

DESEMPENHO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO NA CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES BIDIMENSIONAIS

Marcos N. Bertolani^a, Carlos F. Loeffler^a, Fernando M. Menandro^a e André Bulcão^b

^aUniversidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico, Av. Fernando Ferrari 514, Bairro Goiabeiras, Vitória, ES, Brasil, ppgem@npd.ufes.br, <http://www.ufes.gov.br>

^bCENPES- Centro de Pesquisas da Petrobrás, Gerência de Geofísica Aplicada, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, bulcao@petrobras.com.br

Palavras-Chave: Interpolação, Aproximação em Multivariáveis, Funções de Base Radial com Suporte Compacto.

Resumo: As aproximações numéricas através do uso de funções radiais, comumente denominadas de aproximação em multivariáveis, têm sido aplicadas de modo crescente tanto na interpolação quanto no ajuste de curvas que representam potenciais pertinentes às mais diversas áreas da ciência e engenharia, tais como: meteorologia, topografia, sismologia, entre outras. Nestas áreas é comum a construção de um mapeamento superficial a partir de dados experimentais esparsos, na qual certas propriedades são coletadas com finalidades práticas. No entanto, frequentemente, tais problemas alcançam dimensões da ordem de milhões de variáveis e, por isso, procedimentos mais econômicos que preservem a exatidão devem ser constantemente implementados. Com esse propósito, uma das ações que tem sido desenvolvida consiste na utilização das funções radiais de suporte compacto. O objetivo desse trabalho é precisamente examinar o comportamento dessa classe de funções na representação satisfatória de campos bidimensionais, no que tange à precisão e custo computacional.

1 INTRODUÇÃO

São cada vez mais numerosos os problemas nos quais se deseja aproximar valores em domínios bi e tridimensionais a partir de dados conhecidos em certos pontos. Os procedimentos mais tradicionais, como as aproximações polinomiais ou até mesmo o método das diferenças finitas podem ser aplicados, mas a dificuldade operacional é bem maior do que nos casos unidimensionais, pois os modelos analíticos e os algoritmos resultantes são muito mais complicados.

Além disso, igualmente importantes são algumas restrições matemáticas que surgem na extensão em duas dimensões de alguns métodos bem sucedidos na interpolação unidimensional. Nem todas podem ser aqui listadas, mas destaca-se, primeiramente, que o teorema fundamental da álgebra que garante a fatoração dos polinômios em uma dimensão não se aplica em duas ou mais dimensões, ou seja, a maior parte dos polinômios bidimensionais é irredutível no campo real.

Em segundo lugar, enquanto que em uma dimensão, amostras de n dados arbitrários invariavelmente requerem um polinômio de grau $n-1$, do qual seus coeficientes são inequivocamente determinados, isso pode não ocorrer em duas dimensões. Isso significa que potências de x ou y não constituem necessariamente uma sequência de polinômios linearmente independentes e facilmente obteníveis de forma recursiva. Assim, polinômios em duas variáveis não reconstruem, de forma única, funções calculadas em valores de amostras colhidas em posições arbitrárias (Zakhor e Alvstad, 1992).

2 A INTERPOLAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

Os problemas inerentes à interpolação polinomial não se limitam a sua extensão em casos multidimensionais. Atualmente, há muitas aplicações nas quais o número de dados pode estar contido na casa dos milhares ou mesmo dos milhões e esses métodos se mostram via de regra, computacionalmente custosos. Por fim, uma última restrição, mas nem por isso menos importante: alguns dos métodos tradicionais têm aplicação limitada aos domínios regulares.

Os métodos ou técnicas de aproximação em multivariáveis (TAM) fornecem uma interessante forma de superar todos os problemas citados (Fasshauer, 2007). Como o nome indica, tais métodos trabalham com uma função que depende de múltiplas variáveis. A interpolação multidimensional é um caso particular dentro desse contexto.

Embora existam alternativas, o emprego de funções de base radial (RBFs) para a operacionalização das TAM tem sido dos mais comuns e bem sucedidos, encontrando respaldo matemático eficiente sob a ótica da teoria moderna da aproximação, sobretudo quando se trata de aproximar dados esparsos em várias dimensões (Buhmann, 2003).

As RBFs são funções cujo valor depende exclusivamente da distância radial entre um ponto base e um ponto campo, que pode ser também outro ponto base. Algumas propriedades que avalizam a potencialidade das RBFs são evidentes: a simetria angular é a mais importante, pois o valor da função depende tão somente da distância do argumento ao ponto base e quaisquer rotações não influenciam seu resultado. Outro fator importante advém dos seus valores poderem ser sempre positivos. Contudo, outros fatores podem se tornar igualmente interessantes: muitas vezes características de decaimento e suavidade podem ser adequadas e, nesse sentido, há várias classes de funções capazes de se ajustar a esses quesitos.

Na literatura atual, as TAM encontram-se fortemente relacionadas ao contexto dos denominados métodos livres de malha, que tiveram gênese em aplicações em áreas como a geodésica, geofísica, mapeamento e meteorologia. Posteriormente, foram direcionados para aplicações em muitas outras áreas, tais como solução numérica de equações diferenciais

parciais, gráficos computacionais, redes neurais, imagem de sinais e processamento.

3 FUNÇÕES DE BASE RADIAL E OS MÉTODOS SEM MALHA

O uso de funções radiais no contexto das técnicas livres de malha conduziu-as a um grande desenvolvimento. Isto ocorreu porque a geração de malhas para representar geometrias complicadas em três dimensões é um sério problema nos métodos numéricos que discretizam o domínio. Em sua forma tradicional, o domínio é dividido em pequenas partes que se conectam, mas não se sobrepõem uma com a outra. A variável de interesse é aproximada dentro de cada elemento através de funções de interpolação, denominada comumente de funções de forma. Se algum elemento é fortemente distorcido, as funções de forma para esse elemento são de qualidade ruim e os resultados podem ter baixa precisão. Um esquema para resolver as distorções dos elementos consiste em remalhar o domínio, em razão do que foram desenvolvidas técnicas adaptativas. Essas técnicas, entretanto, encontram sérios problemas criados pela conectividade dos elementos.

