} vamos definir \mathbf{N} como

$$\mathbf{N} = [A_i]_{i \in \eta(\mathbf{x})}.$$

Separando os vetores \mathbf{x} , \mathbf{s} e \mathbf{c} de acordo com os subconjuntos $\beta(\mathbf{x})$ e $\eta(\mathbf{x})$, denotando por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= [x_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}, & \mathbf{x}_N &= [x_i]_{i \in \eta(\mathbf{x})}, \\ \mathbf{s}_B &= [s_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}, & \mathbf{s}_N &= [s_i]_{i \in \eta(\mathbf{x})}, \\ \mathbf{c}_B &= [c_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})} & e & \mathbf{c}_N = [c_i]_{i \in \eta(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Da condição (3-b), tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad (4)$$

Admitindo $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, tem-se, da Eq. (4), $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Para satisfazer a condição (3-e) pode-se fixar $\mathbf{s}_B = \mathbf{0}$. Da condição (3-a) pode-se definir $\boldsymbol{\pi}$ e \mathbf{s}_N , dados por $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}_B$ e $\mathbf{N}^T \boldsymbol{\pi} + \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N$, ou seja,

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{B}^{T-1} \mathbf{c}_B \quad e \quad (5)$$

$$\mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})^T \mathbf{c}_B \quad (6)$$

Se \mathbf{s}_N , definido pela Eq. (6), satisfazer $s_{N_i} \geq 0$ para todo $i \in \eta(\mathbf{x})$, então o ponto viável básico avaliado é solução do problema da Eq. (1). Caso contrário, ou seja, um ou mais componentes de s_{N_i} seja negativa, então um novo ponto deve ser avaliado. O índice q em $\eta(\mathbf{x})$ que deve substituir o índice p em $\beta(\mathbf{x})$ é tal que $s_{N_q} < 0$, já o índice p deve ser o menor entre

$$\frac{x_{B_i}}{t_i} \quad (7)$$

para $t_i > 0$ e $i \in \beta(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{t} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$.

3 EXEMPLO VERIFICANDO O ALGORITMO SIMPLEX IMPLEMENTADO

Para verificar o algoritmo Simplex implementado neste trabalho, o problema de duas variáveis de projeto e ponto ótimo conhecido da Eq. (8) foi avaliado.

$$\min_{(x_1, x_2)} (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{sujeito a } x_1^2 + x_2^2 \geq x_2 + 2 \quad (8)$$

O problema da Eq. (8) consiste em determinar o ponto na superfície do parabolóide $z = x_1^2 + x_2^2$ que seja mínimo e esteja acima ou no plano $z = x_2 + 2$. Como se sabe o

parabolóide tem ponto de mínimo em $x_1 = x_2 = 0$ que está abaixo do plano de restrição, portanto, o ponto de mínimo estará na interseção do plano de restrição com o parabolóide, ou seja,

$$x_1^2 + x_2^2 = x_2 + 2 \tag{9}$$

Completando o quadrado em relação a x_2 na Eq. (9), tem-se

$$x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \tag{10}$$

A expressão (10) é a equação de um círculo de centro $(0, 1/2)$ e raio $3/2$. O ponto de mínimo do problema (8) será o ponto neste círculo que tangencia a curva de nível mais baixa do parabolóide, como pode ser visto na Fig. 1.

Para resolver o problema da Eq. (8) usando o método Simplex deve-se linearizá-lo. Para isto é preciso implementar um processo iterativo que limita o tamanho de cada passo, e então aproximar a Eq. (8) usando a sua expansão em série de Taylor truncada no primeiro termo, ou seja,

$$z(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = z(\mathbf{x}_k) + \nabla^T \mathbf{z}_k \mathbf{d} \tag{11}$$

Para a restrição $C(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 - 2 \geq 0$, tem-se

$$C(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = C(\mathbf{x}_k) + \nabla^T \mathbf{C}_k \mathbf{d} \tag{12}$$

O problema da equação (8) pode então ser escrito na forma

$$\min_{\mathbf{d}} (z(\mathbf{x}_k + \mathbf{d})) \text{ sujeito a } C(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \geq 0, \tag{13}$$

ou, como $z(\mathbf{x}_k)$ é constante em relação ao passo \mathbf{d} , da forma

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T \mathbf{z}_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T \mathbf{C}_k \mathbf{d} \geq -C(\mathbf{x}_k). \tag{14}$$

Colocando o problema linear da Eq. (14) na forma padrão do método Simplex, tem-se

$$\min_{\mathbf{d}^*} [\nabla^T \mathbf{z}_k \quad -\nabla^T \mathbf{z}_k \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{d}^* \tag{15}$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} \nabla^T \mathbf{C}_k & -\nabla^T \mathbf{C}_k & -1 & 0 & 0 \\ \nabla^T \mathbf{z}_k & -\nabla^T \mathbf{z}_k & 0 & -1 & 0 \\ -\nabla^T \mathbf{z}_k & \nabla^T \mathbf{z}_k & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} -C(\mathbf{x}_k) \\ -\bar{d} \\ -\bar{d} \end{bmatrix}$$

Na Eq. (15), $\mathbf{d}^* = [\mathbf{d}^+ \quad \mathbf{d}^- \quad z \quad w \quad u]$. Para maiores detalhes de como chegar nesta forma padrão consultar Vanderplaats (1984); Haftka e Kamat (1985). Duas restrições, dadas por $\nabla^T \mathbf{z}_k \mathbf{d} \leq |\bar{d}|$, foi inserida na forma padrão, dada pela Eq. (15), para limitar o tamanho de \mathbf{d} durante as restrições.

