

EFFECTO DE LA VISCOSIDAD INTERFACIAL EN LA GENERACIÓN DE ONDAS DE FARADAY BIDIMENSIONALES

Sebastián Ubal^{†*}, María D. Giavedoni[†], y Fernando A. Saita[†]

[†] Grupo de Flujos con Dinámicas Interfaciales
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química, UNL-CONICET
Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina
Email: subal@ceride.gov.ar

* Grupo de Biomecánica Computacional
Facultad de Ingeniería, UNER
Ruta Prov. No. 11 KM 10, (3101) Oro Verde, Entre Ríos, Argentina

Palabras clave: ondas de Faraday, viscosidad interfacial, elementos finitos, método de los spines.

Resumen. *Se estudia el efecto de la viscosidad superficial en la generación de ondas de Faraday bidimensionales mediante una serie de experimentos numéricos. El comportamiento viscoso de la interfase se debe a la presencia de un surfactante insoluble; el efecto Marangoni es ignorado como una primera aproximación. Las ecuaciones gobernantes (Navier-Stokes y continuidad) se resuelven numéricamente, utilizando un algoritmo basado en el método de elementos finitos, junto a una técnica ALE que permite seguir el dominio deformable en el tiempo. Los resultados indican que la viscosidad superficial induce un aumento en el umbral de producción de las ondas. Un análisis cuidadoso de las variables interfaciales permite estudiar en detalle los mecanismos físicos del problema en estas condiciones.*

1 INTRODUCCIÓN

Se conocen como ondas de Faraday¹ a las ondulaciones que se producen en la superficie libre de un líquido cuando se somete a una vibración vertical al recipiente que lo contiene. Entre otras observaciones, Faraday notó que las oscilaciones eran subarmónicas: la superficie libre se movía a la mitad de la frecuencia que la vibración del contenedor. Más de un siglo después de que el fenómeno fuera reportado inicialmente, se publicó el primer análisis de estabilidad lineal del problema para el caso de un fluido invíscido², demostrándose que el fenómeno consistía en un tipo de resonancia paramétrica que podía estudiarse analizando la estabilidad de un conjunto infinito de ecuaciones de Mathieu. Según este estudio, si las condiciones para la resonancia eran apropiadas, podían generarse ondas subarmónicas empleando una intensidad de vibración infinitesimalmente pequeña. Este resultado irreal es consecuencia de las hipótesis asumidas. El análisis de estabilidad lineal para un fluido viscoso fue presentado 40 años después³, mostrando que las condiciones críticas de excitación (número de onda e intensidad de vibración) dependen de la viscosidad.

El estudio de este fenómeno ha recibido considerable atención, y existen numerosos artículos publicados sobre el mismo. Los trabajos de Miles y Henderson⁴, y de Perlin y Schultz⁵ constituyen apropiadas revisiones sobre el tema.

Sin embargo, un aspecto del problema que no ha sido tratado con profundidad es el efecto de las sustancias tensioactivas. Es sabido que los surfactantes no solamente disminuyen la tensión superficial de un líquido, sino que confieren a la interfase características elásticas (debido a variaciones locales de la tensión superficial) y viscosas (asociadas a la viscosidad superficial en una interfase de tipo Newtoniana). La influencia del efecto Marangoni sobre las ondas superficiales fue analizada en forma aproximada por Miles^{6,7}, mediante la introducción de términos de amortiguamiento en sus ecuaciones de evolución. Sólo muy recientemente, Kumar y Matar^{8,9} presentaron el análisis de estabilidad lineal del fenómeno, cuando la interfase está cubierta por un surfactante insoluble. Sus resultados muestran la dependencia del número de onda y la intensidad de vibración con la elasticidad del agente tensioactivo. En particular, demuestran que la fuerza de excitación necesaria para generar ondas superficiales es mayor en un líquido con una interfase contaminada, en comparación con un sistema limpio. Casi simultáneamente, los autores del presente trabajo realizaron una serie de experimentos numéricos, en los que se investigó la influencia del efecto elástico que un surfactante insoluble introduce en ondas de Faraday bidimensionales^{10,11}. En el primero de estos trabajos se asumió que la tensión interfacial dependía linealmente de la concentración de tensioactivo, mientras que en el segundo se utilizaron ecuaciones de estado no-lineales para la tensión superficial. Mediante la simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, se obtuvieron resultados para algunas condiciones particulares típicas, mostrándose también que el efecto Marangoni causa un incremento en el umbral de excitación de las ondas superficiales. Un análisis detallado de los campos de flujo interfaciales facilitó la comprensión del fenómeno.

Sin embargo el efecto de la viscosidad interfacial sobre el problema, inducido por la presencia de un surfactante, no ha sido analizado en la literatura. En consecuencia, el presente

trabajo estudia la influencia de esta propiedad en la generación de ondas de Faraday 2-D, mediante la realización de una serie de experimentos numéricos para condiciones típicas del sistema. Se utiliza un procedimiento numérico similar al mencionado en el párrafo anterior. El mismo, basado en el método de elementos finitos, se conjuga con una técnica ALE (método de los *spines*) para el seguimiento en el tiempo del dominio deformable. Como una primera aproximación, los efectos elásticos del tensioactivo son ignorados. Los resultados obtenidos indican que, en estas condiciones, la viscosidad superficial incrementa el umbral de excitación respecto de una interfase no contaminada. Además, la técnica numérica posibilita un examen detallado de las variables de flujo interfaciales, lo que permite analizar los mecanismos físicos que ocasionan este incremento de la intensidad de vibración crítica.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. La próxima sección expone el modelo matemático que describe el problema a resolver. En la sección 3 se explica en forma resumida el procedimiento numérico utilizado en la resolución de las ecuaciones. La sección 4 muestra los resultados obtenidos y finalmente en la sección 5 se exponen las principales conclusiones de este trabajo.

2 ECUACIONES GOBERNANTES

Un líquido Newtoniano de viscosidad (μ) y densidad (ρ) constantes se encuentra sobre una placa plana horizontal. La misma vibra verticalmente con una frecuencia angular ω y una amplitud a_0 (ver Fig. 1). En este trabajo se considera que esta oscilación induce un movimiento bidimensional del fluido, en el plano x - y .

La interfase líquido-gas está cubierta por una monocapa de surfactante insoluble, el cual le confiere características viscosas; el gas se encuentra a presión constante y se considera invíscido.

