

COMPARANDO DIFERENTES IMPLEMENTAÇÕES DO MÉTODO KURGANOV-TADMOR E DO ESQUEMA UPWIND PARA A SOLUÇÃO DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS

Gustavo M. Teixeira, Rodrigo W. dos Santos e Maicon Correa

Mestrado em Modelagem Computacional (MMC), Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora/MG, Brazil, <http://www.mmc.ufjf.br>

Palavras Chave: Meios Porosos, KT, Upwind, escoamento Bifásico, IMPES.

Resumo. A simulação de reservatórios é uma das mais poderosas técnicas disponíveis na engenharia de reservatórios. Simuladores de reservatórios são baseados em modelos matemáticos para prever o escoamento dos fluidos através do meio poroso. Modelos água-óleo incompressíveis são baseados em sistemas de equações diferenciais parciais em três variáveis: campo de velocidade, pressão e saturação dos fluidos. O problema consiste de um sistema de equações elípticas e hiperbólicas. O método IMPES (*Implicit Pressure - Explicit Saturation*) clássico é utilizado para desacoplá-las. A equação implícita pode envolver em largos passos de tempo, de forma que em cada solução da equação da pressão, a hiperbólica precisa ser reavaliada várias vezes, sempre respeitando as condições de CFL, um fator limitando do método explícito. Nesse trabalho comparamos o método Kurganov-Tadmor e o Esquema Upwind usando três diferentes métodos para aproximar a solução da equação do transporte: método de Euler Explícito, *Backward Differentiation Formulas* (BDF) e Adams-Moulton. O Esquema Upwind é um método de primeira ordem de volumes finitos enquanto o Kurganov-Tadmor (KT) é um método central de segunda ordem de alta resolução. Testes foram realizados utilizando diferentes tipos de condições iniciais e diferentes funções de fluxo linear e não linear. Os resultados foram comparados com soluções precisas para medir a quantidade de erro numérico introduzida por cada método. Observamos que os erros numéricos obtidos pelo método Upwind podem ser maiores que os obtidos pelo KT. Resultados preliminares mostram também que o KT é um método menos difusivo. Nosso trabalho sugere que o uso do método KT em associação com o IMPES resulta em um método mais preciso. Por outro lado, o método KT é computacionalmente mais caro que o Esquema Upwind. Contudo, ao se comparar o tempo entre resultados com erros numéricos semelhantes, o KT chega a ser mais de três vezes mais rápido.

1 INTRODUÇÃO

O estudo de escoamento em meios porosos é um enorme desafio devido às características físicas dos reservatórios, geralmente encontrados a grandes profundidades e possuindo extensões quilométricas ao passo que características microscópicas também são fatores cruciais no desenvolvimento desse processo. Como a extração de petróleo em reservatórios é um processo de extrema complexidade e que envolve altos custos, a simulação através de modelos computacionais é vista como uma alternativa no estudo das características desse meio.

Um simulador de reservatórios de petróleo é capaz de reproduzir as leis físicas que regem o escoamento de fluidos através de sistemas equações diferenciais parciais. No entanto, essas simulações envolvem desafios computacionais. Nesse trabalho nos aprofundamos um pouco mais nessa questão e comparamos uma técnica tradicional na solução dessas equações, chamado esquema Upwind, com uma nova abordagem proposta por [Kurganov e Tadmor \(2000\)](#) para a solução de equações hiperbólicas.

2 MODELAGEM NUMÉRICA

2.1 Fluxo Bifásico

Antes de entrar discutir os métodos numéricos comparados nesse trabalho, é necessário descrever a modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos. Considerando apenas as fases água e óleo escoando em um meio poroso incompressível, temos um sistema de equações no qual as variáveis são a pressão e a saturação da água e do óleo. O meio totalmente saturado possui saturação 1 ($s_o + s_w = 1$), sendo s_w e s_o a saturação da água e do óleo e p_w e p_o a pressão da água e do óleo, respectivamente. Além disso, simplificamos a diferença de pressão na interface entre água e óleo tomando-a como zero (pressão capilar nula: $p_w = p_o = p$). Omitiremos o subscrito s_w e trataremos apenas da saturação da água ($s = s_w$). Temos então a seguinte equação de conservação de massa para água e óleo:

$$\begin{cases} \phi \partial_t s + \nabla \cdot (f(s)v(s, p)) = q_w, \\ \nabla \cdot v(s, p) = q_t, \end{cases} \quad (1)$$

onde q_w é a densidade de fluxo da água onde há poços (injetores ou produtores) e q_t é a densidade de fluxo total ($q_t = q_w + q_o$); $f(s)$ é o fluxo fracionário e v é a velocidade total $v_a + v_o = v$. O fluxo fracionário $f(s)$ é uma divisão da transmissibilidade da água $\left(T_w = K \frac{k_{rw}}{\mu_w}\right)$ pela transmissibilidade total definida na Eq. 2:

$$T = K \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \quad (2)$$

onde k_{rw} e k_{ro} são funções de s ; e μ_w e μ_o são as viscosidades da água e do óleo, respectivamente.