A Fig. 1 mostra curvas de nível do parabolóide no plano $x_1 x_2$, e a evolução do método Simplex implementado a partir de diferentes pontos iniciais dados. Da figura pode-se observar que o ponto que corresponde à solução do problema (8) é aquele que tem a curva de nível mais baixa tangenciando o círculo da Eq. (10), ou seja, $(0, -1)$. Também da figura verifica-se que para todos os diferentes pontos iniciais o algoritmo Simplex implementado convergiu para a solução do problema.

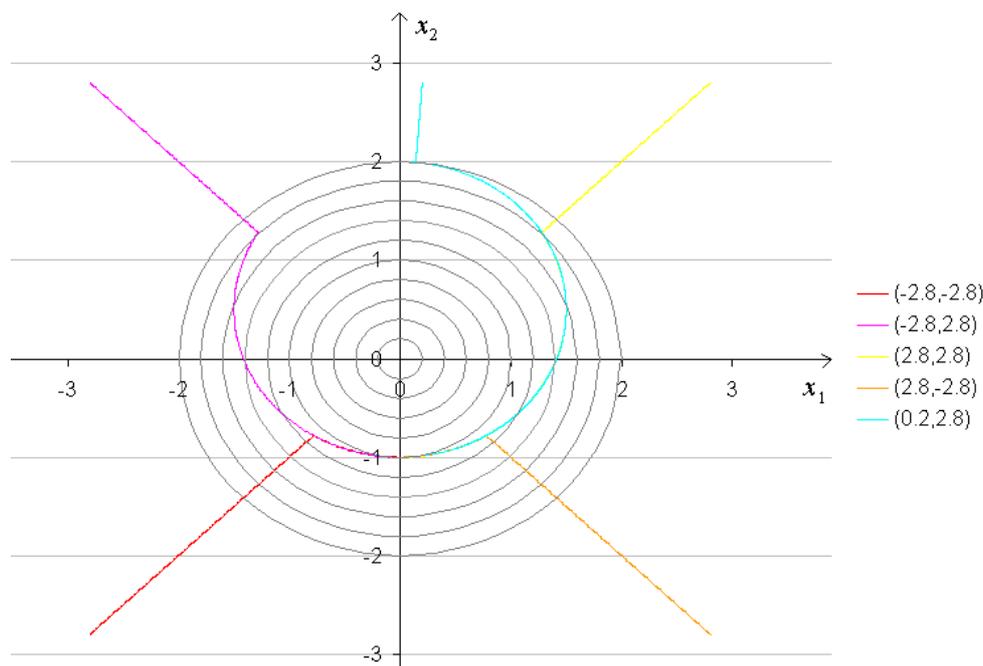


Figura 1: Trajetórias de busca do ponto ótimo a partir de diferentes pontos iniciais

4 RESTRIÇÕES NO PROBLEMA DE VIGA MISTA

As restrições do problema são dadas por critérios de dimensionamento adotados por normas para garantir a segurança e utilização da estrutura. Para o caso de viga mista aço-concreto com interação parcial, veja Sousa Jr. e Silva (2007), serão considerados os critérios de segurança de tensão máxima de compressão no concreto, tensão máxima nas barras de reforço na seção de concreto, tensão máxima no perfil de aço, força máxima nos conectores, flambagem local da alma e da mesa do perfil de aço, e como critério de utilização flecha máxima no vão da viga. Além destas restrições, outras em relação às dimensões do perfil e do tamanho do passo do processo iterativo devem ser consideradas.

4.1 Tensão na seção de concreto e barras de reforço

A seção mista é formada por uma laje de concreto com barras de reforço ligadas a um perfil I de aço. Na discretização do problema de viga mista com interação parcial, elementos de vigas são usados para simular o comportamento das seções de concreto e do perfil de aço. Sendo assim, para determinar a tensão máxima de compressão na seção de concreto e as tensões nas barras de reforço ao longo da viga mista, deve-se percorrer todos os elementos de viga que representam a seção de concreto.