El espesor en reposo de la película líquida es H_0 y es perturbado sinusoidalmente en el instante inicial con una amplitud εH_0 y un número de onda α/H_0 , de acuerdo a la siguiente expresión adimensional:

$$h(0,x) = \alpha/\pi [1 - \varepsilon \cos(\pi x)], 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

donde $h(t,x)$ mide la distancia que separa la interfase del fondo y t es el tiempo. La longitud característica es media longitud de onda de la perturbación inicial ($\pi H_0/\alpha$), mientras que el tiempo característico es el período de oscilación de la placa móvil ($2\pi/\omega$). Puesto que el sistema coordinado de referencia está fijo al fondo (ver Fig. 1), la aceleración periódica del movimiento vibratorio se adiciona a la gravitatoria. Luego, el movimiento del líquido está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, que en forma adimensional pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \frac{1}{Fr} [F \cos(2\pi t) - 1] \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

siendo $Re = \rho\omega\pi H_0^2/2\mu\alpha^2$ el número de Reynolds, $Fr = \omega^2 H_0/4\pi\alpha g$ el número de Froude y $F = a_0\omega^2/g$ es un parámetro que mide la importancia relativa de la aceleración forzada respecto de la gravedad. La escala de velocidad utilizada es $\omega H_0/2\alpha$, mientras que para las tensiones se utilizó $\rho(\omega H_0/2\alpha)^2$. Las condiciones de contorno adoptadas están resumidas en la Fig. 1, donde u y v son las componentes x e y de la velocidad, respectivamente.

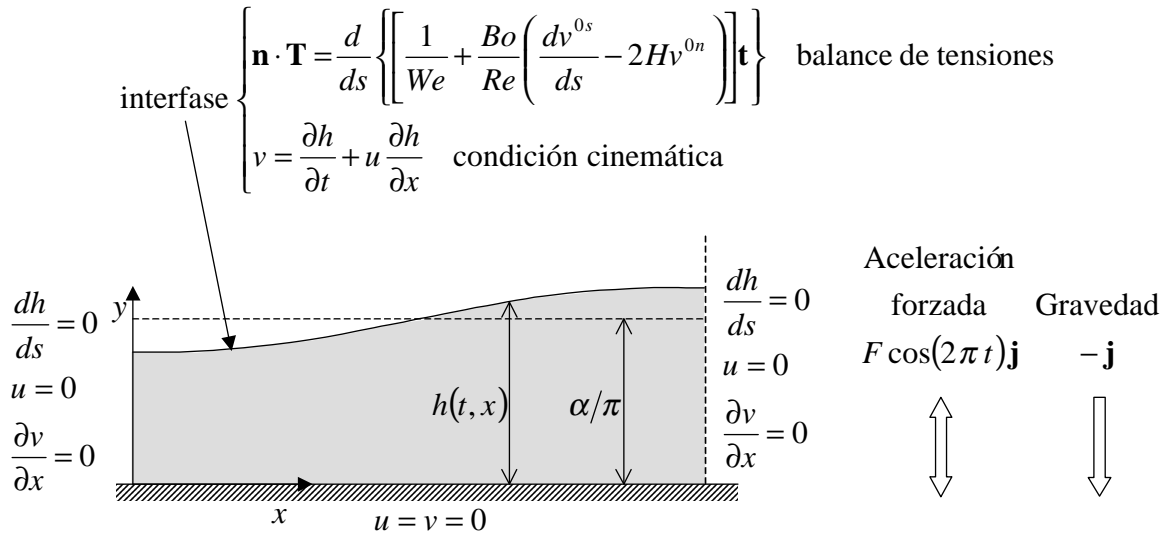


Figura 1: Esquema del dominio físico, resumiendo las condiciones de contorno del problema.

En el fondo no hay deslizamiento entre la placa sólida y el líquido: $u = v = 0$ en $y = 0$.

El dominio se extiende entre los planos $x = 0$ y $x = 1$ y forma parte de un patrón de ondas estacionarias que se repiten infinitamente. Las condiciones de simetría que se aplican en estas superficies son $dh/ds = u = \partial v/\partial x = 0$.

No existe transferencia de materia a través de la interfase líquido-aire; la condición cinemática puede aplicarse puesto que la superficie es material:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad \text{en } y = h(t, x) \quad (4)$$

La presencia del surfactante insoluble en la interfase líquido-gas le confiere a la misma un comportamiento especial, modelado como Newtoniano^{12,13} en el presente trabajo. Por lo tanto, el tensor de tensiones superficial es $\mathbf{T}^{(S)} = [\sigma + (\kappa^{(S)} - \mu^{(S)}) \nabla_{(S)} \cdot \mathbf{v}^{(S)}] \mathbf{I}^{(S)} + 2\mu^{(S)} \mathbf{D}^{(S)}$, donde $\mathbf{I}^{(S)} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ es el tensor identidad superficial, \mathbf{n} es la normal unitaria externa, σ es la tensión superficial, $\kappa^{(S)}$ y $\mu^{(S)}$ son los coeficientes de viscosidad dilatacional y de corte superficiales, respectivamente, $\nabla_{(S)} = \mathbf{I}^{(S)} \cdot \nabla$ es el operador gradiente superficial, $\mathbf{v}^{(S)}$ es la velocidad superficial, y $\mathbf{D}^{(S)} = [\nabla_{(S)} \mathbf{v}^{(S)} + (\nabla_{(S)} \mathbf{v}^{(S)})^T]$ es el tensor tasa de deformación superficial. Puesto que sólo estamos interesados en ondas bidimensionales, el tensor de tensiones superficial se reduce a $\mathbf{T}^{(S)} = [\sigma + (\kappa^{(S)} + \mu^{(S)}) \nabla_{(S)} \cdot \mathbf{v}^{(S)}] \mathbf{I}^{(S)}$. Además, en este caso se verifican las siguientes

identidades: $\nabla_{(S)} = \mathbf{t} \, d/ds$, $\nabla_{(S)} \cdot \mathbf{v}^{(S)} = dv^{0s}/ds - 2H v^{0n}$, y $\mathbf{I}^{(S)} = \mathbf{t}\mathbf{t}$, donde s es la longitud de arco, medida desde $x=0$ hacia $x=1$, \mathbf{t} es el versor tangente a la interfase apuntando en la dirección de s creciente, $2H$ es la curvatura media de la superficie libre, y la velocidad interfacial puede escribirse como $\mathbf{v}^{(S)} = v^{0s} \mathbf{t} + v^{0n} \mathbf{n}$. Bajo estas condiciones, y tomando la presión del gas como referencia, las tracciones interfaciales pueden expresarse como

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{d}{ds} \left\{ \left[\sigma + (\kappa^{(S)} + \mu^{(S)}) \left(\frac{dv^{0s'}}{ds} - 2Hv^{0n} \right) \right] \mathbf{t} \right\} \quad (5)$$