A equação da velocidade total se baseia na Lei de Darcy e é escrita como:

$$v(s, p) = -K \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \nabla p. \quad (3)$$

A permeabilidade absoluta (K) e a porosidade do meio ϕ variam apenas espacialmente.

Apenas reservatórios isolados são considerados nesse trabalho, o que significa dizer que a velocidade é nula ($v = 0$) nas bordas de Ω , ou seja $v \cdot \nu = 0$, $x \in \partial\Omega$ com ν sendo o vetor normal à borda $\partial\Omega$ do domínio Ω .

As condições iniciais empregadas serão especificadas na descrição de cada problema simulado.

2.2 Esquema IMPES

O sistema de equações mostrado pela Eq. 1 é altamente acoplado e não-linear. Nesse trabalho empregamos a técnica conhecida como *Improved IMPES Method* (veja Chen et al. (2004)) para quebrar o sistema em duas equações separadas que podem ser resolvidas em sequência. O Método IMPES (*Implicit Pressure - Explicit Saturation*) obtém a solução para a equação elíptica (pressão) e então a solução para a equação hiperbólica (saturação).

A pressão é calculada em cada passo de tempo $n = 0, 1, 2, \dots, N$ sendo esses espaços com diferentes tamanhos Δt_p . A saturação é calculada a partir do tempo n da pressão até o próximo instante quando a pressão será reavaliada $n + \Delta t_p$. O passo de tempo da saturação (Δt_s) é então, uma fração do tempo da pressão e reavaliado a cada interação ($l = n, l = n + \Delta t_s, \dots, l = n + 1$), respeitando sempre as condições de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

As condições de CFL e a difusão numérica são problemas conhecidos quando se resolvem equações hiperbólicas. Deixaremos de lado a equação elíptica e manteremos o foco na equação da saturação.

2.3 Esquema Upwind

Métodos de volumes finitos podem ser usados para a discretização de equações diferenciais. Primeiramente é necessário dividir o volume de trabalho em unidades menores de espaço para trabalhar com blocos menores e com suas interfaces de contato. Utilizando essa divisão é possível aproximar a solução substituindo operadores discretos nas equações originais. Cada posição desses blocos é identificada na malha pela suas variáveis i e j nas coordenadas x e y , e suas interfaces a direita e acima são identificadas por $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$, respectivamente.

Com o objetivo de solucionar tanto a equação da saturação quanto da velocidade é necessário calcular a transmissibilidade (Eq. 2). Esse cálculo é feito em duas etapas: o cálculo da permeabilidade absoluta (K) e da permeabilidade relativa nas interfaces. A permeabilidade absoluta é definida no centro de cada bloco, portanto para aproximar seus valores na interface, é usada uma média harmônica, como mostra a Eq. 4:

$$K_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{2K_{i,j}K_{i+1,j}}{K_{i,j} + K_{i+1,j}}, \quad (4)$$

As permeabilidades relativas (k_{rw} and k_{ro}) dependem da saturação (s) que é definida no centro do bloco. Então temos uma interface para um par de blocos, ou seja, precisamos de um critério de seleção para definir de qual bloco a saturação será utilizada. O Esquema Upwind define esse critério escolhendo a saturação dependendo da velocidade de propagação da interface. No trecho de código a seguir é exemplificado como esse processo é feito na interface $(i + \frac{1}{2}, j)$:

```

1: if  $p_{i+1,j} > p_{i,j}$  then
2:    $s_{i+1/2,j} \leftarrow s_{i+1,j}$ 
3: else
4:    $s_{i+1/2,j} \leftarrow s_{i,j}$ 
5: end if

```

Em Eq. 1, a saturação está variando no tempo e no espaço bidimensionalmente. Discretizando

somente o espaço obtemos uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), como mostra a Eq. 5:

$$\frac{d}{dt} s_{i,j} = -\frac{1}{\phi_{i,j}} \left(\nabla \cdot (f(s_{i,j})v(s_{i,j}, p_{i,j})) - q_{w_{i,j}} \right). \quad (5)$$

Na Seção 3 entraremos em maiores detalhes nos métodos de resolução de EDOs utilizados para aproximar essa equação.

2.4 Método de Kurganov-Tadmor

O Método numérico de Kurganov-Tadmor (KT) é uma extensão de segunda ordem do Método de Rusanov, que também faz uso da velocidade local de propagação. Eles diferem apenas na etapa de Reconstrução, onde o KT aproxima a solução por uma reconstrução linear por partes de segunda ordem ao invés de uma reconstrução de uma função constante por partes (veja Rusanov (1970); Kurganov e Tadmor (2000); Ribeiro (2007)).