Assumindo uma relação tensão-deformação linear para os materiais da seção mista, tem-se

$$\sigma(\xi, y) = E_c (u_0' - y\chi) = E_c \left[\phi_u' - y\phi_v'' \right] \mathbf{q} \quad (16)$$

Na Eq. (16), E_c é o módulo de deformação do concreto. ϕ_u e ϕ_v são funções de forma para os deslocamentos axiais (interpolação linear) e transversais/rotações (interpolação cúbica), respectivamente. $\mathbf{q} = [u_1 \ u_2 \ v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento de viga.

Como na Eq. (16) ϕ_u' é constante e ϕ_v'' é linear ao longo do elemento, então $\sigma(\xi, y)$ é máxima e mínima nos extremos do elemento, ou seja,

$$\sigma(\xi = -1, y) = E_c [\phi_u'^T(\xi = -1) - y\phi_v''^T(\xi = -1)] \mathbf{q} \quad (17)$$

$$\sigma(\xi = 1, y) = E_c [\phi_u'^T(\xi = 1) - y\phi_v''^T(\xi = 1)] \mathbf{q} \quad (18)$$

Deve-se lembrar que nas expressões (17) e (18) as derivadas são em relação a variável x global e as funções de forma estão definidas em relação à variável local ξ do elemento.

Sendo h a altura da laje de concreto, $\sigma_1 = \sigma(\xi = -1, -h/2)$, $\sigma_2 = \sigma(\xi = -1, h/2)$, $\sigma_3 = \sigma(\xi = 1, -h/2)$ e $\sigma_4 = \sigma(\xi = 1, h/2)$, determina-se

$$\sigma_{1,\max} = \text{maior entre } \sigma_j \text{ com } j = 1, \dots, 4. \quad (19)$$

$$\sigma_{2,\min} = \text{menor entre } \sigma_j \text{ com } j = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

Para cada tensão definidas nas expressões (19) e (20) determina-se a tensão na outra face da seção retangular de concreto dadas por $\sigma_{1,\min}$ e $\sigma_{2,\max}$. A tensão máxima de compressão no concreto (σ_c) no elemento analisado é dada por $\sigma_{2,\min}$, se $\sigma_{2,\min} < 0$, caso contrário a tensão de compressão será nula. Já a tensão máxima nas barras de reforço (σ_{s_b}) é obtida de acordo com um dos três casos abaixo, os quais são verificados para cada par de tensões, ($\sigma_{1,\max}, \sigma_{1,\min}$) e ($\sigma_{2,\max}, \sigma_{2,\min}$):

Caso 1: $\sigma_{1,\max} > 0$ e $\sigma_{1,\min} < 0$

Da Fig. 2, determina-se

$$h' = \frac{\sigma_{1,\max}}{\sigma_{1,\max} - \sigma_{1,\min}} h \quad (21)$$

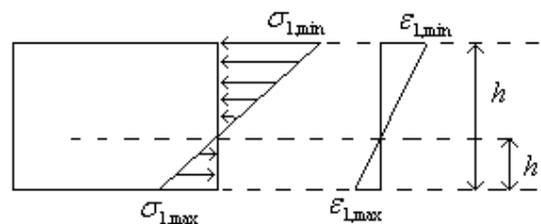


Figura 2: tensões atuantes na seção de concreto

Devido à condição de análise linear física do problema a seção de concreto resiste a força de tração dada por

$$F_t = \frac{\sigma_{1,\max}}{2} h' b \quad (22)$$

Na Eq. (22), b é largura da seção retangular de concreto. Como é desprezada a resistência do concreto à tração, a força dada pela Eq. (22) deve ser resistida pelas barras de reforço.

Na Fig. 3, c é a cobertura das barras de reforço. Da condição de equilíbrio de momentos em relação a B , tem-se

$$F_A = \frac{h - c - h'/3}{h - 2c} F_t \quad (23)$$

Da condição de equilíbrio das forças horizontais, tem-se

$$F_B = F_t - F_A \quad (24)$$

As tensões nas barras devido à deformação da seção são dadas por

$$\sigma_A = E_s \varepsilon_A \text{ onde } \varepsilon_A = \frac{h'-c}{h'} \varepsilon_{1,\max} \text{ e} \quad (25)$$

$$\sigma_B = E_s \varepsilon_B \text{ onde } \varepsilon_B = \frac{h''-c}{h''} \varepsilon_{1,\min}. \quad (26)$$

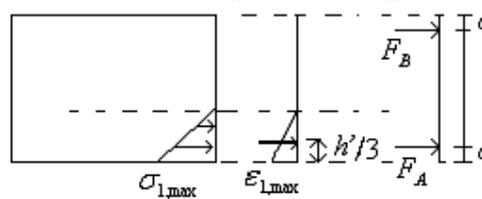


Figura 3: Tensão de tração na seção de concreto

Na Eq. (26), $h'' = h - h'$. A tensão máxima nas barras de reforço (σ_{s_b}) no elemento analisado é dada pelo maior valor entre $\left| \frac{F_A}{A} + \sigma_B \right|$ e $\left| \frac{F_B}{A} + \sigma_A \right|$, onde A é a área da seção transversal das barras de reforço.

