

## ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE PÓRTICOS PLANOS VIA MÉTODO ANALÍTICO FORM, CONSIDERANDO A NÃO- LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Anderson F. Andrade<sup>a</sup>, Afonso H. Oliveira<sup>b</sup>, Silvana M. Bastos Afonso<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos S/N, Cidade Universitária, Recife-PE Brasil, afl\_andrade@yahoo.com.br.

<sup>b</sup> Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos S/N, Cidade Universitária, Recife-PE Brasil, afonso@ufpe.br.

<sup>c</sup> Processamento de Alto Desempenho em Mecânica Computacional, Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos S/N, Cidade Universitária, Recife-PE Brasil, smb@ufpe.br.

**Palavras Chave:** Confiabilidade estrutural, método analítico FORM, não-linearidade geométrica

**Resumo.** Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos considerando a não-linearidade geométrica. Serão utilizadas ferramentas computacionais para a análise estrutural bem como para a análise de confiabilidade. O método analítico FORM (First Order Reliability Method) é utilizado a fim de obter-se a confiabilidade da estrutura em questão. Este método constitui um procedimento iterativo para determinação da probabilidade de falha e medidas de sensibilidade da estrutura. A análise estrutural objetiva determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas a qual pode apresentar um comportamento linear ou não-linear. Dentre as várias fontes de não-linearidade de uma estrutura pode-se citar a não linearidade física e a não linearidade geométrica. A não-linearidade geométrica é decorrente do aparecimento de efeitos de segunda ordem quando a estrutura, em presença de esforço normal, é submetida a valores relativamente grandes de deslocamento. O presente trabalho considera apenas a não-linearidade geométrica. Estudos de caso são utilizados para validar a metodologia descrita.

## 1 INTRODUÇÃO

Nas estruturas em geral, sempre existe o risco de ela vir a falhar, porém, o risco apresentado pelas mesmas deve ser quantificado e mantido em níveis aceitáveis de acordo com critérios de segurança e economia. A determinação deste valor pode ser feita por métodos de confiabilidade, os quais permitem a determinação do índice de confiabilidade ou probabilidade de falha da estrutura.

O presente trabalho tem como objetivo a análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos considerando não-linearidade geométrica através do método analítico FORM (First Order Reliability Method).

## 2 ANÁLISE NÃO LINEAR

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos.

Grande parte das estruturas de engenharia exibe um comportamento linear elástico sob cargas de serviços. Existem exceções como arcos e edifícios altos, e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração, por exemplo, que apresentam um comportamento não-linear. Antes de alcançar o seu limite de resistência, quase todas essas estruturas vão apresentar uma resposta não-linear significativa.

Na análise não-linear tenta-se melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. O objetivo fundamental é obter-se para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como conseqüência, tem-se um aumento da complexidade do problema e conseqüente aumento do custo computacional.

O comportamento não-linear de uma estrutura, sob ação de um carregamento qualquer, pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade podem-se citar a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica. A primeira decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Já a não-linearidade geométrica é decorrente do aparecimento de efeitos de segunda ordem quando a estrutura, em presença de esforço normal, é submetida a valores relativamente grandes de deslocamento. Neste último caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento. Neste trabalho será considerada somente a não-linearidade geométrica.

### 2.1 Pontos críticos

Os pontos críticos são aqueles em que um caminho de equilíbrio atinge um valor extremo ou aqueles onde diferentes caminhos de equilíbrio se encontram. Na figura 1 podem ser observados três pontos críticos (A, B e C), onde os pontos (B e C) são chamados de pontos limite e o ponto (A) ponto de bifurcação. Neste trabalho será considerado apenas o primeiro ponto limite.