O Método KT se aproveita dos melhores recursos oferecidos por métodos centrados: a simplicidade de usá-los como um caixa-preta para resolver problemas gerais de leis de conservação. Além disso, o KT não requer o cálculo das integrais de Riemann, portanto sua implementação e generalização para sistemas multidimensionais complicados são consideravelmente simples. Outra vantagem apresentada pelo KT é uma quantidade pequena de difusão numérica em comparação com o Esquema de Nessyahu-Tadmor (NT), que ao contrário do KT não pode ser escrito na forma semi-discreta quando $\Delta t \rightarrow 0$ (veja Kurganov e Tadmor (2000); Nessyahu e Tadmor (1990)).

A formulação para duas dimensões do método KT se dá através da soma dos fluxos nas direções x e y . A Eq. 6 mostra como é o fluxo em ambas as direções:

$$\frac{d}{dt} S_{i,j} = -\frac{H_{i+1/2,j}^x - H_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} - \frac{H_{i,j+1/2}^y - H_{i,j-1/2}^y}{\Delta y}, \quad (6)$$

onde os fluxos nas direções x e y são representados por Eq. 7:

$$\begin{aligned} H_{i+1/2,j}^x &= \frac{v_{i+1/2,j}^x f(S_{i+1/2,j}^+) + v_{i+1/2,j}^x f(S_{i+1/2,j}^-)}{2} - \frac{a_{i+1/2,j}^x}{2} (S_{i+1/2,j}^+ - S_{i+1/2,j}^-), \\ H_{i,j+1/2}^y &= \frac{v_{i,j+1/2}^y f(S_{i,j+1/2}^+) + v_{i,j+1/2}^y f(S_{i,j+1/2}^-)}{2} - \frac{a_{i,j+1/2}^y}{2} (S_{i,j+1/2}^+ - S_{i,j+1/2}^-). \end{aligned} \quad (7)$$

O valor intermediário $S_{i+1/2,j}^+$ é o valor da saturação aproximada sobre a solução na malha deslocada, como mostra a Eq. 8.

$$S_{i+1/2,j}^+ = S_{i+1,j} - \frac{\Delta x}{2} (S_x)_{i+1,j}. \quad (8)$$

De maneira similar a reconstrução na coordenada y é feita (Eq. 9):

$$S_{i,j+1/2}^+ = S_{i,j+1} - \frac{\Delta y}{2} (S_y)_{i,j+1}. \quad (9)$$

As velocidades locais de propagação $a_{i+1/2,j}^x$ são dadas por:

$$\begin{aligned} a_{i+1/2,j}^x &= \max\{|v_{i+1/2,j}^x f'(S_{i+1/2,j}^+)|, |v_{i+1/2,j}^x f'(S_{i+1/2,j}^-)|\}, \\ a_{i,j+1/2}^y &= \max\{|v_{i,j+1/2}^y f'(S_{i,j+1/2}^+)|, |v_{i,j+1/2}^y f'(S_{i,j+1/2}^-)|\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Aproximar as derivadas de $(S_x)_{i,j}$ e $(S_y)_{i,j}$ requer o uso do limitador de fluxo *MinMod* (van Leer (1979)) mostrado na Eq. 11.

$$(S_x)_{i,j} = \text{MinMod} \left(\theta \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{S_{i+1,j} - S_{i-1,j}}{2\Delta x}, \theta \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{\Delta x} \right), \quad (11)$$

e é feito de maneira análoga para a coordenada y . O valor de θ deve estar no intervalo $1 < \theta < 2$ e no nosso trabalho adotamos $\theta = 1.8$. O operador $\text{MinMod}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n)$ é definido de acordo com a seguinte expressão:

$$\text{MinMod}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) = \begin{cases} \min q_i, & \text{if } q_i > 0 \forall i, \\ \max q_i, & \text{if } q_i < 0 \forall i, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (12)$$

Como foi visto na Eq. 3 é necessário avaliar a transmissibilidade em cada uma das interfaces entre os blocos da malha. No entanto, para calcular a permeabilidade relativa não é possível utilizar o mesmo esquema empregado no Upwind (2.3) para escolher a saturação. Como o KT é um esquema centrado é possível então, calcular a transmissibilidade (Eq. 2) através da média harmônica utilizada na Eq. 4 anteriormente:

$$T_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{2T_{i,j}T_{i+1,j}}{T_{i,j} + T_{i+1,j}}, \quad (13)$$

Então, a Eq. 13 aproxima as permeabilidades nas interfaces enquanto o gradiente de pressão é calculado por diferenças finitas.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUACOES DIFERENCIAIS

Esse trabalho compara três diferentes *solvers* (Euler Explícito, Adams-Moulton e *Backwards Differentiation Formulas*) para integrar a forma discreta das equações diferenciais do KT e Upwind (Eq. 5 e Eq. 6). Essa seção irá descrever de maneira sucinta esses métodos de resolução de EDOs.

Estamos solucionando problemas de valor inicial (PVI) de EDOs em duas dimensões, que escrevemos na seguinte forma:

$$\dot{y} = f(t, y), y(t_0) = y_0, \quad (14)$$

onde \dot{y} representa dy/dt .