Las componentes normal y tangencial de este vector están dadas por $T_{nn} = 2H [\sigma + (\kappa^{(S)} + \mu^{(S)}) (dv^{0s}/ds - 2H v^{0n})]$ y $T_{nt} = d/ds [\sigma + (\kappa^{(S)} + \mu^{(S)}) (dv^{0s}/ds - 2H v^{0n})]$, respectivamente. Es sabido que la presencia de un surfactante en una interfase ocasiona la disminución de la tensión superficial y la aparición propiedades viscosas. Además, en una interfase en movimiento las deformaciones producen distribuciones no uniformes de surfactante, las que a su vez inducen variaciones locales de las propiedades físico-químicas de la interfase. En particular, esto da lugar al efecto Marangoni cuando existen gradientes de tensión superficial; la influencia amortiguadora de la elasticidad de un surfactante sobre la formación de ondas de Faraday ha sido ya estudiada en la literatura⁶⁻¹¹. Por otra parte, la viscosidad interfacial contribuye tanto a la componente normal como tangencial del vector tracción. En el primer caso, su influencia tiende a oponerse a cambios en el área de la interfase, mientras que en el segundo actúa contrarrestando deformaciones superficiales no homogéneas. Puesto que el objetivo principal de este trabajo es el estudio de la influencia de la viscosidad interfacial sobre la producción de las ondas de Faraday, se ignora el efecto Marangoni como una primera aproximación, asumiendo que la tensión superficial es constante. En consecuencia, puede reescribirse la ec. (5) en forma adimensional como

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{d}{ds} \left\{ \left[\frac{1}{We} + \frac{Bo}{Re} \left(\frac{dv^{0s'}}{ds} - 2Hv^{0n} \right) \right] \mathbf{t} \right\} \quad (6)$$

donde $We = \pi\rho\omega^2 H_0^3 / 4\sigma\alpha^3$ es el número de Weber y $Bo = (\kappa^{(S)} + \mu^{(S)})\alpha / \pi H_0 \mu$ es el número de Boussinesq, el cual expresa la relación entre la viscosidad del líquido y la superficial. Debe notarse que se han utilizado los mismos símbolos para las variables dimensionales y adimensionales en las ecs. (5) y (6).

3 PROCEDIMIENTO NUMÉRICO

3.1 Introducción

El esquema numérico utilizado en la resolución de las ecs. (2) y (3) y sus condiciones de contorno está basado en el método de Galerkin / elementos finitos para la discretización espacial. El avance en el tiempo, basado en diferencias finitas, consta de un predictor-corrector de segundo orden. El seguimiento del dominio deformable se realiza mediante una

técnica ALE conocida como método de los *spines*. Dado que este procedimiento se ha utilizado en numerosos trabajos previos de los presentes autores^{10,11,14} y de otros¹⁵, sólo se presentarán los aspectos generales del mismo. Los detalles pueden consultarse en los artículos referidos.

3.2 Discretización espacial

La discretización espacial de las ecs. (2) y (3) y sus condiciones de contorno se realizó mediante la formulación estándar de los residuos ponderados de Galerkin. El dominio físico en el plano x - y fue dividido en una malla estructurada de cuadriláteros, constituyendo elementos Lagrangianos de 9 nodos que fueron mapeados isoparamétricamente al cuadrado unitario en el plano ξ - η ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$). Se utilizaron funciones de forma bicuadráticas ($\phi^k(\xi, \eta)$) para las componentes de la velocidad y funciones bilineales ($\psi^k(\xi, \eta)$) para la presión. La posición de la interfase fue seguida mediante el método de los *spines*¹⁵; en este trabajo éstos constituyen rectas verticales perpendiculares a la superficie sólida, a lo largo de las cuales se mide la distancia entre la superficie libre y el fondo. La forma de la interfase está determinada por la interpolación cuadrática de estas distancias:

$$h(t, \xi) = \sum_{i=1}^3 h^i(t) \hat{\phi}^i(\xi) \quad (7)$$

donde $h^i(t)$ es la longitud medida a lo largo del i -ésimo spine, dependiente del tiempo. Mediante este procedimiento, el problema queda expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no-lineales, donde las incógnitas son los coeficientes nodales de velocidad y presión, y las distancias a lo largo de los spines.

3.3 Discretización temporal

El algoritmo de avance en el tiempo consiste en un esquema predictor-corrector de segundo orden¹⁶. Las derivadas respecto del tiempo en el conjunto de EDOs no-lineales son aproximadas mediante la regla del trapecio. Así, en cada paso de tiempo se genera un sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales, que se resuelve mediante el método de Newton. A fin de mejorar la convergencia de este bucle, en la primera iteración se utiliza la aproximación de un predictor de Adams-Bashforth para los coeficientes de velocidad y superficie libre. Para la presión, es suficiente inicializar con los valores correspondientes al instante de tiempo anterior. El tamaño del paso de tiempo se ajusta mediante el método de Crisfield, a fin de que se alcance el criterio de convergencia del lazo de Newton (especificado como un error medio cuadrático menor o igual a 10^{-6}) en un número preestablecido de iteraciones.

Mediante este procedimiento, al final de cada paso de tiempo se obtienen en forma simultánea todas las incógnitas.

3.4 Selección de la malla

Con el objeto de obtener una adecuada representación del campo de flujo, se adoptó el

siguiente criterio en la selección de la malla de elementos finitos:

- La malla debe ser más refinada en las regiones cercanas al fondo y a la interfase, donde se desarrollan capas límite viscosas.
- El número de elementos en la dirección horizontal depende de la longitud del dominio.

Luego de realizarse numerosas pruebas numéricas buscando cumplir estos criterios, se concluyó que una malla 20 elementos en la dirección x y 7 en la dirección y resultaba adecuada para todos los experimentos numéricos a realizarse en este trabajo. Como ejemplo, La Fig. 2 muestra algunos experimentos de convergencia, en los que se observa que resulta innecesario un refinamiento adicional al especificado. La Fig. 2(a) ilustra la componente tangencial de la tracción interfacial en función de x , y la Fig 2(b) la magnitud de la velocidad en la línea media del dominio ($x = 0.5$). En ambos casos, las variables se muestran para determinados instantes de tiempo equiespaciados a lo largo de un ciclo de oscilación, una vez establecida la formación de una onda de Faraday. Claramente se aprecia que las diferencias entre los resultados obtenidos con diferentes grados de refinamientos son mínimas.