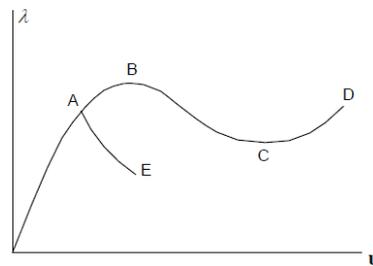


Figura 1: Pontos críticos

### 3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A confiabilidade estrutural pode ser considerada como uma importante ferramenta que o engenheiro dispõe para quantificar a segurança que uma estrutura possui em atender aos objetivos para os quais a mesma fora projetada, considerando as incertezas nas variáveis inerentes ao seu projeto. Estas variáveis aleatórias são denominadas variáveis básicas e a cada uma delas está associada a uma distribuição de probabilidade qualquer, e são usualmente representadas por  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_n)$ .

A confiabilidade de uma estrutura pode ser avaliada pela probabilidade de sucesso ( $p_s$ ) ou pela probabilidade de falha ( $p_f$ ). Devido a sua ordem de grandeza, esta última, normalmente, é mais utilizada, variando de  $10^{-6}$  a  $10^{-3}$ . Estas probabilidades são complementares, ou seja,

$$p_f = 1 - p_s \quad (1)$$

Define-se uma função de falha  $G(\mathbf{U})$  (função de estado limite ou função de performance) de tal maneira que o limite ( $G(\mathbf{U}) = 0$ ), denominado superfície de falha, separe o domínio seguro ( $G(\mathbf{U}) > 0$ ) e o domínio de falha ( $G(\mathbf{U}) \leq 0$ ), como mostrado, para o caso de duas variáveis aleatórias ( $n=2$ ), na Figura 2.

Desta forma, a probabilidade de falha, ou seja, a probabilidade da função de falha assumir valores pertencentes ao domínio de falha é definida por:

$$p_f = P[G(\mathbf{U}) \leq 0] \quad (2)$$

Matematicamente esta probabilidade pode ser avaliada, segundo (Melchers, 1987), por:

$$p_f = \int_F f_u(\mathbf{U}) d\mathbf{u} \quad (3)$$

onde  $f_u(\mathbf{U})$  representa a função de densidade de probabilidade conjunta de todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema e  $F$  indica o domínio de falha ( $G(\mathbf{U}) \leq 0$ ).

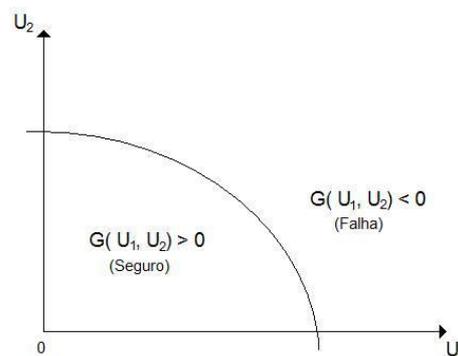


Figura 2: Definição da função de falha

Devido às dificuldades encontradas na solução analítica da eq. (3), surgiram alguns métodos numéricos que podem ser classificados da seguinte forma: Métodos de Integração Numérica; Métodos de Simulação ou Técnicas de Monte Carlo; Métodos Analíticos FORM e SORM (Second Order Reliability Method); Métodos Mistos ou Híbridos. O método analítico FORM será melhor apresentado no item 3.1.

### 3.1 Método Analítico FORM

No método analítico FORM, segundo (Melchers, 1987), as variáveis básicas  $\mathbf{U}$ , correlacionadas ou não, são transformadas em variáveis normais padrão estatisticamente independentes  $\mathbf{V}$  (variáveis reduzidas), ou seja, variáveis que apresentam média nula e desvio padrão unitário, definindo assim uma função de falha  $g(\mathbf{V})$  no espaço reduzido. A superfície de falha,  $g(\mathbf{V}) = 0$ , é aproximada por uma superfície linear (hiperplano) no ponto mais próximo a origem ( $\mathbf{V}^*$ ), este se caracteriza como o ponto de maior densidade local de probabilidade, denominado ponto de projeto ou ponto mais provável de falha, como indicado na Figura 3.