3.1 Euler Explícito

O método de Euler Explícito funciona substituindo os dois primeiros termos da Expansão de Taylor nas equações acima (14) resultando na fórmula geral do Método de Euler Explícito:

$$y^{n+1} = y^n + h_n f(t, y), \quad (15)$$

onde $h_n = t_{n+1} - t_n$ e h_n devem respeitar as condições de CFL (veja Xavier (2009); Amorim (2009)).

Considerando o tempo de simulação T , temos o intervalo de tempo (n, l) onde $0 < t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ com subintervalos $J^n = (t^{n-1}, t^n]$ de tamanho $\Delta t_p^n = t^n - t^{n-1}$ que é utilizada para a pressão e um intervalo $J^{n,l} = (t^{n-1,l-1}, t^{n-1,l}]$ onde $\Delta t_s^{n,l} = t^{n-1,l} - t^{n-1,l-1}$, $l = 1, \dots, L^n$

e $t^{n-1,l} = t^{n,0}$. Temos portanto um passo de tempo para a pressão (Δt_n) e outro para a saturação ($\Delta t_{n,l}$).

O método de Euler Explícito abordado nesse trabalho utiliza passos de tempos adaptativos para manter a estabilidade, recalculando o tamanho do passo em toda iteração. Para que o problema respeite as condições de CFL é necessário termos então:

$$\begin{aligned} \max f'(s_m) \sum_m \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta m} |v_m^n| &\leq \rho_1, \\ s_{i,j}^{n,l} + \rho_2 \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi} (q_a^{n,l} (1 - f(s_{i,j}^{n,l}))) &< 1 - s_{o,res} \end{aligned} \quad (16)$$

onde m indica as interfaces com fluxo entrante, Δ_m podendo ser Δ_x ou Δ_y ; s_m se encontra entre o menor e o maior valor de s no bloco e seus vizinhos no instante (n, l) , $0 < \rho_1 < 1$ é um parâmetro a ser escolhido, assim como $\rho_2 > 1$; $s_{o,res}$ é a saturação residual do óleo.

Para garantir que a resolução pelo método de Euler Explícito respeite as condições de CFL temos que garantir que essas desigualdades sejam respeitadas. Temos então a primeira linha de Eq. 16 para blocos sem poços ou poços produtores e a segunda linha para blocos com poços injetores. Para maiores detalhes da dedução dessa fórmulas, ver [Xavier \(2009\)](#); [Amorim \(2009\)](#).

3.2 Adams-Moulton (AM)

Os métodos de Adams-Moulton e *Backwards Differentiation Formulas* foram empregados nesse trabalho através da biblioteca Sundials CVODE. Os métodos do CVODE são de ordem variável, multi-passos variáveis e baseados em equações da forma (veja [Hindmarsh e Serban \(2009\)](#)):

$$\sum_{i=0}^{K_1} \alpha_{n,i} y^{n-i} + h_n \sum_{i=0}^{K_2} \beta_{n,i} \dot{y}^{n-i} = 0. \quad (17)$$

onde y^n são aproximações de $y(t_n)$ e $h_n = t_n - t_{n-1}$. O método de Adams-Moulton tem $K_1 = 1$ e $K_2 = q$ onde q está entre 1 e 12. O sistema linear na Eq. 18 abaixo precisa ser solucionado.

$$G(y^n) \equiv y^n - h_n \beta_{n,0} f(t_n, y^n) - a_n = 0, \quad (18)$$

onde $a_n \equiv \sum_{i>0} (\alpha_{n,i} y^{n-1} + h_n \beta_{n,i} \dot{y}^{n-i})$, deve ser resolvido a cada passo de tempo. O método de Adams-Moulton se utiliza de iterações funcionais para solucionar esse problema:

$$y^{n(m+1)} = h_n \beta_{n,0} f(t_n, y^{n(m)}) + a_n. \quad (19)$$

O controle do tamanho do passo de tempo de cada iteração nos métodos resolvidos pelo CVODE são calculados internamente pela biblioteca, portanto não é necessário manter nenhum controle a respeito das condições de CFL. Os passos de tempo do CVODE são adaptativos e calculados através de estimativa dos erros locais gerados. Sempre que o teste de erro local falha o tamanho do passo de tempo é recalculado e o passo é refeito. Para maiores detalhes ver [Hindmarsh e Serban \(2009\)](#).

É importante notar também que o CVODE oferece a opção de controlar as tolerâncias relativas e absolutas do erro de ambos os métodos AM e BDF. Essas tolerâncias são utilizadas no processo de controle de erros em vários níveis, como o erro permitido em cada iteração, e também influenciam no tamanho do passo de tempo tomado pelos métodos.