Caso 2: $\sigma_{1,\max} > 0$ e $\sigma_{1,\min} > 0$

Como $\sigma_{1,\min} > 0$ então toda a seção de concreto está tracionada, como mostra a Fig. 4.

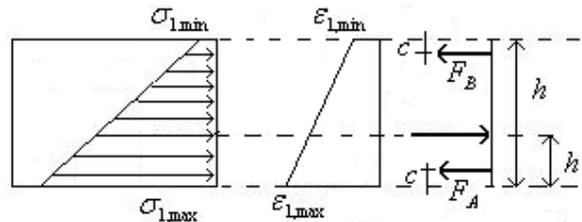


Figura 4: Tensões atuantes na seção de concreto

Na Fig. 4, c é a cobertura das barras de reforço da seção de concreto. Desta figura determina-se

$$h' = \left(1 + \frac{\sigma_{1,\min}}{\sigma_{1,\max} + \sigma_{1,\min}} \right) \frac{h}{3} \quad (27)$$

A força de tração atuante na seção de concreto é dada por

$$F_t = \frac{\sigma_{1,\max} + \sigma_{1,\min}}{2} hb \quad (28)$$

Na Eq. (28), b é largura da seção retangular de concreto. Como é desprezada a resistência do concreto à tração, a força dada pela Eq. (28) deve ser resistida pelas barras de reforço.

Da condição de equilíbrio de momentos em relação a B , ver Fig. 4, tem-se

$$F_A = \frac{h - c - h'}{h - 2c} F_t \quad (29)$$

Da condição de equilíbrio das forças horizontais, tem-se

$$F_B = F_t - F_A \quad (30)$$

As tensões nas barras devido à deformação da seção são dadas por

$$\sigma_A = E_s \varepsilon_A \text{ onde } \varepsilon_A = (\varepsilon_{1,\min} - \varepsilon_{1,\max}) \frac{c}{h} + \varepsilon_{1,\max} \text{ e} \quad (31)$$

$$\sigma_B = E_s \varepsilon_B \text{ onde } \varepsilon_B = (\varepsilon_{1,\min} - \varepsilon_{1,\max}) \frac{h - c}{h} + \varepsilon_{1,\max}. \quad (32)$$

A tensão máxima nas barras de reforço (σ_{S_b}) no elemento analisado é dada pelo maior valor entre $\left| \frac{F_A}{A} + \sigma_A \right|$ e $\left| \frac{F_B}{A} + \sigma_B \right|$, onde A é a área da seção transversal das barras de reforço.

Caso 3: $\sigma_{1,\max} < 0$ e, portanto, $\sigma_{1,\min} < 0$

Como $\sigma_{1,\max} < 0$ então toda a seção de concreto está comprimida, como mostra a Fig. 5.

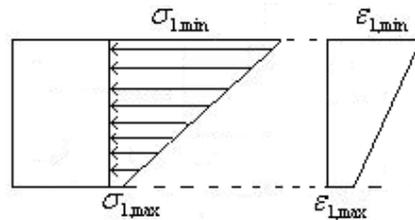


Figura 5: Tensões atuantes na seção de concreto

Como a seção está toda comprimida as tensões atuantes nas barras dependem apenas das deformações nestas, portanto,

$$\sigma_A = E_s \varepsilon_A \text{ onde } \varepsilon_A = (\varepsilon_{1,\min} - \varepsilon_{1,\max}) \frac{c}{h} + \varepsilon_{1,\max} \text{ e} \quad (33)$$

$$\sigma_B = E_s \varepsilon_B \text{ onde } \varepsilon_B = (\varepsilon_{1,\min} - \varepsilon_{1,\max}) \frac{h - c}{h} + \varepsilon_{1,\max} \quad (34)$$

A tensão máxima nas barras de reforço (σ_{S_b}) no elemento analisado é dada pelo maior valor entre $|\sigma_A|$ e $|\sigma_B|$.

A tensão limite de resistência à compressão do concreto ($\overline{\sigma_c}$) é dada por $\overline{\sigma_c} = 0.85 f_{cd}$.

Neste trabalho é adotado $f_{ck} = 30MPa$, $E_c = 0.85(5600\sqrt{f_{ck}})$ e $f_{cd} = f_{ck} / 1.4$. Já para as barras de reforço é adotado $E_s = 210000MPa$, $f_{yk} = 500MPa$ e $f_{yd} = f_{yk} / 1.15$. Portanto, a tensão limite de resistência à compressão ou tração das barras de reforço ($\overline{\sigma_{S_b}}$) é dada por $\overline{\sigma_{S_b}} = f_{yd}$.