Define-se o índice de confiabilidade  $\beta$ , como a distância entre o ponto  $\mathbf{V}^*$  e a origem, ou seja,

$$\beta = |\mathbf{V}^*| \quad (4)$$

assim tem-se:

$$\mathbf{V}^* = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \beta \quad (5)$$

sendo  $\boldsymbol{\alpha}^*$  o vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto.

Utilizando-se as propriedades da distribuição normal multidimensional padrão, a probabilidade de falha, considerando-se uma aproximação de primeira ordem, pode ser definida por:

$$p_f = \int_F f_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) d\mathbf{v} = \Phi(-\beta) \quad (6)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  representa a distribuição cumulativa normal padrão.

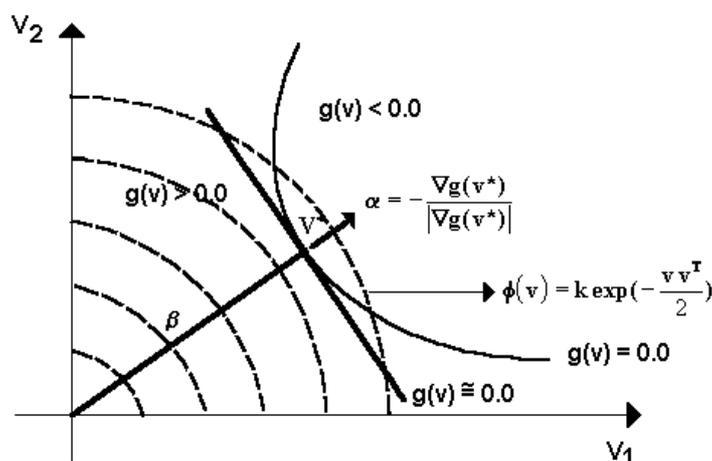


Figura 3: Representação gráfica do Método Analítico FORM.

### 3.1.1 Transformação de variáveis

A transformação das variáveis básicas  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_n)$  em variáveis normais padrão estatisticamente independentes  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$ , ou vice-versa, pode ser definida da seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}(\mathbf{U}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{V}) \quad (7)$$

onde  $\mathbf{T}$  é denominada como transformação de probabilidade e apresenta como condição necessária de sua existência o fato das variáveis básicas apresentarem distribuições contínuas de probabilidade.

Considerando-se as variáveis básicas como sendo todas normais, correlacionadas ou não, torna-se possível utilizar-se a transformação de Nataf descrita por Der Kiureghian e Liu, (1986), definida da seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\sigma}^{-1} (\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (8)$$

onde  $\mathbf{m}$  é o vetor que contém as médias das variáveis básicas  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\sigma}$  é a matriz diagonal que apresenta os desvios padrão destas variáveis e  $\mathbf{\Gamma}$  é a inversa da matriz  $\mathbf{L}$ , onde  $\mathbf{L}$  representa a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação das variáveis básicas  $\mathbf{U}$ , e apresenta-se da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde os termos  $L_{ij}$  são definidos por:

$$L_{11} = 1.0; \quad L_{i1} = \rho_{ij} \quad i = 1, n; \quad L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left( \rho_{ij} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) \quad 1 < k < i; \quad L_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2} \quad i > 1 \quad (10)$$

onde  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação entre as variáveis  $U_i$  e  $U_j$ .

O Jacobiano da transformação ( $\mathbf{J}$ ) é definido por  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{U}$  e a partir da eq. (8) tem-se:

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\sigma}^{-1} \quad (11)$$

No caso geral, onde as variáveis básicas podem apresentar distribuições de probabilidade quaisquer, correlacionadas ou não, o uso da transformação de Nataf torna-se possível, desde que cada distribuição de probabilidade não normal seja substituída por uma distribuição de probabilidade normal equivalente. Para tal utiliza-se o Princípio da Aproximação da Extremidade Normal, apresentado por (Ditlevsen, 1979). Este procedimento, ilustrado na Figura 4, consiste em se fazer a equivalência entre os valores das funções cumulativa e densidade de probabilidade para ambas as distribuições no ponto de interesse  $U^*$ , sobre a superfície de falha, ou seja:

$$\Phi\left(\frac{U_i^* - \mu_{u_i}^N}{\sigma_{u_i}^N}\right) = Fu_i(U_i^*) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sigma_{u_i}^N} \varphi\left(\frac{U_i^* - \mu_{u_i}^N}{\sigma_{u_i}^N}\right) = fu_i(U_i^*) \quad (13)$$

onde  $\mu_{u_i}^N$  e  $\sigma_{u_i}^N$  são, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição normal equivalente para a variável  $U_i^*$ ;  $Fu_i(U_i^*)$  e  $fu_i(U_i^*)$  são as funções cumulativa e densidade de probabilidade originais da variável  $U_i^*$ , respectivamente;  $\Phi(\cdot)$  e  $\varphi(\cdot)$  são as funções cumulativa e densidade de probabilidade da distribuição normal padrão.

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtém-se:

$$\sigma_{u_i}^N = \frac{\varphi\left\{\Phi^{-1}\left(Fu_i(U_i^*)\right)\right\}}{fu_i(U_i^*)} \quad (14)$$

$$\mu_{u_i}^N = U_i^* - \sigma_{u_i}^N \Phi^{-1}\left(Fu_i(U_i^*)\right) \quad (15)$$

As equações. (14) e (15) podem ser diretamente utilizadas para distribuições quaisquer, desde que estas sejam não correlacionadas. Caso contrário, necessita-se também obter-se a correlação equivalente entre as variáveis aleatórias em questão, como mostrado por (Der Kiureghian e Liu, 1986).

Considerando-se duas variáveis aleatórias  $U_i$  e  $U_j$ , cada uma com sua distribuição de probabilidade associada, e  $\rho_{ij}$  o coeficiente de correlação entre ambas, o coeficiente de correlação equivalente ( $\rho_{ij}^E$ ) entre as duas distribuições normais equivalentes pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\rho_{ij}^E = F \cdot \rho_{ij} \quad (16)$$

onde  $F$  é um fator que, para algumas distribuições de probabilidade, é obtido através de fórmulas semi-empíricas apresentadas por (Der Kiureghian e Liu, 1986).

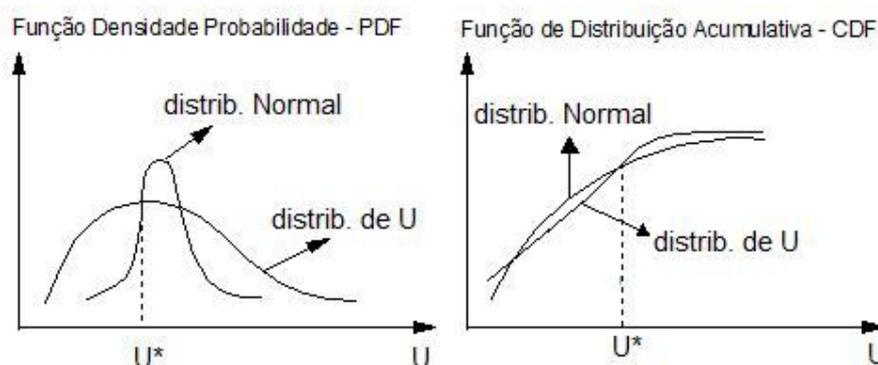


Figura 4: Princípio da Aproximação da Extremidade Normal.