3.3 Backwards Differentiation Formulas (BDF)

Novamente a Eq. 17 é usada, porém desta vez com $K_1 = q$ e $K_2 = 0$ onde q está entre 1 e 5. O sistema linear em Eq. 18 deve ser solucionada, mas agora o Método de Newton é usado:

$$\begin{aligned} M[y^{n(m+1)} - y^{n(m)}] &= -G(y^{n(m)}), \\ M &\approx I - \gamma J, \quad J = \partial f / \partial y, \quad \text{and } \gamma = h_n \beta_{n,0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Para solucionar o método de Newton, o CVODE oferece duas maneiras de solucionar o sistema linear: métodos diretos que utilizam uma aproximação matricial densa, diagonal ou em banda para o Jacobiano, ou métodos iterativos como o GMRES, o Bi-Gradiente Conjugado ou o método *Transpose-Free Quasi-Minimal Residual* (TFQMR). Nesse trabalho, o método que ofereceu melhores resultados foi o GMRES (*Generalized Minimal Residual method*), portanto vamos considerar apenas os resultados gerados por ele.

4 METODOLOGIA

A implementação do método KT utilizou como base um simulador previamente implementado utilizando o Esquema Upwind por Xavier (2009); Amorim (2009). Todos os códigos foram escritos em linguagens C/C++ e algumas soluções (Adams-Moulton e BDF) fazem uso das biblioteca CVODE (veja Hindmarsh e Serban (2009)) para solucionar o problema hiperbólico e PETSc (veja Balay et al. (2008)) para a solução do problema elíptico. Os tempos foram medidos em ambiente Linux (distribuição Ubuntu 9.10) em uma máquina com 8GB de memória RAM e processador Intel Core I7 860 com 2.80GHz. Para computar os tempos de maneira mais precisa, cada uma das simulações foi repetida três vezes e consideramos a média desse tempo.

Para comparar a capacidade de cada um dos métodos de solucionar os problemas, dois tipos diferentes de experimentos foram realizados. Em um deles utilizou-se funções de permeabilidade relativa para a água e óleo de forma que a função de fluxo fracionário $f(s)$ se tornasse linear. Dessa forma, podemos comparar as soluções numéricas obtidas pelos métodos com a solução analítica do problema. No outro caso utilizamos um problema bastante famoso na área de reservatório de petróleo o *five-spot* (*five-spot*).

A Norma L2 foi utilizada para calcular o erro gerado por cada um dos métodos, seguindo a fórmula da Eq. 21:

$$e = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j (s_{i,j} - \bar{s}_{i,j})^2}}{\sqrt{\sum_i \sum_j (\bar{s}_{i,j})^2}}, \quad (21)$$

onde $s_{i,j}$ é a solução numérica do simulador na posição (i, j) e $\bar{s}_{i,j}$ a solução analítica do problema nessa mesma posição.

Diferentes tolerâncias foram testadas ($1.0e^{-1}$, $1.0e^{-3}$ e $1.0e^{-9}$) para os métodos do CVODE mas os resultados com tolerância maior que $1.0e^{-9}$ apresentaram inconsistências (como saturação negativa) e portanto foram descartados e apenas os resultados com tolerância $1.0e^{-9}$ foram considerados. Somente o método BDF se comportou de maneira estável para qualquer valor de tolerância, e apenas no caso do fluxo linear para o Esquema Upwind. Isso é facilmente explicado pelo fato de o Esquema Upwind ser um método incondicionalmente estável para fluxos lineares.

4.1 Fluxo fracionário linear

Nessas simulações, definimos as seguintes equações para as permeabilidades relativas:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= s, \\ k_{ro} &= 1 - s. \end{aligned} \quad (22)$$

Além disso, definimos um reservatório isolado, isto é, sem poços, de dimensões 4×4 m e sujeito a uma velocidade $v = (v^x, v^y)$ constante e diagonal $v^x = v^y = 1$.

As viscosidades da água e óleo iguais a um ($\mu_w = \mu_o = 1$), saturação residual do óleo e saturação irreduzível da água iguais a zero ($s_{wi} = s_{or} = 0$) com permeabilidade absoluta ($K = 1$) e porosidade constante ($\phi = 1$).

Como solução inicial, geramos uma malha com valores nulos exceto para a região com $1 < x < 2$ e $1 < y < 2$. Após 1s de simulação temos um deslocamento diagonal de uma posição na malha para x e y . Para esse caso é conhecida a solução analítica, ou seja, pode-se comparar a resolução numérica obtida pelo simulador com o resultado analítico. A Fig. 1 mostra o deslocamento executado por essa simulação.

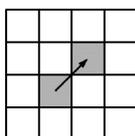


Figura 1: Deslocamento da solução inicial

Para cada um dos métodos (KT e Upwind) foram feitas simulações com malhas de três diferentes tamanhos (100×100 , 200×200 e 300×300).