As expressões para essas duas restrições são definidas da forma dada abaixo.

$$C_1(\mathbf{x}) = \sigma_c - \overline{\sigma_c} \geq 0 \text{ e}$$

$$C_2(\mathbf{x}) = \overline{\sigma_{s_b}} - \sigma_{s_b} \geq 0.$$

4.2 Tensão na seção de aço

De forma análoga a que foi obtida a tensão máxima de compressão na seção de concreto, determina-se a tensão máxima na seção de aço (σ_s).

$$\sigma(\xi, y) = E_s (u_0' - y\chi) = E_s [\phi_u'^T - y\phi_v''^T] \mathbf{q} \quad (35)$$

Na Eq. (35), E_s é o módulo de deformação do aço e os demais são como definidos na Eq. (16).

Como na Eq. (35) ϕ_u' é constante e ϕ_v'' é linear ao longo do elemento, então $\sigma(\xi, y)$ é máxima e mínima nos extremos do elemento, ou seja,

$$\sigma(\xi = -1, y) = E_s [\phi_u'^T (\xi = -1) - y\phi_v''^T (\xi = -1)] \mathbf{q} \text{ e} \quad (36)$$

$$\sigma(\xi = 1, y) = E_s [\phi_u'^T (\xi = 1) - y\phi_v''^T (\xi = 1)] \mathbf{q}. \quad (37)$$

Deve-se lembrar que nas Eq. (36) e (37) as derivadas são em relação a variável x global e as funções de forma estão definidas em relação à variável local ξ do elemento. Sendo h a altura total do perfil I do aço, $\sigma_1 = \sigma(\xi = -1, -h/2)$, $\sigma_2 = \sigma(\xi = -1, h/2)$, $\sigma_3 = \sigma(\xi = 1, -h/2)$ e $\sigma_4 = \sigma(\xi = 1, h/2)$, determina-se

$$\sigma_{\max} = \text{maior entre } \sigma_j \text{ com } j = 1, \dots, 4 \text{ e} \quad (38)$$

$$\sigma_{\min} = \text{menor entre } \sigma_j \text{ com } j = 1, \dots, 4 \quad (39).$$

A tensão máxima no perfil de aço (σ_s) será o maior valor entre $|\sigma_{\max}|$ e $|\sigma_{\min}|$.

Neste trabalho é adotado para o aço do perfil I, $E_s = 210000 \text{ MPa}$, $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ e $f_{yd} = f_{yk} / 1.15$. Portanto, a tensão limite de resistência à compressão ou tração para o perfil ($\overline{\sigma_s}$) é dada por $\overline{\sigma_s} = f_{yd}$.

A expressão para esta restrição será definida como dada abaixo.

$$C_3(\mathbf{x}) = \overline{\sigma_s} - \sigma_s \geq 0.$$

4.3 Força máxima nos conectores

A Fig. 6 mostra um elemento de viga mista e as forças resultantes atuantes neste. Da condição de equilíbrio das forças horizontais, tem-se

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (40)$$

Na Eq. (40), F_i são as forças em cada conector devidas um deslizamento s entre as seções de concreto e aço. Segundo Oehlers e Coughlan (1986), um conector tipo pino com cabeça tem um comportamento linear até 50% de sua força máxima resistida. Os mesmos autores relacionam o módulo de rigidez do conector com a força máxima que este resiste (F_{\max}), o

diámetro de sua base (d_c) e a resistência à compressão do concreto (f_c) no qual está envolvido, como é mostrado na Eq. (41).

$$K_c = \frac{F_{\max}}{d_c(0.16 - 0.00172f_c)} \quad (41)$$

Na Eq. (41), as dimensões são em N e mm. $F_{\max} = 0.5A_{sh}\sqrt{f_c E_c}$, onde A_{sh} é a área da seção transversal da base do conector.

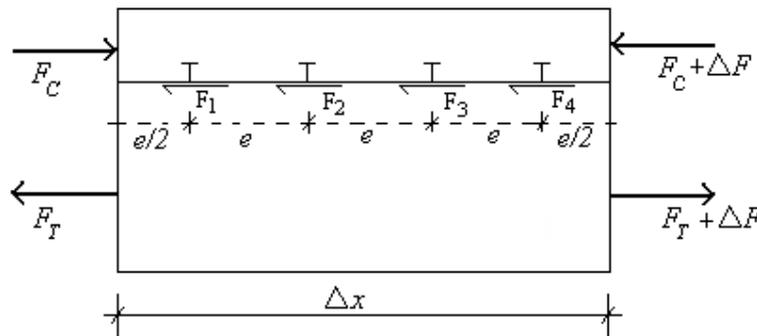


Figura 6: Forças atuantes em um elemento de viga mista

Admitindo que o deslizamento seja o mesmo ao longo do elemento da Fig. 6 e que os conectores sejam todos iguais, tem-se

$$\Delta F = nK_c s \quad (42)$$

Definindo $K = nK_c / \Delta x$ e substituindo na equação (42), tem-se

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = Ks, \text{ ou} \quad (43)$$

para Δx pequeno $F' = Ks$. Se o espaçamento entre os conectores for constante em Δx e valer e , tem-se, $ne = \Delta x$, e, portanto,

$$K = K_c / e \quad (44)$$

O projeto de revisão da norma NBR-8800 (2008) limita o espaçamento entre conectores em seis vezes o diâmetro do conector, adotando conector de diâmetro de 19mm, tem-se $e_{\min} = 11.4$ cm. Determinando K_c , usando a Eq. (41), obtém-se, da Eq. (44), a rigidez máxima permitida na interface de deslizamento. Esta rigidez foi utilizada na análise numérica da viga mista.