### 3.1.2 Ponto de Projeto

Como já citado anteriormente, para obtenção do índice de confiabilidade e, posteriormente, a probabilidade de falha necessita-se encontrar o ponto de projeto  $V^*$ . Esta etapa pode ser

formulada como um problema de otimização ou programação não-linear com uma restrição que pode ser expressa por:

$$P1: \quad \text{minimize } |\mathbf{V}| \quad (17)$$

$$\text{sujeito a } g(\mathbf{V}) = 0$$

Encontram-se, na literatura, vários algoritmos para a resolução do problema de otimização acima mostrado, contudo, (Sagrilo, 1994) adotou o desenvolvido por (Hasofer e Lind, 1974) e, posteriormente, aprimorado por (Rackwitz e Fiessler, 1978), conhecido por HL-RF. O mesmo utiliza a seguinte expressão para atualização:

$$\mathbf{v}^{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(\mathbf{v}^k)|^2} \cdot [\nabla g(\mathbf{v}^k) \mathbf{v}^k - g(\mathbf{v}^k)] \nabla g(\mathbf{v}^k)^T \quad (18)$$

onde  $\nabla g(\mathbf{V}^k)$  é o gradiente da função de falha e  $g(\mathbf{V}^k)$  é o valor da função de falha avaliados no ponto  $\mathbf{V}^k$ .

Para utilização do método HL-RF, utilizam-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{V}) &= G(\mathbf{U}) \\ \nabla g(\mathbf{V}) &= (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $\nabla G(\mathbf{U})$  é o gradiente da função de falha no espaço original avaliado no ponto  $\mathbf{U}$ .

### 3.1.3 Medidas de Sensibilidade

O método analítico FORM fornece, além da probabilidade de falha, outras medidas de grande importância para análises práticas de confiabilidade. Estas medidas são conhecidas como medidas de sensibilidade. Existem várias medidas de sensibilidade, a exemplo de fatores de importância, fatores de omissão e fatores de sensibilidade paramétricos. Neste trabalho será utilizado para análise de sensibilidade das variáveis apenas o fator de importância.

O fator de importância de cada variável aleatória  $i$  envolvida na análise de confiabilidade é definido por

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (20)$$

onde  $\alpha_i$  é o cosseno diretor com relação a variável  $U_i$  do vetor normal a superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das variáveis reduzidas, conforme Figura 2.

Os fatores de importância indicam, como o nome próprio nome diz, qual é a importância relativa de cada variável no valor final da probabilidade de falha. As variáveis com fator de importância baixo podem ser consideradas como determinísticas na análise. Somente as variáveis com fatores de importância altos que efetivamente contribuem para a probabilidade de falha.

### 3.1.4 Algoritmo do método analítico FORM

Os principais passos do algoritmo do método analítico FORM são os que seguem:

1) Avaliar as correlações equivalentes entre as variáveis e montar a matriz  $\Gamma$ ;

2) Escolher um ponto de partida  $\mathbf{U}$  no espaço original (geralmente as médias);

3) Avaliar as médias e desvios padrões das normais equivalentes no ponto de partida através das expressões:

$$\sigma_{u_i}^N = \frac{\phi \left\{ \Phi^{-1} \left( Fu_i(U_i^*) \right) \right\}}{fu_i(U_i^*)} \quad (14)$$

$$\mu_{u_i}^N = U_i^* - \sigma_{u_i}^N \Phi^{-1} \left( Fu_i(U_i^*) \right) \quad (15)$$

depois montar as matrizes  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{m}$ , já descritas anteriormente no item 3.1.1, com os respectivos desvios padrões e médias das normais equivalentes;

4) Avaliar a função de falha  $G(\mathbf{U})$ , o Jacobiano e o gradiente de  $G(\mathbf{U})$  no espaço reduzido através das expressões:

$$\mathbf{J} = \Gamma \boldsymbol{\sigma}^{-1} \quad (11)$$

$$g(\mathbf{V}) = G(\mathbf{U})$$

$$\nabla g(\mathbf{V}) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}) \quad (19)$$

5) Transformar o ponto de partida para o espaço reduzido usando

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (21)$$

6) Avaliar o novo ponto  $\mathbf{V}^{next}$  através do algoritmo HLRF

$$\mathbf{V}^{next} = \frac{1}{|\nabla g(\mathbf{V})|^2} \cdot [\nabla g(\mathbf{V}) \mathbf{V} - g(\mathbf{V})] \nabla g(\mathbf{V})^T \quad (18)$$