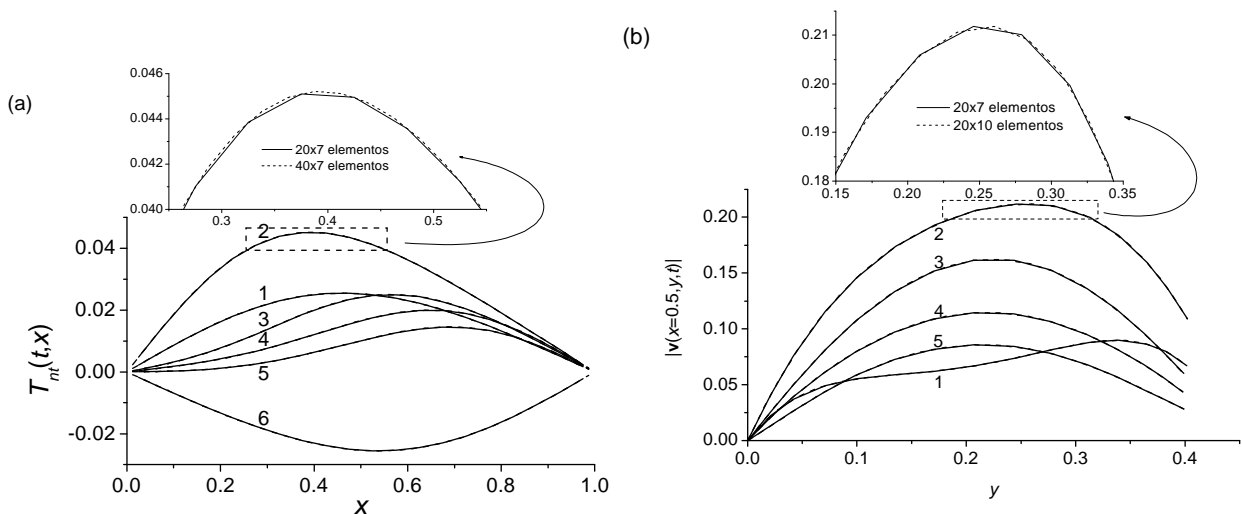


Figura 2: Pruebas de refinamiento. (a) Distribución de la componente tangencial de la tracción interfacial, en función de x . (b) Variación a lo largo de la coordenada y de la magnitud de la velocidad en la línea media del dominio. Las simulaciones corresponden a $Re = 24.87$, $We = 2.818$, $Fr = 2.544$, $\alpha = 1.26$, $Bo = 1$ y $F = 15$.

4 RESULTADOS

4.1 Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar la influencia de la viscosidad superficial en la formación de ondas de Faraday 2-D. Como fuera mencionado previamente, cuando la superficie libre de un líquido se cubre con un surfactante insoluble, las propiedades de la interfase pueden cambiar drásticamente. Esto resulta de particular importancia en interfaces que se deforman, puesto que los gradientes de concentración resultantes de estos movimientos

dan lugar a variaciones locales de las propiedades interfaciales. Sin embargo, en este trabajo se ignora esta dependencia, como una primera aproximación. Así, se asume que las propiedades interfaciales (σ , $\kappa^{(s)}$ y $\mu^{(s)}$) son constantes; es decir, la presencia del surfactante insoluble sólo origina la aparición de la viscosidad superficial. En consecuencia, los resultados mostrados en esta sección dependen del número de Boussinesq, el cual representa el único parámetro necesario para describir la influencia del surfactante.

Un aspecto importante de este problema consiste en detectar la mínima intensidad de vibración necesaria para generar ondas de una determinada longitud. Puesto que la viscosidad interfacial modifica las tracciones en la superficie libre, es razonable esperar que este valor umbral esté afectado por las propiedades viscosas de la interfase. A fin de estudiar la dependencia de la fuerza de excitación crítica con el número de Boussinesq, se realizó una serie de experimentos numéricos en los que se exploró un amplio rango de este parámetro. Como primer paso, se definió un caso de referencia (CR) caracterizado por $Bo = 0$ y los otros parámetros como sigue:

$$\alpha^2 Re = 39.478, \alpha^3 We = 5.6375, \alpha Fr = 3.206 \quad (8)$$

Este conjunto particular de parámetros corresponde a los siguientes valores típicos de las variables físicas del problema:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \mu = 0.025 \text{ Pa s}, \sigma_0 = 0.055 \text{ N/m}, H_0 = 10^{-3} \text{ m}, \omega = 200 \pi \text{ s}^{-1}$$

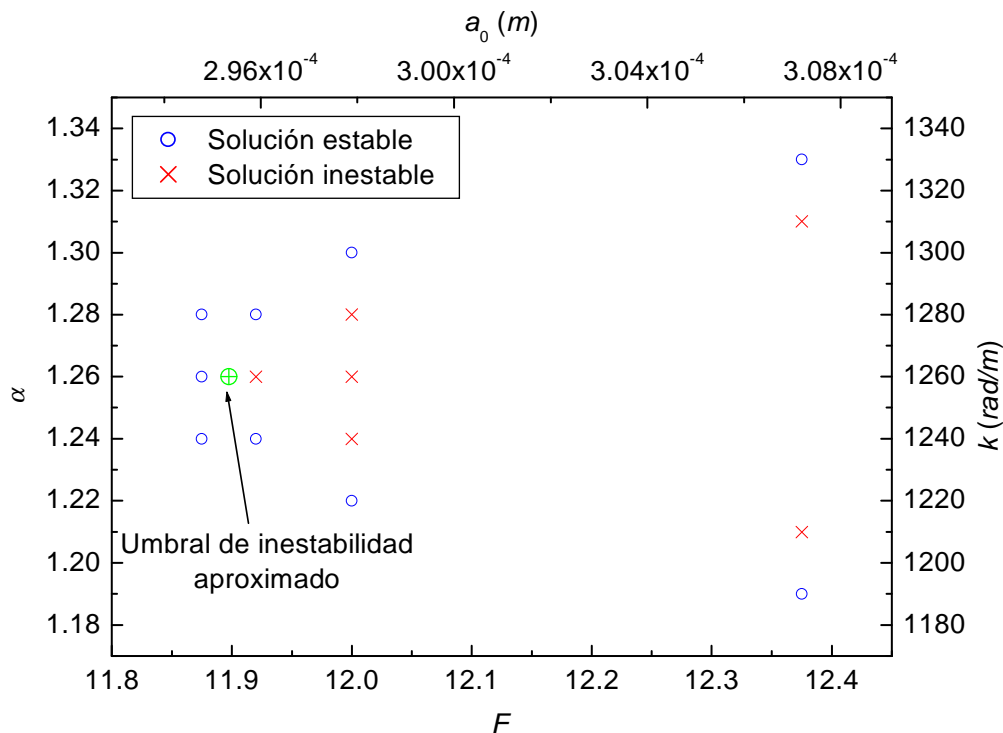


Figura 3: Mapa de estabilidad en el plano F - α , para $Bo = 0$, $\alpha^2 Re = 39.478$, $\alpha^3 We = 5.6375$, $\alpha Fr = 3.206$.

A efectos de completar la caracterización del CR, se seleccionó un valor particular del número de onda. En este trabajo, el número de onda elegido es el correspondiente al punto crítico (F_C, α_C), donde la fuerza necesaria para generar ondas de Faraday es mínima. Para ello, se construyó un mapa de estabilidad, el que se muestra en la Fig. 3. Cada punto en este gráfico corresponde a un experimento numérico, el que fue clasificado como estable/inestable (círculo/cruz) dependiendo de la evolución de la superficie libre a partir de la perturbación inicial (ec. (1) con $\varepsilon = 10^{-3}$). Las oscilaciones cuyas amplitudes decaen a cero a lo largo de la simulación son estables, y en caso contrario son inestables.