A força máxima atuante em um conector, devido a deformação da viga mista, deve ser calculada a nível de elemento através da integral da expressão $F' = Ks$, onde os limites de integração deve ser espaçados de acordo com o espaçamento entre os conectores, sendo assim

$$F_1 = \int_{-1}^{-1+e} Ks dx, \quad F_2 = \int_{-1+e}^{-1+2e} Ks dx, \quad \dots, \quad F_n = \int_{1-e}^1 Ks dx.$$

A força máxima atuante (F_s) será o maior valor entre $|F_1|, |F_2|, \dots, |F_n|$.

Segundo NBR-8800 (2008) a força máxima resistida por um conector (\overline{F}_s) deve ser o menor dos dois valores

$$\overline{F}_s = \frac{0.5A_{cs}\sqrt{f_{ck}E_c}}{\gamma_{cs}}, \quad (45)$$

$$\overline{F}_s = \frac{A_{cs}f_u}{\gamma_{cs}} \quad (46)$$

Nas Eq. (45) e (46), A_{cs} é a área da seção transversal do conector, f_u é a tensão de resistência à ruptura do conector e $\gamma_{cs} = 1.25$.

A expressão da restrição será então definida da forma abaixo.

$$C_4(\mathbf{x}) = \overline{F}_s - F_s \geq 0.$$

4.4 Flecha máxima

A equação do deslocamento transversal em um elemento é dada por

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \phi_v^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (47)$$

onde $\mathbf{q} = [u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento de viga, e ϕ_v é um vetor de funções de forma para os deslocamentos transversais/rotações. Como é adotada interpolação cúbica para estes deslocamentos, tem-se que o deslocamento máximo (v_{\max}) estará em um dos extremos do elemento ($\xi = -1$ ou $\xi = 1$) ou em algum ponto de derivada nula ($v'(\xi) = 0$) dentro do elemento, que pode ser dois, um, ou nenhum.

Neste trabalho é adotado uma deformação transversal limite (\overline{v}) de $L/350$, onde L é o comprimento do vão da viga.

A expressão da restrição será então definida da forma dada abaixo.

$$C_5(\mathbf{x}) = \overline{v} - v_{\max} \geq 0.$$

4.5 Flambagem local no perfil de aço

Segundo o projeto de revisão da norma NBR-8800 (2008) o índice limite de esbeltez da mesa de perfil I é

$$\lambda_f = 1.40 \sqrt{\frac{E_s}{f_y}}.$$

Para os casos de mesas onde seu índice de esbeltez dado por t_f/b_f , onde t_f é a espessura da mesa e b_f a sua largura, é menor ou igual a λ_f , o efeito de flambagem local pode ser desprezado. Já o índice limite de esbeltez da alma do perfil I é, segundo NBR-8800 (2008),

$$\lambda_w = 1.49 \sqrt{\frac{E_s}{f_y}}.$$

Para os casos de almas onde seu índice de esbeltez dado por t_w/b_w , onde t_w é a espessura da alma e b_w a sua altura, é menor ou igual a λ_w , o efeito de flambagem local pode ser desprezado.

As expressões das restrições serão então definidas da forma dada abaixo.

$$C_6(\mathbf{x}) = b_f - \lambda_f t_f \leq 0,$$

$$C_7(\mathbf{x}) = b_w - \lambda_w t_w \leq 0.$$

4.6 Dimensões do perfil

Serão adotadas neste trabalho restrições em relação à altura do perfil I de aço e as espessuras das mesas e almas.

Definindo \bar{h} como a altura limite do perfil I, \bar{t}_i e \bar{t}_s como a menor e maior espessura possível, respectivamente. As expressões das restrições podem ser então definidas da forma abaixo.

$$C_8(\mathbf{x}) = \bar{h} - (2t_f + b_w) \geq 0,$$

$$C_9(\mathbf{x}) = t_w - \bar{t}_i \geq 0,$$

$$C_{10}(\mathbf{x}) = \bar{t}_s - t_w \geq 0,$$

$$C_{11}(\mathbf{x}) = t_f - \bar{t}_i \geq 0,$$

$$C_{12}(\mathbf{x}) = \bar{t}_s - t_f \geq 0.$$

4.7 Tamanho do passo iterativo

Como o método Simplex é linear, o problema de determinação das dimensões ótima do perfil I de aço de uma viga mista deve ser linearizado truncando a sua expansão em série de Taylor no primeiro termo.