7) Avaliar o índice de confiabilidade

$$\beta = |\mathbf{V}^{next}| \quad (4)$$

8) Avaliar o novo ponto  $\mathbf{U}^{next}$  no espaço original através da seguinte expressão:

$$\mathbf{U}^{next} = \mathbf{U} + (\mathbf{J}^{-1})^T (\mathbf{V}^{next} - \mathbf{V}) \quad (22)$$

9) Tomar  $\mathbf{U}^{next}$  como novo ponto de partida e repetir os passos 3 a 8 até a convergência, i.e.,

$$\frac{|\mathbf{V}^{next}| - |\mathbf{V}|}{|\mathbf{V}^{next}|} \leq TOL \quad (23)$$

10) Avaliar a probabilidade de falha pelo método FORM por

$$pf^{FORM} = \Phi(-\beta) \quad (24)$$

## 4 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS UTILIZADAS

### 4.1 Análise de confiabilidade

No caso da análise de confiabilidade será utilizado um programa desenvolvido em FORTRAN, que tomou como base o programa PACONF desenvolvido por (Sagrilo,1994).

### 4.2 Análise não linear

Na análise não linear será utilizado um programa também desenvolvido em FORTRAN, baseado em um programa implementado por (Galvão, 2000), concebido para determinar o caminho de equilíbrio. Para o presente trabalho, este programa foi modificado para determinar o primeiro ponto limite das estruturas a serem analisadas.

## 5 ESTUDOS DE CASO

Neste item, alguns estudos de caso serão analisados com o intuito de validar a metodologia construída.

### 5.1 Caso 1 – Pórtico de Lee

Neste exemplo é feita a análise de confiabilidade do Pórtico de Lee. Esta estrutura é interessante pelo fato de apresentar instabilidade por ponto limite depois de sofrer grandes deslocamentos e rotações. É uma estrutura usada com frequência por alguns autores para validar estratégias de solução não-linear como é o caso de Galvão (2000). Na figura 5 apresenta-se a estrutura em questão. Na Tabela 1 são apresentadas as variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade pelo método analítico FORM.

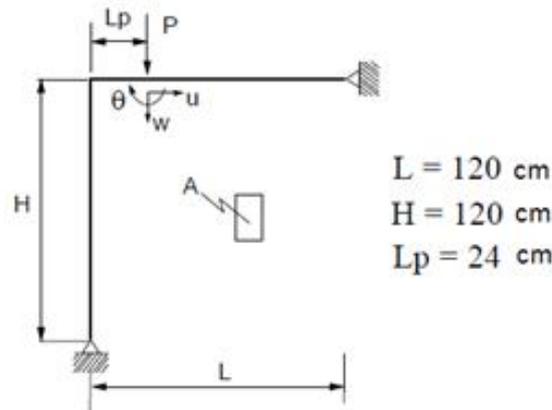


Figura 5: Pórtico de Lee

Variável Aleatória	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )	Distribuição
Área da Seção (A)	6,0 cm <sup>2</sup>	0,424 cm <sup>2</sup>	Normal
Inércia da Seção (I)	2,0 cm <sup>4</sup>	0,316 cm <sup>4</sup>	Normal
Módulo de Elasticidade (E)	720,0 kN/cm <sup>2</sup>	50,400 kN/cm <sup>2</sup>	Log-normal

Tabela 1: Variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade do pórtico de Lee

Para o exemplo mostrado neste item, duas análises foram desenvolvidas: uma função de falha em termos de carga e outra em termos de deslocamento.