Ressalta-se que em problemas de pequeno porte, a questão da conectividade pode não ser tão significativa. Todavia, nos casos tridimensionais, com extensa quantidade de dados, a eliminação da conectividade é um passo importante na redução do trabalho e do custo computacional.

Nos métodos sem malha não se usam elementos base ou células para delimitar e gerenciar o posicionamento e a conectividade dos graus de liberdade definidos pela discretização. As funções que aproximam o campo, essas sim podem demarcar uma região de influência. Os nós de cada região de influência podem ser distribuídos arbitrariamente e cada região pode e deve se sobrepôr às demais. Assim, discretiza-se o domínio de interesse através de um conjunto de nós, posicionados sem que exista explicitamente uma malha estruturada de elementos.

Uma das maneiras mais eficientes tanto para se gerar os pontos de discretização quanto para correlacionar os domínios de influência conforme essa última idéia consiste no emprego das RBFs. É possível utilizá-las tanto exclusivamente, quanto em conjunto com funções de interpolação referenciadas globalmente.

Além disso, a redução na dimensão matricial do sistema de equações pode ser adequadamente implementada com o uso de funções radiais de base compacta, ou seja, RBFs que limitam os domínios de influência, de modo tal que nem todos os pontos base necessariamente sobreponham informações com os demais, atenuando a questão do custo computacional.

4 INTERPOLAÇÃO COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL E O MEC

Embora exista atualmente uma numerosa quantidade de livros especializados na abordagem das TAM empregando as RBFs, não se pode identificar precisamente quando estas passaram a ser usadas ostensivamente na engenharia. Por isso, é oportuno destacar que [Nardini e Brebbia \(1982\)](#) aplicaram-nas na abordagem de certos problemas modelados com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), visando à eliminação de integrais de domínio. Aplicações dessa formulação, denominada formulação com Dupla Reciprocidade (FDR) foram muito bem sucedidas em vários problemas, ressaltando-se os problemas que apresentam um operador linear com um termo não-homogêneo na equação de governo. A integral de domínio resultante da operacionalização matemática desses termos não-homogêneos é transformada em integrais de contorno equivalentes pelo uso de funções auxiliares especiais que são devidamente aproximadas pelo uso de RBFs de suporte global.

O destaque dado ao MEC no estudo das funções de base radial é pertinente não apenas

pelo pioneirismo na aplicação prática dessa classe de funções; centenas de trabalhos científicos foram gerados por conta dessa temática. Para constar, ressaltam-se Yamada et al (1994), que mostraram conclusões matematicamente bem fundamentadas a respeito da convergência dos resultados obtidos com as RBFs no contexto da FDR; Karur e Ramachandran (1994), que apresentaram resultados de um estudo em que examinaram numericamente as propriedades de convergência das funções interpolação usualmente empregadas na FDR, obtendo resultados satisfatórios para as funções thin plate spline e RBF linear; o trabalho de Golberg e Chen (1994) mostrou uma maneira efetiva de construir uma expressão geral de interpolação empregando funções globais e locais, atualmente adotada nos modernos livros sobre o tema; e Partridge (2000) sintetizou conclusões de muitas experiências computacionais interessantes.

5 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DAS RBF'S

A formulação matemática das RBFs apresentada por Wong et al. (2002) é bastante simples. Seja $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $x_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, 2, \dots, N$, onde x_j são N pontos distintos. Seja, também, $\phi(x - x_j) = \varphi(\|x - x_j\|)$ uma função de base radial, onde o termo $\|x - x_j\| = r_j$ corresponde à distância Euclidiana entre x e x_j . É possível, portanto, uma aproximação $s(x)$ em $f(x)$ tal que:

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(x - x_j). \quad (1)$$

Onde α_j são coeficientes desconhecidos, que são determinados impondo-se:

$$s(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Por conseguinte, a equação (2) resultará no sistema de equações lineares na forma:

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x_1 - x_1) & \Phi(x_1 - x_2) & \dots & \Phi(x_1 - x_N) \\ \Phi(x_2 - x_1) & \Phi(x_2 - x_2) & \dots & \Phi(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_N - x_1) & \Phi(x_N - x_2) & \dots & \Phi(x_N - x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

Este, por sua vez, pode ser expresso em forma matricial como:

$$A\Psi = F. \quad (3)$$

Onde $A = [\Phi(x_i - x_j)]$ é uma matriz simétrica $N \times N$ chamada matriz de interpolação, $\Psi = [\alpha_j]$ e $F = [f(x_i)]$ são matrizes $N \times 1$.

O problema será bem posto, isto é, a solução existirá e será única, se e somente se a matriz A for não-singular. Micchelli (1986) provou que no caso de funções radiais simples, considerando pontos base distintos, a matriz de interpolação é sempre não singular.

No entanto, para que a matriz de interpolação produza resultados consistentes, a função Φ deverá ser positiva definida. Essa propriedade é facilmente observada no uso de RBFs de suporte global, desde que sejam usados argumentos baseados exclusivamente em normas euclidianas. Assim, uma função na forma:

$$\varphi = C - r_j. \quad (4)$$

Pode compor uma matriz de interpolação que não é positiva definida, dependendo dos valores da constante C com relação à r_j . A matriz é inversível, mas seus resultados são ruins. Existe ainda outro importante quesito, que está ligado à medida empregada para gerar a imagem dos

interpolantes. No caso de espaços euclidianos, essa medida corresponde à distância gerada a partir dos pontos base das funções, mas existem outras normas (Myers, 1988). No entanto, as distâncias geradas por interpolantes empregando exclusivamente potências pares (r^2 , r^4 , r^6 etc.) não geram interpolações consistentes, pelo que não são consideradas RBFs aplicáveis. Porém, se combinadas com outras funções podem ser efetivas em certas aplicações, como no caso das Thin Plate Splines ($r^2 \ln r$) (Partridge, 2000).

6 FUNÇÕES DE BASE RADIAL COMPACTA

Por conta da enorme proporção de dados requeridos nas modernas aplicações dos métodos aproximados, o emprego de RBFs de Suporte Compacto (CSRBFs) tem se ampliado consideravelmente.