4.2 Five-spot

Problemas do tipo *five-spot* são conhecidos na extração de petróleo como reservatórios com 5 poços perfurados, sendo um centralizado e outros quatro poços, cada um em uma extremidade. Neste exemplo, o poço centralizado é o chamado poço produtor, de onde se pretende recolher o óleo extraído e outros quatro poços são injetores de água (veja Fig 2). Na simulação do problema *five-spot* definimos as seguintes permeabilidades relativas para água e óleo:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= 0.4 \left(\frac{s - s_{wi}}{1 - s_{or} - s_{wi}} \right)^2, \\ k_{ro} &= 0.8 \left(\frac{1 - s - s_{or}}{1 - s_{or} - s_{wi}} \right)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

onde $s_{wi} = 0.2$ é a saturação irreduzível da água e $s_{or} = 0.2$ é a saturação residual do óleo. A viscosidade da água vale 1 ($\mu_w = 1.0cp$) e a viscosidade do óleo 5 ($\mu_o = 5.0cp$).

Dessa vez, foi utilizado um reservatório de tamanho 200×200 m com altura de $h = 20$ m, porosidade constante igual a 0.2 ($\phi = 0.2$) e permeabilidade constante igual a $100mD$. Em cada um dos poços injetores são injetados $Q_{inj} = 100.0m^3/dia$ e produzidos $Q_{prod} = -400.0m^3/dia$. A solução inicial desse problema é uma malha com uma saturação igual ao valor da saturação irreduzível da água, ou seja, $s_{i,j} = s_{wi} = 0.2, \forall (x, y) \in \Omega$.

Ao contrário do problema linear, o problema *five-spot* não possui solução analítica. Realizamos, então, uma simulação com malha de tamanho 401×401 com o método KT, que foi

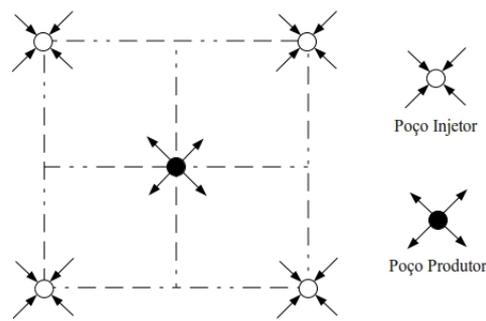


Figura 2: Reservatório do tipo Five-spot

o método mais preciso no caso linear. A solução gerada foi utilizada como solução analítica para o problema e com ela os erros foram comparados. O erro relativo foi calculado através da Eq. 21.

5 RESULTADOS

5.1 Fluxo fracionário linear

Método		100 × 100	200 × 200	300 × 300
Upwind	Euler	1.09s	8.07s	27.58s
	AM	1.09s	5.68s	15.21s
	BDF	1.13s	5.94s	16.07s
KT	Euler	5.49s	43.63s	163.67s
	AM	3.46s	22.46s	65.18s
	BDF	7.37s	50.52s	121.58s

Tabela 1: Tempos de cada um dos problemas.

A Tabela 1 mostra os tempos de execução dos problemas e a tabela de erros (Tabela 2) mostra os erros obtidos com relação aos métodos KT e Upwind, utilizando os métodos de resolução de ODEs Adams-Moulton, BDF e Euler Explícito.

Observando os resultados, é fácil notar que erros obtidos pelo método Upwind com uma malha de 300 × 300 são comparáveis a erros obtidos pelo KT com uma malha de 100 × 100. Como exemplo tempos o caso em que o Esquema Upwind resolvido com o método Euler Explícito obtém um erro de $3.26e^{-1}$ enquanto o método KT obtém um erro menor com a malha mais reduzida estudada, como utilizando o método BDF ($2.40e^{-1}$). Se olharmos para os tempos de execução desses dois casos a superioridade do método KT fica ainda mais evidente, gastando

Método		100 × 100	200 × 200	300 × 300
Upwind	Euler	$4.22e^{-1}$	$3.59e^{-1}$	$3.26e^{-1}$
	AM	$4.25e^{-1}$	$3.62e^{-1}$	$3.29e^{-1}$
	BDF	$4.25e^{-1}$	$3.62e^{-1}$	$3.29e^{-1}$
KT	Euler	$2.52e^{-1}$	$2.09e^{-1}$	$1.90e^{-1}$
	AM	$2.40e^{-1}$	$1.90e^{-1}$	$1.66e^{-1}$
	BDF	$2.40e^{-1}$	$1.90e^{-1}$	$1.66e^{-1}$

Tabela 2: Erros de cada um dos problemas.

Método		100 × 100	200 × 200	300 × 300
Upwind	Euler	$1.99e^{-4}$	$9.95e^{-5}$	$6.63e^{-5}$
	AM	$5.74e^{-4}$	$4.97e^{-4}$	$4.50e^{-4}$
	BDF	$5.74e^{-4}$	$4.97e^{-4}$	$4.50e^{-4}$
KT	Euler	$1.99e^{-4}$	$9.95e^{-5}$	$6.63e^{-5}$
	AM	$2.00e^{-3}$	$1.30e^{-3}$	$9.02e^{-4}$
	BDF	$1.67e^{-3}$	$1.12e^{-3}$	$7.41e^{-4}$

Tabela 3: Δt médio da saturação.