Na função de falha em termos de carga, avaliou-se inicialmente qual o valor da carga que leva a estrutura ao primeiro ponto limite. Utilizando 20 elementos para discretizar a estrutura e os valores médios das variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1, o valor do carregamento calculado foi  $P = 1,863$  kN. Estabelecendo-se como limite a carga  $P_{lim} = 2,000$  kN, chegou-se a função de falha conforme mostrado abaixo:

$$G1 = P_{calc} - P_{lim} \quad (25)$$

onde,  $P_{calc}$  é o valor da carga que leva a estrutura ao primeiro ponto limite a partir dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1 a cada iteração necessária para solução do método analítico FORM de acordo com o que foi exposto no item 3.1.4. Os valores obtidos estão mostrados na Tabela 2.

No caso da função de falha em termos de deslocamento, foi avaliado o deslocamento vertical  $W$  no ponto de aplicação da carga correspondente ao carregamento que leva a estrutura ao primeiro ponto limite. Utilizando 20 elementos para discretizar a estrutura e os valores médios das variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1, o valor do deslocamento foi  $W_{lim} = 49,102$  cm. A função de falha utilizada nesta análise foi a mostrada abaixo:

$$G2 = W_{lim} - W_{calc} \quad (26)$$

onde,  $W_{calc}$  é o valor do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga relativo ao carregamento que leva a estrutura ao primeiro ponto limite a partir dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1 a cada iteração necessária para solução do método analítico FORM de acordo com o que foi exposto no item 3.1.4. Os valores obtidos estão mostrados na Tabela 2.

Análise	Função de Falha	$\beta$	$p_f$	Nº Iterações
1	$G1 = P_{calc} - P_{lim}$	0.43609	0.3314	3
2	$G2 = W_{lim} - W_{calc}$	0.01416	0.4944	2

Tabela 2: Valores obtidos na análise do pórtico de Lee

Ao contrário dos resultados comumente encontrados em análises desse tipo, as probabilidades de falha foram bastante elevadas porque o limite da função de falha foi um valor muito próximo do limite calculado (primeiro ponto limite). Caso todas as variáveis fossem simétricas o resultado da análise 2 seria exatamente 0,5, ou seja, probabilidade de falha igual a 50% já que o limite da função de falha foi igual ao valor calculado (49,102 cm). Na primeira análise, o valor da probabilidade de falha se afastou do valor 0,5 porque o limite adotado na função de falha (2,000 kN) foi diferente do valor calculado para o primeiro ponto limite (1,863 kN).

## 5.2 Caso 2 – Pórtico abatido de Williams

Neste item, duas análises do Pórtico abatido de Williams serão desenvolvidas. Este problema é citado por alguns pesquisadores a exemplo de (Galvão, 2000) como sendo frequentemente utilizado para validar modelos numéricos. Esta estrutura apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente não linear com perda de estabilidade por ponto limite. Na Tabela 3 são apresentadas as variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade pelo método analítico FORM.

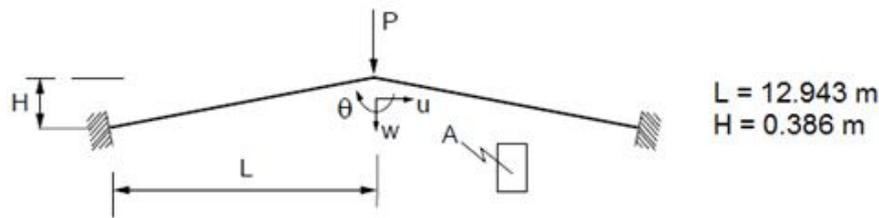


Figura 6: Pórtico abatido de Williams

Variável Aleatória	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )	Distribuição
Área da Seção (A)	0,183 m <sup>2</sup>	0,0129 m <sup>2</sup>	Normal
Inércia da Seção (I)	0,0009 m <sup>4</sup>	1,409.10 <sup>-4</sup> m <sup>4</sup>	Normal

Tabela 3: Variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade do pórtico abatido de Williams

Para o exemplo mostrado acima, foram feitas duas análises conforme citado anteriormente. Em uma análise serão utilizadas as duas variáveis aleatórias mostradas na Tabela 3. Diferentemente do estudo de caso 1, o módulo de elasticidade foi aqui considerado como parâmetro determinístico com valor  $E = 1,03.10^7$  tf/m<sup>2</sup>. A partir de uma análise de sensibilidade das variáveis citadas através do cálculo do fator de importância, o número de variáveis aleatórias será reduzido para apenas uma variável na segunda análise.