En la Fig. 3 puede distinguirse una región inestable; las soluciones pertenecientes a la misma se caracterizan por un movimiento subarmónico de la superficie libre, formando una onda cuya longitud es dos veces mayor que la del dominio en la dirección x . Las condiciones críticas están señaladas mediante el símbolo \oplus ; dicho punto está localizado aproximadamente en ($F_C = 11.9, \alpha_C = 1.26$). Este número de onda particular ($\alpha = \alpha_C = 1.26$), junto con los parámetros consignados en (8), definen el caso de referencia utilizado en todos los experimentos numéricos que se presentan a continuación, donde se explora la influencia de la variación del número de Boussinesq en el fenómeno de ondas de Faraday.

4.2 Efecto de la viscosidad interfacial sobre el umbral de excitación

Como se mencionó, a fin de estudiar el efecto de la viscosidad interfacial en la formación de ondas de Faraday bidimensionales, se realizó una serie de experimentos numéricos en un sistema caracterizado por los parámetros adimensionales del CR, exceptuando el número de Boussinesq, que fue variado entre 10^{-2} y 10^4 . En términos de la viscosidad interfacial ($\kappa^{(S)} + \mu^{(S)}$) esto representa una variación entre $6.23 \times 10^{-4} \text{ sp}$ y 623 sp (ver referencias^{13,17}). Como resultado de estas simulaciones —en las que se exploraron varios valores de F para cada valor de Bo adoptado— se construyó una curva que muestra la mínima intensidad de vibración necesaria para generar ondas de Faraday (con un número de onda α_C) en función del parámetro de Boussinesq. La Fig. 4 muestra esta curva, donde la incerteza en el valor de F_C es ± 0.5 unidades adimensionales.

Claramente, puede apreciarse que el umbral de excitación como función de Bo presenta un comportamiento sigmoideo. Las variaciones más pronunciadas de F_C se observan en un entorno de $Bo = 1$, mientras que para $Bo \geq 100$ y $Bo \leq 0.01$ se advierte que la intensidad de vibración crítica es prácticamente insensible a cambios de este número adimensional. En particular, para los valores mayores del número de Boussinesq, el umbral de excitación es aproximadamente un 50% mayor que para $Bo = 0$ (viscosidad interfacial nula).

Puesto que la viscosidad superficial modifica la tracción interfacial, puede esperarse que estas tensiones modifiquen el flujo en las cercanías de la superficie libre, y que a su vez estos cambios estén asociados a las variaciones del umbral de excitación con el número de Boussinesq.

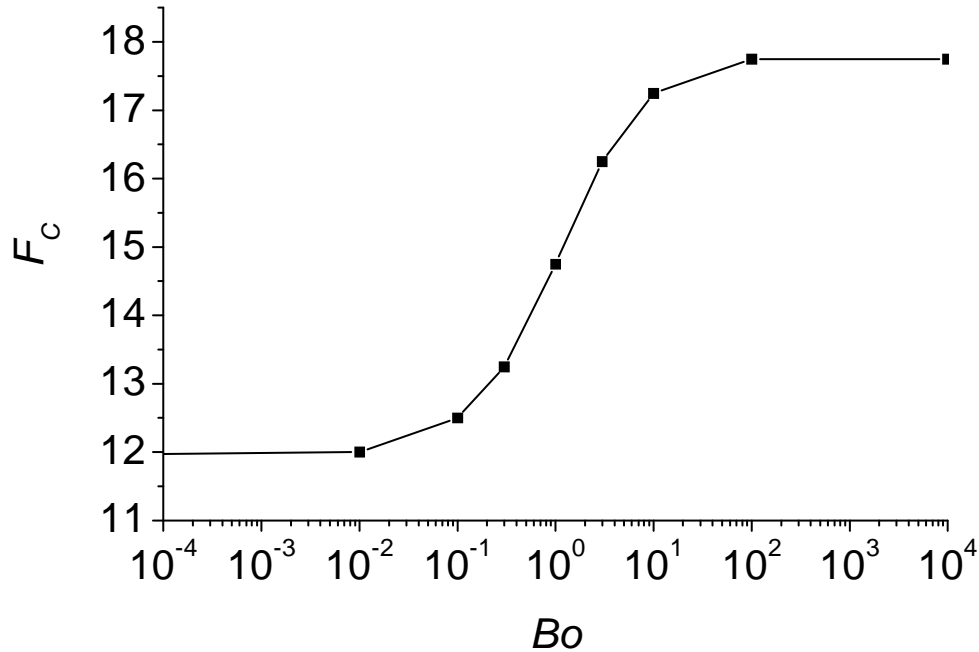


Figura 4: Intensidad de vibración crítica (F_c) en función del número de Boussinesq (Bo). Los otros parámetros del sistema son los mismos que el CR.

4.3 Evolución temporal de las variables interfaciales cerca de las condiciones críticas

A fin de analizar en detalle los fenómenos involucrados en la formación de las ondas de Faraday en interfases que presentan comportamiento viscoso, se examina la evolución temporal de algunas variables interfaciales para algunos de los experimentos numéricos más cercanos al límite de estabilidad de la Fig. 4. Los casos elegidos son ($Bo = 0.01$, $F = 12.25$), ($Bo = 1$, $F = 15$), y ($Bo = 100$, $F = 18$); los resultados correspondientes se muestran en la Fig. 5(a)-(c). En cada columna, de arriba hacia abajo, se muestra el valor absoluto máximo de las componentes normal y tangencial de la velocidad y la tracción interfaciales, y la posición de los extremos izquierdo y derecho de la superficie libre.

El análisis de estas curvas permite afirmar que para los valores menores del número de Boussinesq (Bo entre 0 y 1, ver Fig. 5(a),(b)) la variable interfacial más afectada es la componente tangencial de la tracción (alrededor de 40 veces mayor para $Bo = 1$ que para $Bo = 0.01$); en menor medida resulta influenciada la componente tangencial de la velocidad, reducida a la mitad en el mismo rango del parámetro de Boussinesq. Por otra parte, para los valores mayores de Bo (entre 1 y 100, ver Fig. 5(b),(c)) se observa una notable disminución del movimiento del líquido; en particular, es remarcable el descenso del valor absoluto máximo de v^{0s} .

Otra característica que se observa en los resultados de la Fig. 5 es que el líquido cercano a la superficie libre se mueve casi en fase con el flujo global (véanse las curvas correspondientes a $\max|v^{0n}(t,x)|$ y $h(t,x=0,1)$ y compáreselas con la de $\max|v^{0s}(t,x)|$). Este

hecho contrasta con lo observado cuando el efecto Marangoni es tenido en cuenta^{10,11}; sin embargo, no puede descartarse la existencia de un desfase entre los movimientos interfaciales y globales si se admitiera una dependencia de la viscosidad interfacial con la concentración de surfactante.