7.37s de computação contra 27.58s para o Esquema Upwind, ou seja, mais de três vezes mais rápido.

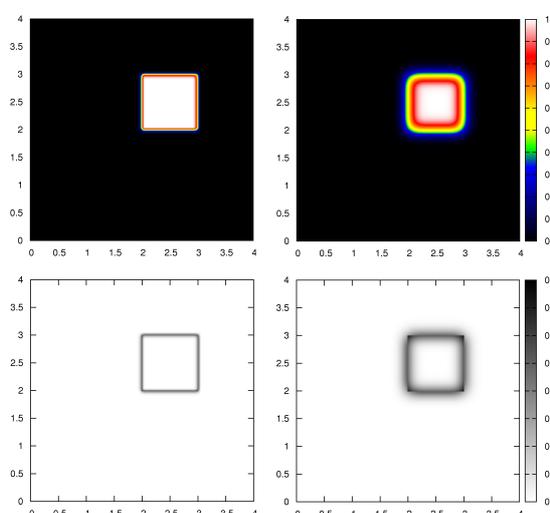


Figura 3: Mapa de cores dos resultados do KT e Upwind (acima) e a diferença entre os resultados e a solução analítica (abaixo).

Na Tabela 3 temos o valor médio do avanço da saturação por iteração. Notamos que em geral, o KT avança mais rápido que o método Upwind, no entanto, é claro perceber pela formulação da Seção 2 que o método KT é muito mais custoso, portanto mesmo avançando mais rápido ele sofre com uma quantidade maior de cálculos.

A Fig. 3 mostra visualmente os resultados obtidos pelo método KT e o Esquema Upwind e ainda uma comparação com a diferença entre os resultados com a solução analítica. Esses gráficos foram gerados com os melhores resultados obtidos na malha mais refinada: KT resolvido pelo método BDF e Esquema Upwind com o método de Euler Explícito. No caso do Esquema Upwind claramente ocorre uma maior difusão numérica caracterizada pelo arredondamento das bordas.

5.2 Five-spot

A Fig. 4 mostra a evolução no tempo de um campo de reservatórios resolvido com o método KT após 5, 100, 300 e 600 dias de simulação, quando quase todo o óleo do reservatório já foi extraído.

A Tabela 4 compara os tempos de execução do problema *five-spot* após 600 dias de simulação utilizando todos os métodos estudados nesse trabalho. Como se trata de um caso bem mais

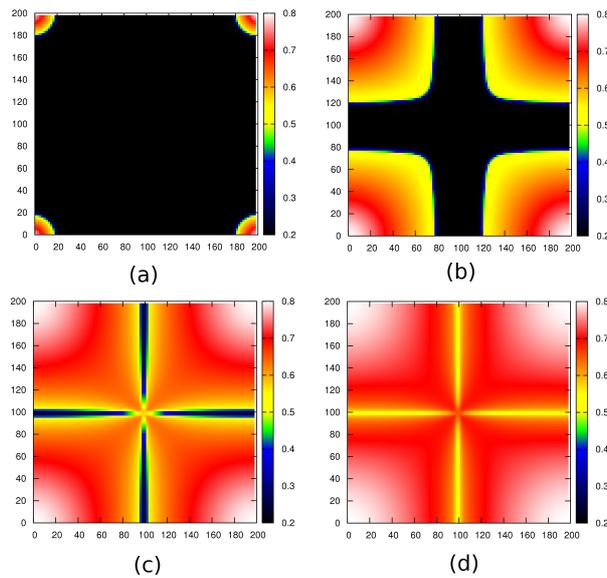


Figura 4: Mapa de cores para a saturação para (a) 5 dias, (b) 100 dias, (c) 300 dias e (d) 600 dias.

Método		25 × 25	51 × 51	101 × 101
Upwind	Euler	0.67s	5.42s	51.11s
	AM	1.36s	9.43s	69.45s
	BDF	1.29s	8.97s	56.17s
KT	Euler	2.41s	25.20s	320.71s
	AM	5.55s	26.77s	230.56s
	BDF	4.88s	27.31s	151.62s

Tabela 4: Tempos de cada um dos problemas.

Método		25 × 25	51 × 51	101 × 101
Upwind	Euler	$9.89e^{-2}$	$7.60e^{-2}$	$5.10e^{-2}$
	AM	$1.09e^{-1}$	$8.40e^{-2}$	$8.40e^{-2}$
	BDF	$1.10e^{-1}$	$8.54e^{-2}$	$6.19e^{-2}$
KT	Euler	$8.99e^{-2}$	$6.60e^{-2}$	$5.44e^{-2}$
	AM	$8.49e^{-2}$	$6.01e^{-2}$	$3.64e^{-2}$
	BDF	$8.47e^{-2}$	$5.98e^{-2}$	$3.64e^{-2}$

Tabela 5: Erros de cada um dos problemas comparados com a solução analítica.

complexo que o anterior, os tempos de execução também são maiores.