Tais funções são não nulas apenas para valores de r delimitados a uma distância menor do que certo parâmetro arbitrário — o suporte — denominado δ .

O emprego das CSRBFs povoa as matrizes com vários elementos nulos, que podem ser adequadamente ignorados e resultar em economia de processamento computacional, ao mesmo tempo em que reduz o risco de mau condicionamento do problema.

Um importante exemplo de família de funções estritamente positivas de suporte compacto advém das funções exponenciais truncadas, dadas por:

$$\phi_l(r) = (1 - r)_+^l \quad (5)$$

Nesta última equação foi utilizada a função *cutoff* $(\cdot)_+$ que é definida como:

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Diferentemente das RBFs de suporte pleno, em que é muito simples eleger funções positivas definidas para qualquer s , demonstra-se que não existem funções univariáveis contínuas de suporte compacto estritamente positivas definidas e radiais em \mathbb{R}^s para todos os s (Fasshauer, 2007). Para que essa propriedade exista nas CSRBFs, é preciso que o expoente l satisfaça a seguinte expressão:

$$l = \lfloor s/2 \rfloor + 3k + 1$$

A família mais popular de CSRBFs atualmente em uso foi formulada por Wendland (1995). Este autor iniciou suas pesquisas empregando a função exponencial truncada e a partir dessa, gerou novas equações em outros espaços dimensionais, aplicando repetidamente o operador \mathcal{J} descrito a seguir:

$$(\mathcal{J}\phi)(r) = \int_r^\infty t\phi(t)dt \quad (6)$$

O suporte compacto de ϕ_l reduz a integral imprópria a uma integral definida que poderá ser resolvida por integração por partes. Na Tabela 1 são apresentadas algumas dessas funções.

$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1 - r)_+^2$	$C^0 \cap PD_3$
$\varphi_{3,1}(r) = \mathcal{J}^1 \varphi_3(r) \doteq (1 - r)_+^4(1 + 4r)$	$C^2 \cap PD_3$
$\varphi_{3,2}(r) = \mathcal{J}^2 \varphi_4(r) \doteq (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{3,3}(r) = \mathcal{J}^3 \varphi_5(r) \doteq (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	$C^6 \cap PD_3$

Tabela 1: Funções radiais de Wendland de suporte compacto $\varphi_{s,k}$ para $k = 0, 1, 2, 3$ e $s = 3$

O símbolo (\doteq) significa que a equação apresenta igualdade se for multiplicada por uma constante positiva.

Funções positivas definidas de base radial e suporte compacto que também apresentam a forma polinomial, como as funções de Wendland, são propostas no trabalho de Wu (1995).

A partir de uma função truncada que não é estritamente positiva definida, Wu aplica uma convolução para, então, obter uma função com tal característica. Assim, o autor gera uma família de funções utilizando um operador derivativo.

A função de base ϕ_l pode ser dimensionada para ter um suporte compacto em $[0, \delta j]$ pela substituição de r por $r/\delta j$ para $\delta j > 0$.

O fator de dimensionamento δ_j pode ser variável ou constante em diferentes centros ($j = 1, 2, \dots, N$) dependendo da natureza do problema. Um importante problema ainda não resolvido é encontrar um critério geral para determinar o valor ideal de δ_j . Quanto menor o valor de δ_j , maior o percentual de elementos nulos na matriz de interpolação; entretanto, isto resulta em menor precisão.

São apresentados a seguir vários testes com CSRBFs em duas dimensões visando representar duas funções distintas: a função de Franke e o parabolóide. Para ambas, são obtidos valores interpolados da imagem da função em pontos distintos dos pontos base e também determinado o volume compreendido sob a curva interpolada.

7 TESTES COMPUTACIONAIS COM A FUNÇÃO DE FRANKE

A função de Franke (Franke, 1982) é uma função padrão para teste bem conhecida na investigação de métodos de interpolação com dados esparsos. A figura 1 ilustra sua distribuição espacial enquanto sua expressão matemática é dada a seguir por:

$$f(x, y) = 0.75e^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10} \\ + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$$

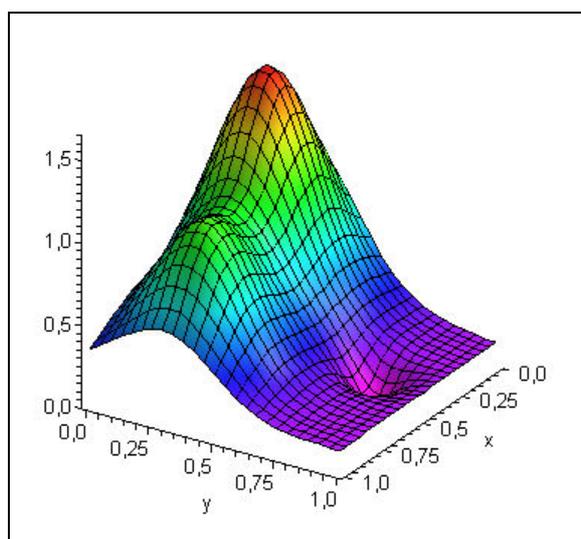


Figura 1: Função de Franke

Foram consideradas inicialmente duas malhas com 25 pontos interpolantes: a primeira delas com os pontos igualmente espaçados, sendo 16 no contorno e 9 no interior; e a outra com 25 pontos aleatórios gerados pela subrotina *haltonseq.m*¹ — escrito por Daniel

1 Tal programa pode ser obtido em MATLAB Central File Exchange.

Dougherty. Para melhor concepção, na figura 2 apresentam-se a distribuição dos pontos nos dois tipos de malha empregados.