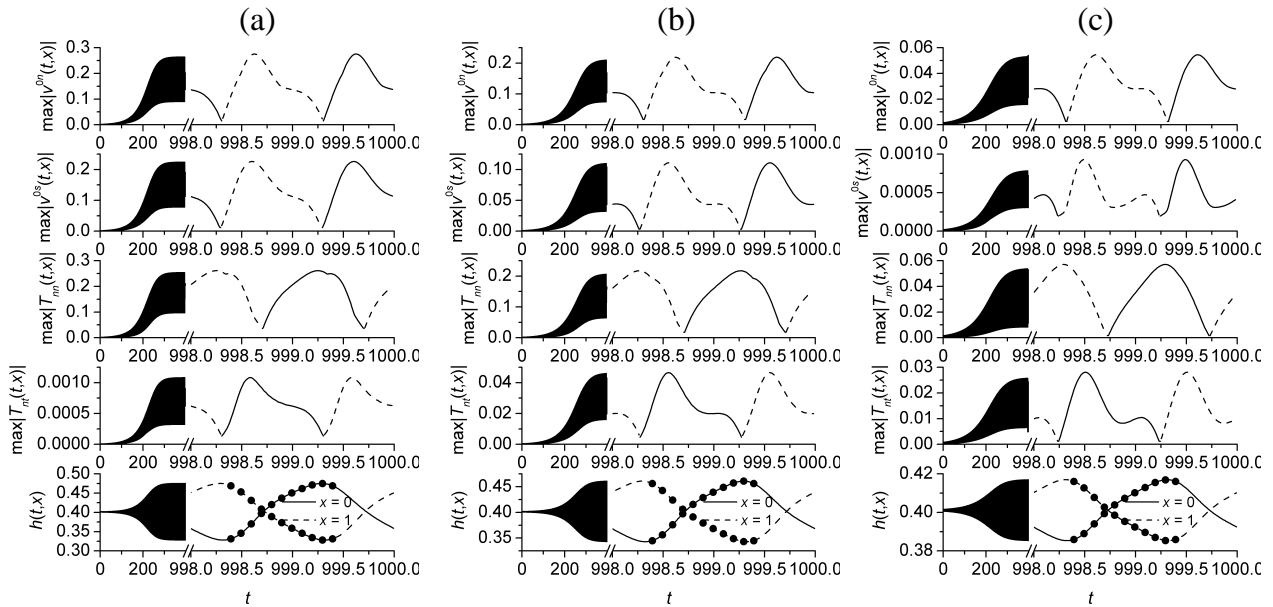
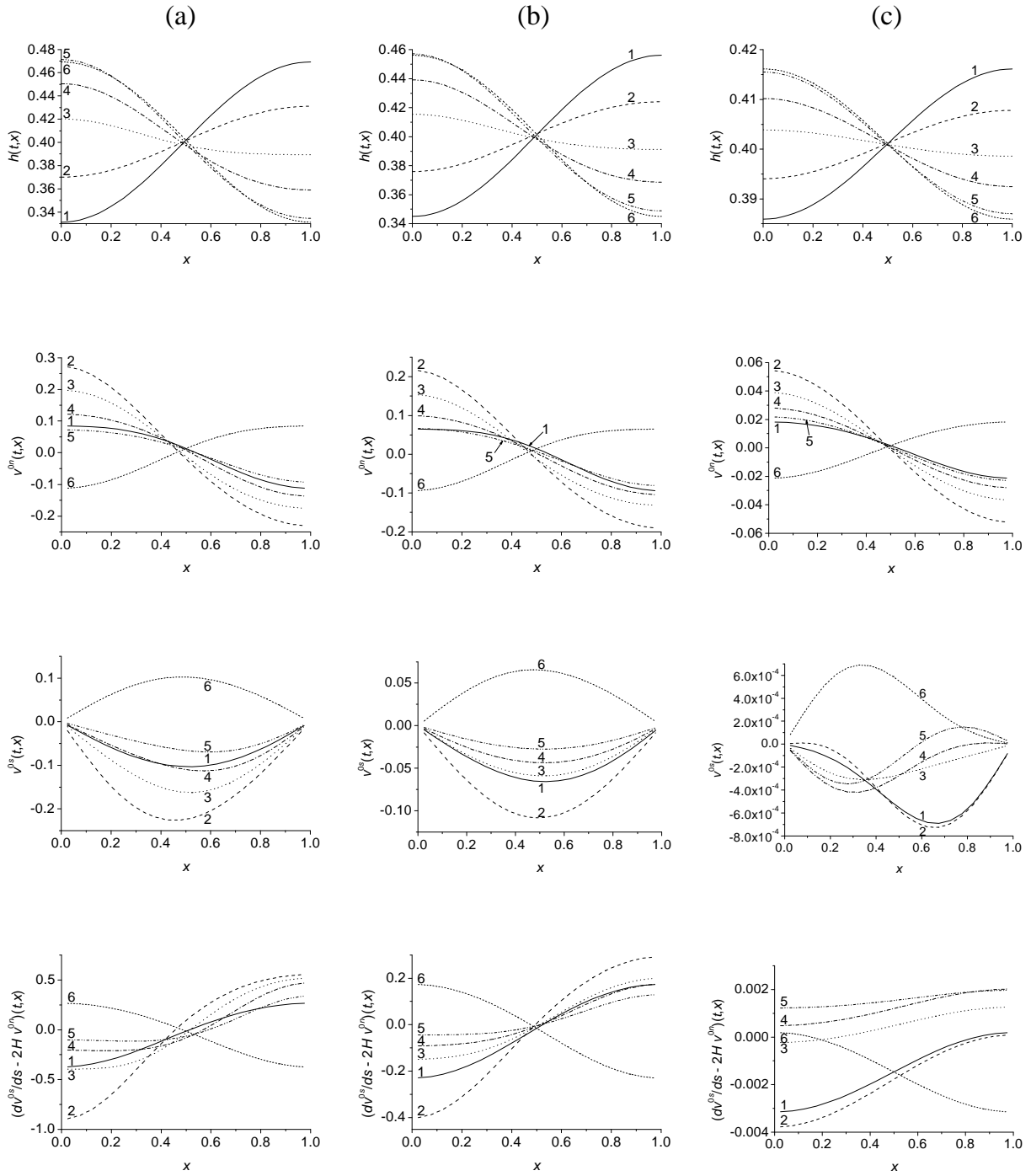


Figura 5: Evolución temporal de algunas variables interfaciales cerca de las condiciones umbral, para el CR y (a) ($Bo = 0.01$, $F = 12.25$), (b) ($Bo = 1$, $F = 15$) y (c) ($Bo = 100$, $F = 18$). De arriba hacia abajo, componente normal y tangencial de la velocidad superficial, componente normal y tangencial de la tracción interfacial y posición de los extremos de la superficie libre. Los puntos señalan instantes de tiempo equiespaciados, a los que se referirá más adelante.

Con el objeto de estudiar con mayor detalle la evolución de las variable interfaciales, se analiza la forma de la superficie libre y la distribución espacial de las componentes normal y tangencial de la velocidad, de la tasa de deformación de la superficie libre y de la componente tangencial de la tracción, a lo largo de un ciclo de oscilación estacionario. Cada una de estas variables se muestra en la Fig. 6 para 6 instantes de tiempo equiespaciados, que se corresponden (instante por medio) con los puntos que se observan en las curvas inferiores de la Fig. 5.