Utilizando 20 elementos para discretizar a estrutura e os valores médios das variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1, o valor do carregamento calculado foi  $P = 36,162$  tf. Estabelecendo-se como limite a carga  $P_{lim} = 37,000$  tf, chegou-se a função de falha conforme mostrado abaixo:

$$G3 = P_{calc} - P_{lim} \quad (27)$$

onde,  $P_{calc}$  é o valor da carga que leva a estrutura ao primeiro ponto limite a partir dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias mostradas na Tabela 1 a cada iteração necessária para solução do método analítico FORM de acordo com o que foi exposto no item 3.1.4. Os valores obtidos estão mostrados na Tabela 4.

Utilizando-se apenas a Inércia da Seção como variável aleatória de acordo com a tabela 3 e a mesma função de falha  $G3$ , chega-se praticamente ao mesmo resultado obtido ao utilizar duas variáveis aleatórias. Os resultados estão mostrados na Tabela 4.

Análise	Variáveis aleatórias	F.Importância	$\beta$	$p_f$	N <sup>o</sup> Iterações
1	A	0,0009	0,1547	0,43850	3
	I	0,9991			
2	I	1	0,1548	0,43846	3

Tabela 4: Valores obtidos na análise do pórtico abatido de Williams

Igualmente ao que foi mostrado no item 5.1, a probabilidade de falha foi próxima a 50% em função do limite adotado para a função de falha (37,000 tf) ser muito próximo ao valor calculado para o primeiro ponto limite (36,162 tf). Se o valor adotado para  $P_{lim}$  fosse igual a 36,162 tf, o valor de  $p_f$  seria igual a 0,5.

Conforme era esperado, o valor da probabilidade de falha nas duas análises foi praticamente o mesmo, mostrando a grande utilidade da análise de sensibilidade.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procurou-se mostrar uma metodologia para análise de confiabilidade de pórticos planos com não linearidade geométrica.

Na análise de confiabilidade foi utilizado o método analítico FORM que é uma ótima estratégia para avaliação da probabilidade de falha graças ao pequeno número de vezes que a função de falha é avaliada.

Através do segundo estudo de caso mostrado, outra importante ferramenta oferecida pelo método analítico FORM foi utilizada: a análise de sensibilidade das variáveis aleatórias componentes da função de falha, representada pelo Fator de Importância. A análise de sensibilidade torna-se vantajosa do ponto de vista do custo computacional com a análise de confiabilidade quando o número de variáveis aleatórias a serem analisadas é elevado.

## 7 REFERÊNCIAS

- A. Der Kiureghian; P.L. Liu. Structural Reliability under Incomplete Probability Information. *J. of Eng. Mech.*, v.112, n.1, p.85-105, 1986.
- A. M. Hasofer; N.C. Lind. Exact and Invariant Second-Moment Code Format. *J. of Eng. Mech.*, v.100, n.EM1, p.111-121, 1974.
- A.S. Galvão. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Ouro Preto: UFOP/DECIV, 2000. 168p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
- L.V.S. Sagrilo. *Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando os Métodos Analíticos FORM e SORM*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1994. 141p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1994.
- O. Ditlevsen. Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. *J. of Eng. Mech.*, v.7, n.4, p.453-472, 1979.
- R.E. Melchers. *Structural Reliability: Analysis and Prediction*. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1987. 400p.
- R. Rackwitz; B.Fiessler, Structural Reliability under Combined Random Load Sequences. *Computer and Structure.*, v.9, p.489-494, 1978.