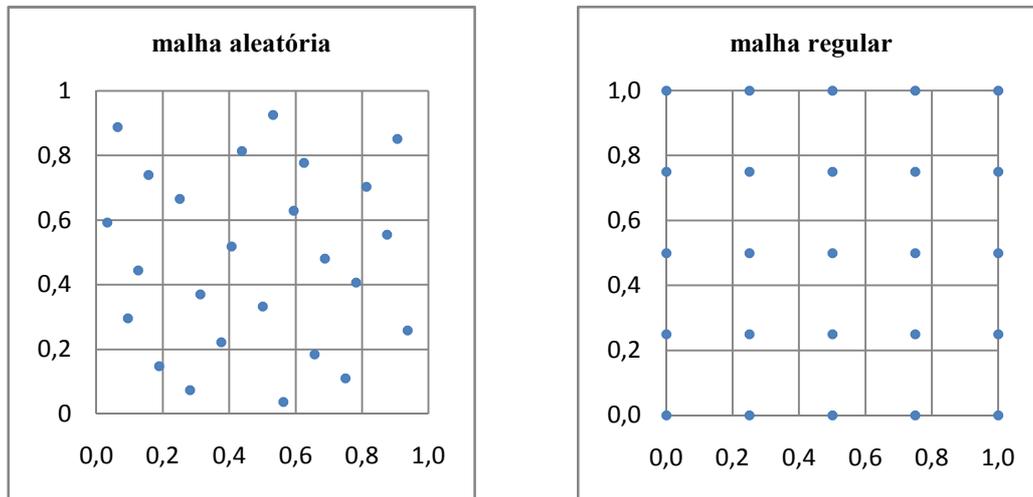


Figura 2: malha de pontos aleatórios (esq.), malha de pontos regulares (dir.)

Os pontos das malhas correspondem aos centros das funções de base radial de suporte compacto formuladas por Wendland e Wu.

7.1 Testes de avaliação do volume definido abaixo da superfície

O primeiro teste realizado determina o volume da superfície interpolada pelas funções. Para avaliação da precisão das funções, inicialmente foi tomado um suporte para a função de interpolação dado por ($\delta = 1,5$), definindo-a em um domínio bidimensional $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Desta forma, a função de interpolação apresenta suporte em todo o domínio. Os resultados para algumas funções de Wendland são apresentados na Tabela 2.

Função de Wendland	Malha regular		Malha Aleatória	
	Vol. Num.	Erro abs %	Vol. Num.	Erro abs %
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	0,59672113	2,8502	0,62004217	0,9466
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	0,59786104	2,6647	0,61399671	0,0377
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	0,59426580	3,2500	0,60728946	1,1297
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	0,61639277	0,3524	0,62109341	1,1177
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	0,62370024	1,5421	0,61784656	0,5891
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	0,61534150	0,1813	0,61953597	0,8641
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	0,62233189	1,3193	0,61700933	0,4528
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	0,62527728	1,7989	0,61391352	0,0512

Tabela 2: Interpolação com malha de 25 pontos em $[0,1]^2$. (Suporte $\delta = 1.5$)

O rendimento das funções é verificado através do erro absoluto percentual, computado a

partir do volume analítico ($V_{\text{anl}} = 0,614228126$) e do volume na interpolação. Assim, ao observar-se a Tabela 2, constata-se que os melhores resultados estão relacionados à malha de pontos aleatórios em comparação com os resultados obtidos pela malha de pontos igualmente espaçados. Apenas duas funções de Wendland forneceram resultados melhores para a malha regular.

Para a malha aleatória, pode-se destacar a função $\varphi_{3,0}(r)$, apresentando o melhor resultado; seguido da função $\varphi_{3,2}(r)$. Já na malha regular, o menor erro é fornecido pela função $\varphi_{3,1}(r)$. Eram esperados bons resultados para esta função $\varphi_{3,1}(r)$, pois é mencionada por Schaback (2007) como a mais precisa função radial positiva definida de suporte compacto.

A justificativa do comportamento expresso pela Tabela 2 fundamenta-se no fato de que os pontos situados nas regiões centrais do domínio concentram a maior parte do volume gerado abaixo da curva, de modo que os pontos de contorno têm pouca influência nesse cálculo. Logo, como a malha aleatória é formada de pontos situados no domínio, o volume do mesmo nessas condições foi representado com maior eficiência.

Dando seqüência, repetem-se os testes utilizando-se as funções de Wu.

Função de Wu	Malha regular		Malha Aleatória	
	Volume	Erro abs %	Volume	Erro abs %
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	0,63190092	2,8772	0,61639921	0,3535
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	0,62566650	1,8622	0,61745571	0,5255
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	0,61647279	0,3654	0,62032707	0,5720
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	0,59803941	2,6356	0,61071453	0,9929

Tabela 3: Interpolação com malha de 25 pontos em $[0,1]^2$. (Suporte: $\delta = 1.5$)

No tocante ao teste com 25 pontos, novamente os menores erros aplicam-se para a malha aleatória, pelas mesmas razões anteriores.

Assim, constata-se que, para as duas diferentes malhas (regular e aleatória), as funções que apresentam o menor erro não são iguais, tal como aconteceu para as funções de Wendland, pois que a função $\varphi_{0,3}(r)$ tomou a posição de melhor desempenho na malha aleatória e, analogamente, a função $\varphi_{2,3}(r)$ alcançou melhores resultados para a malha regular.

7.2 Testes de avaliação do valor da imagem da função de Franke

O cálculo de volumes apresenta dois sérios inconvenientes: no primeiro deles, é possível haver compensações de valores errôneos acima ou abaixo do valor exato, o que em termos de teste, não é desejável. A segunda razão é que em muitas funções-teste, o volume é preponderantemente gerado com base nos valores de domínio, conforme ocorreu no teste precedente com a função de Franke.

Assim, os resultados das Tabelas 4 e 5 comparam o Erro Médio Quadrático (EMQ) para os dois tipos de malhas abordados. O EMQ é calculado para um conjunto de pontos igualmente espaçados, que formam uma grade $[40 \times 40]$ no domínio bidimensional $[0,1]^2$.