A Tabela 5 mostra os erros dos métodos em comparação com a simulação da malha 401×401 após 100 dias de simulação. Os erros diminuem à medida que a malha aumenta de tamanho devido ao maior refinamento e a maior proximidade da solução utilizada como analítica.

Podemos comparar os erros do KT a erros do Upwind com uma malha de tamanho maior, assim como no caso do fluxo linear. Como exemplo tomamos o erro do KT utilizando o método BDF com malha 25×25 e comparamos com o menor erro do Upwind para uma malha de tamanho 51×51 . O KT gerou um erro de $8.47e^{-2}$ ao passo que o Upwind gerou um erro de $7.60e^{-2}$. Nesse caso, para uma simulação completa ($t = 600$ dias) o KT foi executado em um

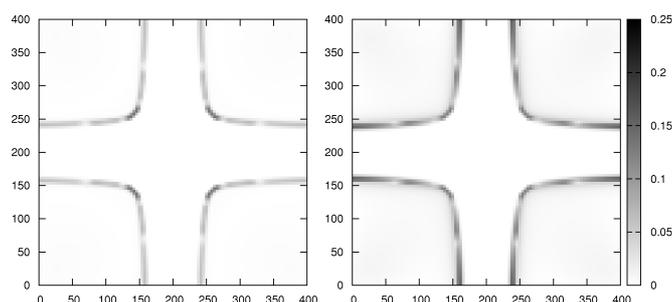


Figura 5: Diferença da saturação do KT e do Upwind em relação à solução analítica ($t = 100$ dias).

tempo de $4.88s$ enquanto o Upwind executou em $5.42s$. Da mesma forma, se compararmos o tempo de execução do método KT resolvido através do AM (malha de 51×51) com o Esquema Upwind resolvido com o BDF (malha de 101×101), temos erros semelhantes ($6.01e^{-2}$ e $6.19e^{-2}$) e um tempo de execução do KT aproximadamente duas vezes menor.

Na Fig. 5 temos a diferença ponto a ponto dos melhores resultados dos métodos KT e Upwind em relação à solução considerada analítica para um determinado instante de tempo ($t = 100$ dias). Novamente podemos notar uma maior diferença entre os dois métodos nas bordas da onda de propagação da saturação, o que evidencia uma maior difusão do Esquema Upwind em relação ao KT.

6 CONCLUSÕES

Nesse trabalho, fizemos uma comparação entre dois métodos de discretização para equações hiperbólicas (KT e Upwind) de problemas de escoamento bifásico água-óleo em meios porosos. Para isso, utilizamos três tipos diferentes de métodos para resolver a equação diferencial ordinária gerada pelo Upwind e pelo KT. Utilizamos ainda dois problemas distintos para analisar os métodos: um problema com fluxo linear e uma solução inicial descontínua e um esquema de reservatório com cinco poços conhecido como *five-spot*.

No primeiro caso, o método KT se mostrou bem eficiente, resolvendo o problema com uma malha menos refinada que o método Upwind e mesmo assim obtendo soluções melhores. No caso *five-spot*, o método KT novamente foi superior ao Esquema Upwind e em ambos os casos, se compararmos malhas de mesmo tamanho, o KT se mostrou mais custoso que o Esquema Upwind. Entretanto, para comparações entre resultados com erros numéricos semelhantes, o Upwind chegou a ser mais de três vezes mais lento.

Em trabalhos futuros pretendemos evidenciar melhor a diferença entre os dois métodos realizando experimentos em campos de permeabilidade mais complexos. Além disso, é possível utilizar o método KT em problemas de ajuste de histórico de reservatórios de petróleo Xavier (2009); Amorim (2009) a fim de determinar se uma maior precisão na solução do problema direto é capaz de produzir melhores resultados no problema conhecido como inverso.

REFERÊNCIAS

- Amorim E.P.S. *Ajuste Automático de Histórico em Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método TSVD*. Tesis de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009.
- Balay S., Buschelman K., Eijkhout V., Gropp W.D., Kaushik D., Knepley M.G., McInnes L.C., Smith B.F., e Zhang H. *PETSc Users Manual*, 2008.
- Chen Z., Huan G., e Li B. An improved impes method for two-phase flow in porous media.

- Transport in Porous Media*, 54:361–376, 2004.
- Hindmarsh A.C. e Serban R. *User Documentation for cvode v2.6.0*. Center for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory, v2.6.0 edição, 2009.
- Kurganov A. e Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160:241–282, 2000.
- Nessyahu H. e Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 87:408, 1990.
- Ribeiro S.S. *Novos Esquemas Centrais de Diferenças Finitas para a Simulação de Escoamentos Multifásicos em Reservatórios de Petróleo*. Tesis de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2007.
- Rusanov V.V. On difference shemes of third order accuracy for non-linear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 5:507–516, 1970.
- van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32:101, 1979.
- Xavier C.R. *Comparação de Métodos de Otimização para o Problema de Ajuste de Histórico em Ambientes Paralelos*. Tesis de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009.