Los resultados correspondientes a $h(t,x)$ muestran que la amplitud de oscilación de la superficie libre disminuye con Bo y que la interfase presenta una forma sinusoidal en todos los casos considerados. Como era de esperarse, la distribución de la componente normal de la velocidad interfacial sigue la configuración de la superficie libre; la magnitud de esta variable decrece con Bo , en particular en el rango comprendido entre 1 y 100 (ver también la Fig. 5(b),(c)).



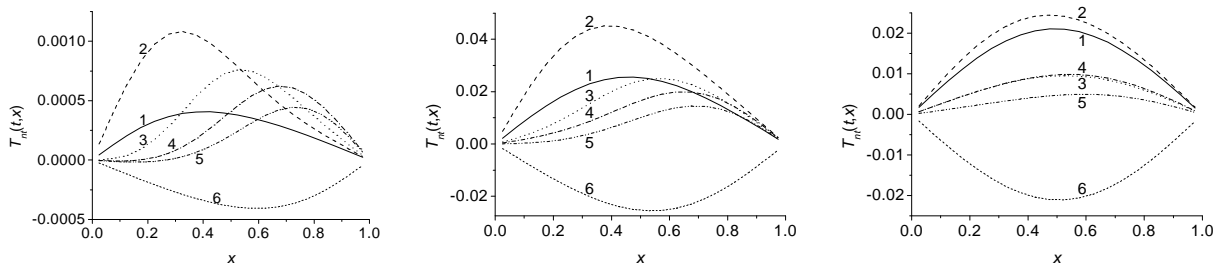


Figura 6: Evolución temporal de la distribución espacial de algunas variables interfaciales, cerca de las condiciones umbral, para el CR y (a) ($Bo = 0.01, F = 12.25$), (b) ($Bo = 1, F = 15$) y (c) ($Bo = 100, F = 18$). De arriba hacia abajo, forma de la superficie libre, componente normal y tangencial de la velocidad superficial, tasa de deformación de la superficie libre y componente tangencial de la tracción interfacial. Las curvas 1 a 6 se corresponden, instante por medio, con los puntos marcados en las curvas inferiores de la Fig. 5.

La distribución de v^{0s} a lo largo de la interfase para los dos valores menores de Bo es bastante similar durante todo el ciclo, mostrando una configuración casi simétrica respecto del punto medio del dominio. Además, la magnitud máxima de esta variable disminuye casi en un 50% entre $Bo = 0.01$ y $Bo = 1$. Sin embargo, la disminución es mucho más marcada para los valores de Bo más grandes: v^{0s} es dos órdenes de magnitud menor para $Bo = 100$ respecto de $Bo = 1$, un descenso mucho más pronunciado que el observado para v^{0n} . Además, la distribución espacial no muestra el aspecto simétrico señalado para los rangos más bajos de Bo .

La tasa de deformación de la superficie libre depende de la tasa de estiramiento tangencial (dv^{0s}/ds) y de la tasa de estiramiento normal ($-2Hv^{0n}$). Los resultados que se observan en la cuarta fila de la Fig. 6 indican que la velocidad de deformación de la interfase disminuye con el número de Boussinesq, lentamente entre $Bo = 0.01$ y $Bo = 1$ y muy rápidamente entre $Bo = 1$ y $Bo = 100$. Por otra parte, las curvas muestran que la contribución del término de estiramiento tangencial se vuelve relativamente menos importante a medida que aumenta el número de Boussinesq, especialmente para los valores mayores de este parámetro. En particular, para $Bo = 100$, varios de los instantes de tiempo (curvas 3, 4 y 5) muestran una distribución relativamente homogénea de la tasa de deformación.

Mediante un cálculo sencillo (ver ec. (6)) puede verificarse que la componente normal de la tracción refleja casi exclusivamente los efectos capilares: el aporte de los efectos viscosos es prácticamente despreciable. Por otra parte, la viscosidad superficial es, en este caso, la única contribución a la componente tangencial de la tracción interfacial la que, como puede apreciarse, se opone al movimiento del fluido cercano a la interfase. Este mecanismo podría asociarse al aumento del umbral que se observa al incrementar el número de Boussinesq.