Função de Wendland	EMQ malha regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	2,83137E-02	6,49944E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	2,90399E-02	7,36518E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$	3,35389E-02	6,99270E-02

$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	3,65216E-02	7,81939E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	3,66880E-02	7,82100E-02
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	5,87112E-02	7,02582E-02
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	5,99568E-02	8,73171E-02
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	6,00843E-02	5,82867E-02

Tabela 4: Interpolação com funções de Wendland, malha de 25 pontos em $[0,1]^2$ (Suporte: $\delta = 1.5$)

Agora, ao contrário dos resultados para os testes na determinação do volume, nos quais a malha de pontos aleatórios apresentou menores erros, os valores do EMQ mostrados na Tabela 4 ostentam melhores resultados para a malha regular. A razão disso provavelmente está ligada aos fatores anteriormente expostos, particularmente a distribuição predominante do volume no interior do domínio, que para o EQM tem importância ponderadamente menor. Vale ressaltar que a função $\varphi_{3,1}(r)$ apresenta o melhor resultado (menor EMQ) em ambas as malhas utilizadas.

Na Tabela 5, os mesmos experimentos foram novamente repetidos para as funções de Wu.

Função de Wu	EMQ malha regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8+\dots+5r^4)$	2,97182E-02	6,78403E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$	3,91023E-02	8,29019E-02
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5+\dots+5r^6)$	4,71556E-02	1,11437E-01
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16+\dots+5r^3)$	5,49928E-02	6,28686E-02

Tabela 5: Comparação entre o EMQ na interpolação com funções de Wu em malha de 25 pontos em $[0,1]^2$ (Suporte: $\delta = 1.5$)

Comparando-se os valores das Tabelas 4 e 5, notar-se-á que, geralmente, o EMQ obtido para as funções de Wendland foi ligeiramente menor que o EMQ obtido para as funções de Wu (para os 25 pontos de interpolação).

As funções de Wu também apresentam melhores resultados para a malha de pontos igualmente espaçados. Esse comportamento se explica devido ao erro de interpolação no contorno da malha de pontos aleatórios ser muito alto, enquanto a malha regular apresenta interpolação no contorno mais exata.

Surge também outro problema com esse tipo de análise, que é o fato de alguns valores analíticos serem próximos ou iguais a zero, o que distorce o perfil geral dos resultados. Para contornar isso, uma nova medida de erro foi inserida: o parâmetro EM%, no qual o valor da amplitude máxima da função de Franke foi introduzida no denominador. Além disso, foi acrescentado aos testes o parâmetro percentual não nulo da matriz de interpolação (% Não Nulo).

7.3 Influência da variação do suporte no erro no valor da imagem e no cálculo do volume gerado pela função de Franke

Nesses experimentos foram realizados testes utilizando-se uma função de Wendland e uma função de Wu, ambas de suavidade C^4 , estritamente positivas definidas e radiais em \mathbb{R}^3 , para possibilitar a comparação. Além disso, variou-se o suporte da função de interpolação proporcionalmente ao valor da diagonal (d) do domínio da função teste de Franke, conforme mostram as Tabelas 6 e 7.

Inicialmente foram testadas malhas com 25 pontos interpolantes igualmente espaçados.

Foram calculados erros tanto no cálculo da imagem da função quanto no volume compreendido abaixo da curva. O EMQ é o erro médio quadrático da função, calculado para um conjunto de pontos igualmente espaçados, que formam uma grade $[40 \times 40]$ no domínio bidimensional $[0,1]^2$. O EM% é uma medida semelhante à anterior, mas no denominador é aplicado o maior valor analítico da função.

Da Tabela 6, pode-se depreender que o melhor resultado foi obtido para o suporte igual à metade da diagonal do domínio para os três tipos de erros analisados. Este resultado não era esperado, visto que, quanto maior o suporte, a função radial torna-se menos compacta e mais pontos são introduzidos ao raio de ação de cada função.

O comportamento se repetiu para a função de Wu, conforme mostra a Tabela 7, sendo que para a malha de 25 pontos, o melhor suporte correspondeu ao valor de “d/2”.

SUPORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	2,77877E-01	12,2822	27,04	0,40659543	33,80%
$d/2 \approx 0,714$	2,74772E-02	1,2980	57,76	0,61639278	0,35%
$3d/4 \approx 0,893$	2,97928E-02	1,4070	74,40	0,61991259	0,93%
$d \approx 1,429$	3,30467E-02	1,5782	100,00	0,62211566	1,28%

Tabela 6: Interpolação com a função de Wendland $\phi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$; malha com 25 pontos igualmente espaçados em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	2,12000E-01	9,0957	27,04	0,46183219	24,81%
$d/2 \approx 0,714$	3,14404E-02	1,4784	57,76	0,62062562	1,04%
$3d/4 \approx 0,893$	3,36934E-02	1,5923	74,40	0,62319006	1,46%
$d \approx 1,429$	3,85701E-02	1,8414	100,00	0,62564854	1,86%

Tabela 7: Interpolação com a função de Wu $\phi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$; malha com 25 pontos igualmente espaçados em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

Nas duas tabelas anteriores observa-se que para suportes maiores que “d/4”, a função de Wendland supera a função de Wu nos resultados dos testes apresentados.

Repetindo-se esse mesmo teste para a malha de pontos aleatórios, os resultados dos testes estão mostrados nas tabelas 8 e 9. Neste caso, o suporte é variado proporcionalmente ao raio R da maior circunferência “vazia” (sem pontos base internos) que pode ser colocada nesta malha de 25 pontos.

Suporte	EMQ	EM %	% Não NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$R \approx 0,27$	3,54146E-01	15,7508	18,40	0,36014942	41,37%
$2R \approx 0,54$	8,96585E-02	3,1982	57,12	0,57592531	6,24%
$3R \approx 0,81$	4,17210E-02	1,7852	90,08	0,60399987	1,67%
$4R \approx 1,08$	5,16353E-02	2,2261	100,00	0,61246893	0,29%
$5R \approx 1,35$	6,48329E-02	2,5946	100,00	0,61606305	0,30%

Tabela 8: Interpolação com a função de Wendland $\phi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$; malha com 25 pontos aleatórios em $[0,1]^2$, variando-se o Suporte .

Analisando-se a Tabela 8, pode-se perceber que para o suporte igual a 3R o EMQ é mínimo, mas o erro em relação ao volume continua diminuindo até o valor de suporte de 4R. Por conseguinte, pode-se constatar que um pequeno erro no cálculo do volume não afirma que a interpolação foi mais exata, pois o cálculo deste pode ter sido deficiente em uma região, mas compensado pela soma algébrica de outra deficiência (de sinal oposto) em outra região.