Adotando como tamanho limite do passo o valor \bar{d} e chamando de f a função que se deseja minimizar, tem-se

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d}$$

e, portanto, $\nabla^T f_k \mathbf{d} \leq |\bar{d}|$ limita o tamanho do passo.

5 FUNÇÃO OBJETIVO E FORMA PADRÃO DO MÉTODO SIMPLEX PARA O PROBLEMA ANALISADO

O problema que se deseja avaliar é a determinação das dimensões do perfil de aço de uma viga mista aço-concreto com interação parcial, de forma que a área da seção transversal da viga de aço seja mínima possível. Portanto, de acordo com a Fig. 7, a função objetivo pode ser definida da forma

$$f(\mathbf{x}) = 2b_f t_f + b_w t_w, \quad (48)$$

onde o vetor \mathbf{x} é dado por $\mathbf{x} = [b_f \quad t_f \quad t_w \quad b_w]$.

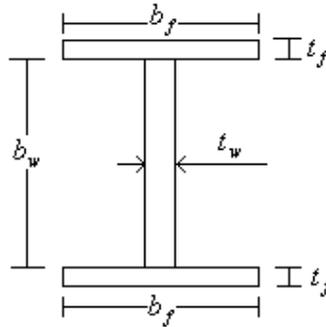


Figura 7: Perfil de aço

O problema de otimização será dado por

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (49)$$

A expansão em série de Taylor, truncada no primeiro termo, para a função objetivo e as restrições são dadas por

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d} \text{ e} \quad (50)$$

$$C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = C_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T C_{i,k} \mathbf{d} \text{ com } i = 1, \dots, 12 \quad (51)$$

O problema da Eq. (49) pode então ser escrito na forma

$$\min_{\mathbf{d}} (f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d})) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \geq 0 \text{ e } \nabla^T f_k \mathbf{d} \leq \overline{d}, \quad (52)$$

ou, como $f(\mathbf{x}_k)$ é constante em relação ao passo \mathbf{d} , da forma

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T f_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_{i,k} \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \text{ e } \nabla^T f_k \mathbf{d} \leq \overline{d}. \quad (53)$$

Colocando o problema linear da Eq. (53) na forma padrão do método Simplex, tem-se

$$\min_{\mathbf{d}^*} [\nabla^T f_k \quad -\nabla^T f_k \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{d}^* \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \nabla^T C_{i,k} & -\nabla^T C_{i,k} & -\mathbf{I}_{12} & \mathbf{0} \\ -\nabla^T C_{i,k} & \nabla^T C_{i,k} & -\mathbf{I}_{12} & \mathbf{0} \\ \nabla^T f_k & -\nabla^T f_k & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 \\ -\nabla^T f_k & \nabla^T f_k & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} -C_i(\mathbf{x}_k) \\ C_i(\mathbf{x}_k) \\ -\overline{d} \\ -\overline{d} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Na Eq. (54), $\mathbf{d}^* = [\mathbf{d}^{+T} \quad \mathbf{d}^{-T} \quad \mathbf{u}^T \quad \mathbf{w}^T]^T$, onde \mathbf{d}^+ e \mathbf{d}^- são dois vetores com 4 componentes (número de variáveis de projeto), \mathbf{u} é um vetor com 12 componentes (número de restrições), \mathbf{w} é um vetor com 2 componentes (referente a restrição de tamanho do passo), \mathbf{I}_{12} é uma matriz identidade 12x12 e \mathbf{I}_2 é uma matriz identidade 2x2. Para maiores detalhes de como chegar nesta forma padrão consultar Vanderplaats (1984); Haftka e Kamat (1985).

As derivadas em relação à função objetivo e as restrições $C_i(\mathbf{x})$ com $i = 5, \dots, 12$ são obtidas de forma analítica derivando estas expressões em relação a $x_0 = b_f$, $x_1 = t_f$, $x_2 = t_w$ e $x_3 = b_w$. Já as derivadas $C_i(\mathbf{x})$ com $i = 1, \dots, 4$ são obtidas de forma semi-analíticas de acordo com o método abaixo.

As restrições $C_i(\mathbf{x})$, com $i = 1, \dots, 4$, dependem de \mathbf{q} que depende de \mathbf{x} ; sendo assim, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial C_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \quad (55)$$

Para a primeira restrição, tem-se

$$\frac{\partial C_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} = - \left(\frac{\partial \sigma_c}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \quad (56)$$

Da condição de equilíbrio entre força interna e externas atuantes nos elementos, tem-se

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext} \quad (57)$$

Considerando forças externas constantes em relação às variáveis de projeto e derivando a Eq. (57) em relação à \mathbf{x} , tem-se

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{q} \quad (58)$$

Da Eq. (57) e (58) determinam-se \mathbf{q} e $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i}$. Podendo assim avaliar $\sigma_c(\mathbf{q})$ e $\sigma_c(\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \Delta q)$, e por fim determinar