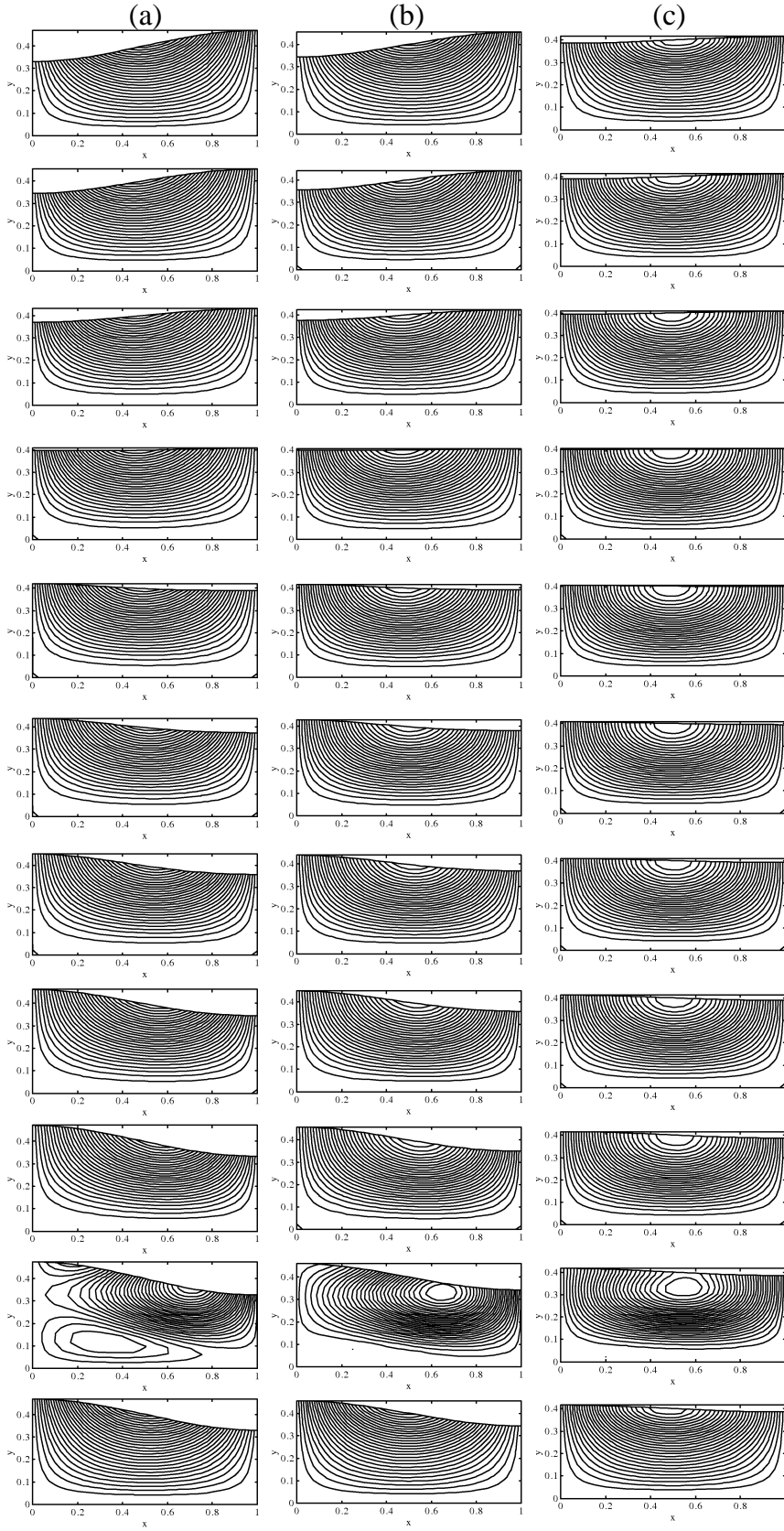


Figura 7: Evolución temporal de las líneas de corriente, en condiciones cercanas al umbral, para el CR y (a) ($Bo = 0.01$, $F = 12.25$), (b) ($Bo = 1$, $F = 15$) y (c) ($Bo = 100$, $F = 18$). El tiempo avanza de arriba hacia abajo, y los instantes de tiempo se corresponden con los puntos marcados en la Fig. 5.

La influencia de la viscosidad interfacial sobre el flujo cercano a la interfase puede analizarse también examinando las líneas de corriente para algunos instantes de tiempo particulares (ver Fig. 7). Estos instantes corresponden a los puntos marcados en las curvas inferiores de la Fig. 5. Los casos que se muestran en esta figura son los mismos seleccionados en las Figs. 5 y 6. Claramente puede observarse que a medida que se aumenta el parámetro de Boussinesq, las líneas de corriente están más separadas en la región cercana a la interfase, indicando que el flujo en esta zona es relativamente menos importante. Además, puede verificarse que, a medida que aumenta Bo y la componente tangencial de velocidad se vuelve proporcionalmente menor a la componente normal, el flujo cercano a la interfase adquiere una configuración prácticamente perpendicular a la superficie libre. Finalmente, estos gráficos permiten verificar que el flujo cercano a la interfase está casi en fase con el movimiento global del líquido.

5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se analizó la influencia de la viscosidad superficial en la generación de ondas de Faraday bidimensionales. El comportamiento viscoso de la interfase se debe a la presencia de un agente tensioactivo; como una primera aproximación se ignoraron los efectos elásticos del surfactante y la dependencia de los coeficientes de viscosidad interfacial con la concentración local de soluto adsorbido. El estudio se realizó mediante una serie de experimentos numéricos, obtenidos para un conjunto particular de los parámetros adimensionales que representan algunas condiciones típicas del sistema. Los resultados indican que, en las condiciones de estudio, la viscosidad interfacial tiende a aumentar la intensidad de vibración necesaria para producir las ondas; el comportamiento del umbral con el parámetro de Boussinesq sugiere la existencia de un mecanismo de saturación para altos valores de Bo . Un examen detallado de las variables interfaciales revela que la componente tangencial de la tracción —que surge como consecuencia de la viscosidad superficial— se opone al movimiento de líquido cercano a la superficie libre, causando una drástica reducción de la velocidad interfacial y ocasionando cambios en el patrón de flujo en la interfase, el que se vuelve progresivamente más perpendicular a la superficie libre.

Una posible extensión del presente estudio sería considerar la dependencia de la viscosidad superficial) con la concentración de surfactante.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional del Litoral, al CONICET y a la ANPCyT por el soporte económico de este trabajo.

6 REFERENCIAS

- [1] Faraday, M., "On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces", *Philos. Trans. R. Soc. London*, **121**, 319 (1831).
- [2] Benjamin, T. B. y Ursell, F., "The stability of the plane free surface of a liquid in a vertical periodic motion", *Proc. R. Soc. London A*, **225**, 505 (1954).
- [3] Kumar, K. y Tuckerman, L.S., "Parametric instability of the interface between two liquids", *J. Fluid Mech.*, **279**, 49-68 (1994).
- [4] Miles, J. y Henderson, D., "Parametrically forced surface waves", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 143 (1990).
- [5] Perlin, M. y Schultz, W.W., "Capillary effects on surface waves", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 241 (2000).
- [6] Miles, J.W., "Surface wave damping in closed basins", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **297**, 459 (1967).
- [7] Miles, J.W., "Nonlinear Faraday resonance", *J. Fluid Mech.*, **146**, 285-302 (1984).
- [8] Kumar, S. y Matar, O.K., "On the Faraday instability in a surfactant-covered liquid", *Phys. Fluids*, **16**, 39-46 (2004).
- [9] Kumar, S. y Matar, O.K., "Erratum: "On the Faraday instability in a surfactant-covered liquid" [Phys. Fluids 16, 39 2004]", *Phys. Fluids*, **16** (8), 3239 (2004).
- [10] Ubal, S.; Giavedoni, M.D. y Saita, F.A., "Elastic effects of an insoluble surfactant on the onset of two-dimensional Faraday waves. A numerical experiment", *J. Fluid Mech.*, **en evaluación** (2003).
- [11] Ubal, S.; Giavedoni, M.D. y Saita, F.A., "The formation of Faraday waves on a liquid covered with an insoluble surfactant: influence of the surface equation of state", *Lat. Amer. Appl. Research*, **aceptado** (2004).
- [12] Scriven, L.E., "Dynamics of a fluid interface", *Chem. Engng. Sci.*, **12**, 98-108 (1960).
- [13] Edwards, D.A.; Brenner, H. y Wasan, D.T., *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworths-Heinemann: Boston, 1991.
- [14] Ubal, S.; Giavedoni, M.D. y Saita, F.A., "A numerical analysis of the influence of the liquid depth on two dimensional Faraday waves", *Phys. Fluids*, **15** (10), 3099-3113 (2003).
- [15] Kheshgi, H.S. y Scriven, L.E., "Penalty finite elements analysis of unsteady free surface flows". En *Finite Element in Fluids* (Gallagher, R. H. y Oden, J. T. eds.), John Wiley & Sons Ltd.: New York, 1984, Vol. 5, Cap. 19, p 393.
- [16] Gresho, P. M.; Lee, R. L. y Sani, R. L., "On the time-dependent solution of the incompressible Navier-Stokes equations in two and three dimensions". En *Recent advances in numerical methods in fluids* (Taylor, C. y Morgan, K. eds.), Pineridge Press: Swansea, 1979, Vol. 1, Cap. 2, p 27.
- [17] Miller, R.; Wüstneck, R.; Krägel, J. y Kretschmar, G., "Dilatational and shear rheology of adsorption layers at liquid interfaces", *Colloids Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, **111**, 75-118 (1996).