Logo, o melhor suporte para as condições apresentadas neste teste pode ser considerado o de valor igual a 3R, que apresentou um menor EMQ, bem como menor erro médio percentual.

A tabela 9 apresenta os resultados dos testes repetidos para a função de Wu. Possuem características semelhantes aos obtidos pela tabela anterior, com a função de Wendland.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
R \approx 0,27	3,13832E-01	13,5576	18,40	0,39993408	34,89%
2R \approx 0,54	7,55796E-02	2,6313	57,12	0,58620484	4,56%
3R \approx 0,81	5,32940E-02	2,2309	90,08	0,60695833	1,18%
4R \approx 1,08	6,82038E-02	2,8308	100,00	0,61359794	0,10%
5R \approx 1,35	7,91013E-02	3,1141	100,00	0,61673482	0,41%

Tabela 9: Interpolação com a função de Wu $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$; malha com 25 pontos aleatórios em $[0,1]^2$, variando-se o Suporte .

A função de Wu alcançou um EMQ mínimo também no suporte de valor 3r. Constatou-se que o valor desse erro é um pouco maior que aquele obtido com a função de Wendland.

Comparando-se os resultados anteriores no que se refere ao desempenho da malha regular e aleatória, vê-se que: para a determinação do volume a malha aleatória teve desempenho melhor, enquanto para o cálculo da imagem (valor da função) a malha com pontos igualmente espaçados foi mais precisa tanto na medida EQM quanto na EM.

7.4 Teste estacionário no cálculo do erro no valor da imagem e no cálculo do volume gerado pela função de Franke

Os resultados mostrados nas tabelas 10 e 11 foram construídos fundamentados no que é denominado na literatura especializada por teste estacionário, ou seja, varia-se o suporte e também o número de pontos, mantendo-se constante determinada quantidade de pontos no interior do suporte. Considera-se um suporte inicial de ($\delta = d/2 = 0,714$) para $N = 25$ (número de pontos base na malha) de forma que um ponto central tenha um suporte de outros 24 pontos vizinhos. A partir daí aumenta-se o número de pontos (igualmente espaçados), reduzindo à metade a distância entre eles; simultaneamente, faz-se a redução do suporte, também à metade. Assim, o número de pontos em suporte permanece aproximadamente constante neste tipo de teste. A Tabela 10 apresenta resultados para a função de Wendland.

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	2,747720E-02	1,29802	57,76	0,61639278	0,35242%
81	1,395670E-02	0,58743	23,18	0,61652805	0,37444%
289	1,118360E-02	0,39092	7,47	0,61464143	0,06729%

Tabela 10: Interpolação estacionária em N pontos igualmente espaçados no domínio $[0,1]^2$ (25 pontos constantes em suporte) com a função de Wendland $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$.

Pode-se perceber que os resultados melhoram levemente com o acréscimo de pontos. A mesma simulação é feita para a função de Wu, conforme mostra a Tabela 11. Percebe-se, pela comparação entre as duas tabelas, o melhor desempenho da função de Wendland.

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,14404E-02	1,4784353	57,76	0,620625616	1,04155%
81	1,38316E-02	0,5789870	23,18	0,618164122	0,64080%
289	1,12248E-02	0,3570699	7,47	0,616304456	0,33804%

Tabela 11: Interpolação estacionária em N pontos igualmente espaçados no domínio $[0, 1]^2$ (25 pontos constantes em suporte) com a função de Wu $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$.

8 TESTES COMPUTACIONAIS COM A FUNÇÃO PARABOLÓIDE

Nos testes anteriores verificou-se que a função teste de Franke apresentava seu volume gerado preponderantemente pela região central do domínio. Com o propósito de se apresentar uma situação distinta dessa primeira, novos testes com o cálculo de volume são reproduzidos utilizando-se como função teste um parabolóide, cuja equação descrita por:

$$z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \quad (7)$$

A cota z é apresentada como uma função das variáveis x e y , definidas no campo bidimensional. A equação (8) representa uma figura na qual a concavidade está voltada para cima e o ponto de mínimo encontra-se no centro do domínio. Seu aspecto é mostrado na Figura 3:

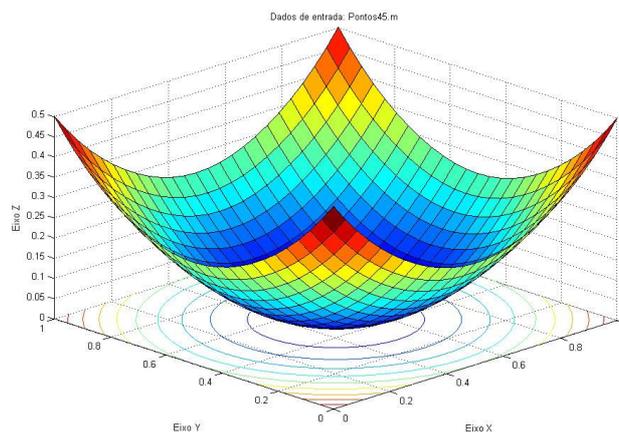


Figura 3: Parabolóide

8.1 Testes de avaliação do volume definido abaixo da superfície

Foram usadas as mesmas malhas – regular e aleatória - anteriormente apresentadas. Os resultados para ambas as malhas com as funções de Wendland são mostrados na Tabela 12. Os melhores resultados estão em negrito.

Função de Wendland	Malha regular		Malha aleatória	
	Vol. Num.	Erro abs %	Vol. Num.	Erro abs %
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	0,18573973	11,4438	0,15250057	8,4997
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	0,18232750	9,3965	0,15047529	9,7148
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	0,18247054	9,4823	0,14735118	11,5893
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	0,17163366	2,9802	0,16129534	3,2228
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	0,17166157	2,9969	0,16204047	2,7757
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	0,17431406	4,5884	0,15926304	4,4422
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	0,17325679	3,9541	0,16066774	3,5994
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	0,17314550	3,8873	0,16092985	3,4421

Tabela 12: Interpolação com malha de 25 pontos em $[0,1]^2$, (suporte: $\delta = 1.5$)

O desempenho das funções interpolantes na representação do parabolóide foi distinto do obtido para a função de Franke, reforçando a idéia que a afinidade da função interpolante com o tipo de função a ser interpolada é um fator muito importante, capaz de favorecer bons resultados para certas funções em detrimento de outras.