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial q_i} = \frac{\sigma_c(\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_i} \Delta q_i) - \sigma_c(\mathbf{q})}{\Delta q_i}$$

6 EXEMPLO

A viga mista da Fig. 8 foi analisada pelo método desenvolvido neste trabalho. Para a análise numérica foi adotada uma malha de 20 elementos de interfaces, para a conexão deformável, e 40 elementos de viga, sendo 20 elementos para a seção de concreto e 20 elementos para a seção de aço. Os dados referentes às propriedades físicas dos materiais da seção mista são, $f_{ck} = 30MPa$ (resistência característica do concreto a compressão), $f_y = 500MPa$ (tensão de escoamento do aço), $E_s = 210000MPa$ (módulo de deformação do aço). O módulo de deformação do concreto foi determinado através da expressão para o módulo de deformação secante definido pela NBR-6118 (2004) para situações de análises lineares, ou seja,

$$E_c = 0.85(5600\sqrt{f_{ck}}) = 26072MPa.$$

Para as barras de reforço da seção de concreto foram adotadas as mesmas propriedades do aço do perfil I. Para a rigidez da conexão, foram adotados conectores tipo pino com cabeça de diâmetro do fuste de 19mm espaçados com o valor mínimo permitido por norma. Sendo assim, de acordo com a Seção 4.3 deste trabalho, tem-se

$$K = 500000KPa.$$

Como descrito na Seção 4.6 deste trabalho foi admitido como restrições de projetos algumas limitações das dimensões, sendo adotados $\bar{t}_i = 5mm$ e $\bar{t}_s = 25,4mm$, espessura

mínima e máxima das chapas de aço do perfil, respectivamente. A Tabela 1 abaixo mostra as dimensões ótimas para diferentes valores de \bar{h} , altura máxima do perfil I.

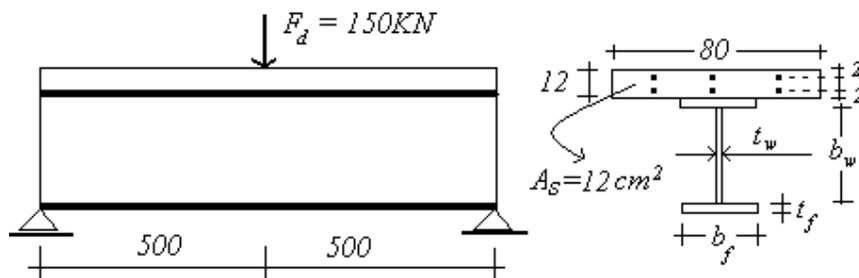


Figura 8: Viga mista bi-apoiada (cotas em cm)

| Altura limite | Dimensões do perfil I (cm) | | Área transversal (cm ²) |
|----------------------------|----------------------------|-------|-------------------------------------|
| | b_f | t_f | |
| $\bar{h} \leq 35\text{cm}$ | b_f | 30,86 | A=101,6 |
| | t_f | 1,07 | |
| | b_w | 1,07 | |
| | t_w | 32,86 | |
| $\bar{h} \leq 40\text{cm}$ | b_f | 20,95 | A=79,2 |
| | t_f | 0,73 | |
| | b_w | 1,26 | |
| | t_w | 38,54 | |
| $\bar{h} \leq 45\text{cm}$ | b_f | 3,29 | A=68,8 |
| | t_f | 2,54 | |
| | b_w | 1,30 | |
| | b_f | 39,92 | |

Tabela 1: Dimensões do perfil I de aço

7 CONCLUSÕES

Como aconteceu para o exemplo simples avaliado na Seção 3 deste trabalho, o algoritmo Simplex trabalhou satisfatoriamente para o exemplo de viga mista dado na Seção anterior. Observa-se da Tabela 1 que há uma tendência de diminuição da área da seção transversal do perfil de aço quando se permite que este tenha alturas maiores, o que era esperado, uma vez que a inércia da seção aumenta quando se tem massa cada vez mais distante do centro de massa da seção. Portanto, a seção ótima tende para uma seção retangular, como pode ser observado da Tabela 1.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) o apoio financeiro e a bolsa de pesquisa concedida para desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Bazaraa, M. e Shetty, C. *Nonlinear programming - theory and algorithms*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- Haftka, R. e Kamat, M. *Elements of structural optimization*. Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 1985.
- NBR 6118. *Projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2004.
- NBR 8800. *Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço e Concreto de Edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2008.
- Nocedal, J. e Wright, S. *Numerical optimization*. Second edition. Springer. 2006.
- Oehlers, D. e Coughlan, C. The shear stiffness of stud shear sonnections in composite beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 6, n.4, p. 273-284, 1986.
- Sousa Jr., J. B. M. e Silva, A. R. Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 43, p. 954-964, 2007.
- Vanderplaats, G. *Numerical optimization technique for tnginnering design - with applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.