Para as funções de Wu, os resultados para ambas as malhas são mostrados na Tabela 13.

Função de Wu	Malha regular		Malha aleatória	
	Volume	Erro abs %	Volume	Erro abs %
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5+\dots+5r^6)$	0,16963381	1,7803	0,16363817	1,8171
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$	0,17129343	2,7761	0,16226463	2,6412
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8+\dots+5r^4)$	0,17393528	4,3612	0,15993689	4,0379
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16+\dots+5r^3)$	0,18093117	8,5587	0,14983492	10,0990

Tabela 13: Interpolação com malha de 25 pontos em $[0,1]^2$, (suporte: $\delta = 1.5$)

Observa-se um aumento da precisão dos resultados com o aumento da ordem da função interpolante e mais uma vez o perfil de desempenho é distinto do observado na interpolação da função de Franke.

8.2 Testes de avaliação do valor da imagem do parabolóide

Na Tabela 14 apresentam-se os erros cometidos na determinação dos valores imagem da função parabolóide.

Função de Wendland	EMQ malha regular	EMQ malha aleatória
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	1,33071E-02	3,00708E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	8,97056E-03	2,24293E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	1,11789E-02	2,51673E-02
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	8,37258E-03	1,99586E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	1,07832E-02	2,39979E-02
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	1,78958E-02	5,60128E-02
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	2,13589E-02	5,32600E-02
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	1,85939E-02	6,22679E-02

Tabela 14: Interpolação com funções de Wendland (malha de 25 Pontos) em $[0,1]^2$, (suporte $\delta = 1.5$)

Na tabela 15, os mesmos experimentos foram novamente repetidos para as funções de Wu.

Função de Wu	EMQ malha regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	1,25737E-02	2,78618E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	7,71888E-03	1,89366E-02
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	4,90930E-03	1,32675E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	1,77484E-02	5,61217E-02

Tabela 15: Comparação entre o EMQ com a função de Wu em malha de 25 pontos definidos em $[0,1]^2$, (suporte: $\delta = 1.5$)

8.3 Influência da variação do suporte no erro no valor da imagem e no cálculo do volume gerado pela função parabolóide

Na tabela 16 variou-se o suporte da função de interpolação proporcionalmente ao valor da diagonal (d) do domínio.

SUORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	5,26193E-02	7,8561	27,04	0,12972854	22,16%
$d/2 \approx 0,714$	3,60116E-02	5,3446	57,76	0,18784548	12,71%
$3d/4 \approx 0,893$	2,65815E-02	3,9643	74,40	0,18236232	9,42%
d \approx 1,429	1,21682E-02	1,8075	100,00	0,17383240	4,30%

Tabela 16: Interpolação com a função de Wendland $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$, malha de 25 pontos igualmente espaçados em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

O procedimento é repetido na construção da Tabela 17, utilizando-se a função de Wu.

SUORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	3,26850E-02	4,8628	27,04	0,14725839	11,64%
$d/2 \approx 0,714$	3,39812E-02	5,0837	57,76	0,18630850	11,79%
$3d/4 \approx 0,893$	1,98024E-02	2,9937	74,40	0,17865702	7,19%
d \approx 1,429	8,33334E-03	1,2478	100,00	0,17163615	2,98%

Tabela 17: Interpolação com a função de Wu $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$, malha de 25 pontos igualmente espaçados em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

Diferentemente do que ocorreu com a função de Franke, a representação mais precisa do parabolóide foi feita quando o suporte das funções radiais foi pleno, ou seja, englobando todo o domínio.

Repetidos para a malha de pontos aleatórios, esses testes estão presentes nas Tabelas 18 e 19. Neste caso, o suporte é variado proporcionalmente ao raio da maior circunferência “vazia” (sem pontos base internos) que pode ser colocada nesta malha de 25 pontos.

Suporte	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	1,48153E-01	19,8631	18,40	0,07877593	52,73%
$2r \approx 0,54$	8,94437E-02	9,9030	57,12	0,13464796	19,21%
$3r \approx 0,81$	5,61929E-02	5,5172	90,08	0,15055802	9,67%
$4r \approx 1,08$	3,87234E-02	3,5125	100,00	0,15669671	5,98%
$5r \approx 1,35$	2,89430E-02	2,5123	100,00	0,15962061	4,23%

Tabela 18: Interpolação com a função de Wendland $\phi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$, malha de 25 aleatórios em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	1,41987E-01	18,3910	18,40	0,08749471	47,50%
$2r \approx 0,54$	8,12251E-02	8,8093	57,12	0,13908666	16,55%
$3r \approx 0,81$	4,58102E-02	4,2860	90,08	0,15443203	7,34%
$4r \approx 1,08$	2,93069E-02	2,5068	100,00	0,15948090	4,31%
$5r \approx 1,35$	2,16197E-02	1,8209	100,00	0,16154931	3,07%

Tabela 19: Interpolação com a função de Wu $\phi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$, malha de 25 Pontos Aleatórios em $[0,1]^2$, variando-se o suporte.

8.4 Teste estacionário no cálculo do erro no valor da imagem e no cálculo do volume gerado pela função parabolóide

Os resultados das tabelas 20 e 21 foram construídos com base no teste estacionário abordado na [seção 7.4](#). Repetindo o já exposto: considera-se um suporte inicial de ($\alpha = d/2 = 0,714$) para $N = 25$ (número de pontos base na malha) de forma que um ponto central tenha um suporte de outros 24 pontos vizinhos. À medida que se aumenta o número de pontos, reduz-se, intencionalmente, à metade o valor do suporte, de modo que o número de pontos em suporte permaneça aproximadamente constante neste tipo de teste. A Tabela 20 apresenta resultados dessa natureza para a função de Wendland, enquanto a [Tabela 21](#) mostra os valores para a função de Wu.

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,601160E-02	5,3446	57,76	0,18784548	12,70729%
81	1,894510E-02	2,47331	23,18	0,17409691	4,45814%
289	1,062990E-02	1,11321	7,47	0,16935178	1,61107%

Tabela 20: Interpolação estacionária em N pontos igualmente espaçados no domínio $[0, 1]^2$ (25 pontos constantes em suporte) com a função de Wendland $\phi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$.

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,39812E-02	5,0837	57,76	0,18630850	11,78510%
81	1,91221E-02	2,5762	23,18	0,17401903	4,41142%
289	1,09291E-02	1,2081	7,47	0,16961591	1,76955%

Tabela 21: Interpolação estacionária em N pontos igualmente espaçados no domínio $[0, 1]^2$ (25 pontos constantes em suporte) com a função de Wu $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)^2(6 + \dots + 5r^5)$.

9 CONCLUSÕES

O emprego de funções base radial com suporte compacto vem ao encontro da necessidade de redução das dimensões dos sistemas matriciais gerados por métodos numéricos tradicionalmente empregados na obtenção de soluções aproximadas, usualmente incluídos na classe das técnicas em multivariáveis. Isto porque as CSRBFs limitam os domínios de influência de cada função de aproximação, de modo tal que nem todos os pontos base necessariamente sobreponham informações uns com os outros. Por conta da enorme proporção de dados requeridos nas modernas aplicações dos métodos aproximados, o emprego de funções com essas características tem se ampliado consideravelmente, devido à atenuação do problema de custo computacional.

Nos métodos direcionados à solução de equações diferenciais, as CSRBFs ganharam enorme impulso por conta também do enorme custo computacional requerido na geração de malhas em três dimensões, onde a eliminação da idéia de conectividade é uma etapa básica na redução do custo e das dificuldades envolvidas na otimização da malha via esquemas adaptativos. Uma questão importante, na qual se fundamentou esse trabalho é verificar se com o uso de tais funções há perda significativa da precisão dos resultados.

Experiências diversas com RBFs com base plena mostraram acuidade bastante satisfatória, colhidas inclusive em aplicações mais sofisticadas, como no caso do MEC, onde funções primitivas das funções interpolantes básicas precisam ser empregadas.

No caso das CSRBFs, o elenco de funções capazes de oferecer resultados satisfatórios é bem mais reduzido e uma série de particularidades se apresentam.

Em geral, nos exemplos aqui resolvidos, a precisão das CSRBFs de Wendland e Wu foi bastante razoável, considerando que os suportes não foram muito reduzidos. Tais funções obedecem a quesitos matemáticos importantes, que garantem soluções razoáveis como funções interpolantes. Nos casos resolvidos, as funções de Wendland tiveram melhor desempenho. Ressalta-se, entretanto, que a natureza do problema é aspecto fundamental na expectativa de boa aproximação no caso do emprego dessas funções. Existem funções ou distribuições de dados que são mais bem representados do que outras, e a priori não se pode identificar rigorosamente que tipo de função deve-se empregar. Verificou-se que as melhores funções para representação do Parabolóide não foram as mesmas que aproximaram a função de Franke com maior precisão.

Para superar tal incerteza, é preciso adicionar procedimentos numéricos iterativos, nos quais se identifiquem regiões de maior demanda de pontos base, através de medidas de resíduos originadas, por exemplo, da comparação da resposta obtida com duas aproximações por funções distintas. Identificadas essas regiões, pode-se efetivar um refinamento sem desperdício do tempo computacional. O procedimento inverso também pode ser feito, dependendo do interesse: reduzir a quantidade de pontos base (diminuindo assim o tamanho do sistema matricial) nas regiões mais regulares, com menores gradientes.

REFERÊNCIAS

- Buhmann, M.D., *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. 1ed. New York: Cambridge University Press, 2003.
- Burden, R. L., and Faires, J.D., *Análise Numérica*. 1ed. São Paulo: Thomson, 2003.
- Fasshauer, G.E., *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. 1ed. Singapura: World Scientific Publishers, 2007.
- Franke, R., Scattered data interpolation: test of some methods. *Mathematics of Computation*, California, USA, v. 38 n. 157: 181-200, 1982.
- Golberg, M.A., and Chen, C.S., The Theory of Radial Basis Functions applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential equations. *BE Communication* 5: 57-61, 1994.
- Karur, S.R., and Ramachandran, P.A., Radial Basis Function Approximation in the Dual Reciprocity Method. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 20, 7: 59-70, 1994.
- Micchelli, C.A., Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally positive definite Functions. *Constructive Approximation*, 2: 11-22, 1986.
- Myers, D.E., Interpolation with positive definite functions. *Sci. de la Terre*, 28: 251-265, 1988.
- Nardini, D., and Brebbia, C.A., A New Approach for Free Vibration Analysis using Boundary Elements. *Boundary Element Methods in Engineering*, (Ed C. A. Brebbia), 312-326, 1982.
- Partridge, P.W., Toward Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method. *1st Brazilian seminar on the Boundary element Method in Engineering*, 9-14, COPPE/UFRJ, 2000.
- Schaback, R., A practical guide to Radial Basis Functions. <http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/texte/approx/sc.pdf>, 2007.
- Wendland, H., Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. in Comput. Math.*, 4: 389-396, 1995.
- Wong, S.M., Hon, Y.C., and Golberg, M.A., Compactly supported radial basis functions for shallow water equations. *Applied Mathematics and Computation*, New York, USA, v.127, 1: 79-101, 2002.
- Wu, Z., Compactly supported positive definite radial functions, *Adv. In Comput. Math.* 4: 283-292, 1995.
- Yamada, T., Wrobel, L.C., and Power, H., On the Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Element*, 13: 291-298, 1994.
- Zakhor, A., and Alvstad, G., Two-Dimensional Polynomial Interpolation from Nonuniform Samples, *IEEE Transactions on Signal Processing*. 40: 169-180, 1992.