

CONSTRUCCIÓN MEDIANTE FRESADO Y/O RECTIFICADO POR CONTROL NUMÉRICO COMPUTARIZADO DE PLANTILLAS PARA MANUFACTURAR LEVAS DE MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA

Jorge A. Toth, Ezequiel J. López y Leonardo M. Alonso

Universidad Nacional del Comahue,
8300 Neuquén, Argentina (jtoth@uncoma.edu.ar)

Resumen. *Este trabajo provee el fundamento matemático y numérico de un código computacional hábil para determinar los parámetros de programación del fresado por Control Numérico Computarizado (CNC) de una sucesión finita de espirales de Arquímedes, destinada a aproximar perfiles no alabeados de importancia en Mecánica de Motores. Algunos de éstos son empleados en componentes de motores rotativos, interesando otros a la manufactura de levas. Fue estudiado el acordamiento entre pares de espirales consecutivos cumpliendo el requisito de continuidad de las tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco. Atendiendo que esta opción vuelve factible construir camones aptos para funcionar sin choque a elevados regímenes dinámicos, hemos asumido un diseño de leva arreglado a los requerimientos de continuidad preescriptos como input del problema de manufactura; obteniéndose luego una aproximación tecnológicamente accesible y ajustada a las mismas exigencias de continuidad. Asimismo, partiendo de un estudio teórico de la espiral, se dedujeron las propiedades de las trayectorias del husillo que admiten curvas aproximantes resueltas por maquinado directo: fresa o muela montada en el husillo. Por último, eludiendo incorporar un cuarto eje gobernado, fue extendido el alcance de la estrategia a situaciones excluidas del maquinado directo, proponiéndose un sencillo mecanismo intermediario de corredera articulable al husillo; de modo que, describiendo éste una aproximante permisible en el modo directo, la herramienta, conducida mediante una transmisión por correas, talle un perfil, en principio no aproximable.*

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo está contextualizado en el Proyecto “Desarrollo de Motores y Compresores Rotativos” de la U N. Comahue, abarcando el desarrollo de máquinas originales: un compresor volumétrico no valvulado y dos motores de encendido chispa. Uno de los objetivos del proyecto consiste en la construcción por CNC de las paletas y los cuerpos estatóricos de esas máquinas y también de componentes de motores y compresores clásicos, con propósitos de mantenimiento; contemplándose el empleo de software comercial y, además, una participación efectiva en la generación de algunos de los códigos computacionales requeridos; contribuyendo así, por una parte, a compatibilizar las tareas de diseño con las de manufactura y, por la otra, a proveer material didáctico a las asignaturas Tecnología Mecánica y Máquinas Motrices. La presente propuesta atiende asimismo un hecho simple: en los modernos motores CI de pistones recíprocos, el continuo aumento de velocidad incrementó significativamente las sollicitaciones mecánicas de los órganos del mecanismo de distribución, imponiendo requisitos tecnológicos extremos a la manufactura del componente más crítico del sistema: la leva. La satisfacción de tales requerimientos se traduce en mecanismos leva – seguidor capaces de soportar elevados regímenes dinámicos. Entre las pautas geométricas que implican el correcto funcionamiento del sistema de distribución se cuentan la continuidad y derivabilidad del radio de curvatura del perfil de la leva. Si esta condición fuese incumplida, aparecerían discontinuidades en la curva de aceleración del mecanismo, deviniendo “choques” inaceptables, desgaste prematuro y ruido. Entonces, el procedimiento constructivo de las levas resulta un aspecto crucial. El estudio minucioso de la manufactura mediante tornos copiadores convencionales del tipo oscilante parece un desafío razonable; pues, en nuestro país, dichas máquinas operan desde hace décadas y, en este momento, para recobrar competitividad, requieren plantillas patrones resueltas con arreglo a técnicas constructivas muy precisas. Cualquiera sea su tipo, de translación u oscilante, una máquina copidora básicamente consiste en un cinematismo de barras y rodillos, cuyo movimiento de “entrada” es impuesto por el perfil de la plantilla; constituyendo su “salida” la traslación del eje de la muela que rectifica la leva.

Con anterioridad al advenimiento de las técnicas asistidas por ordenador, controlando el mecanizado o el corte electroerosivo, las plantillas solían construirse según procedimientos de corte por acercamiento en intervalos sucesivos “pequeños”; complementándose esa modalidad con ulteriores operaciones artesanales de acabado y pulido; es decir, una solución del problema muy costosa, inexacta y de reproducibilidad casi imposible. Aun a pesar de sus evidentes limitaciones, estas técnicas durante más de medio siglo han servido a la construcción de plantillas para levas.

En las actuales prácticas de fresado a CNC aplicadas a la industria, la trayectoria de los filos cortantes de la herramienta (fresa) deben replicar o, al menos, aproximar, dentro de márgenes tolerados de discrepancias, las curvas requeridas por el diseñador. Las curvas aproximantes, en general, son discretizables en tramos elementales enlazados a través de una sucesión. Por supuesto, tratándose de un problema ingenieril típico de final abierto, son admisibles múltiples soluciones. Empero, al introducir apropiados criterios de optimización, pueden establecerse restricciones capaces de acotar la elección de las sucesiones al subconjunto “más apto” para resolver el código de maquinado.

La tecnología CNC permite la construcción de perfiles planos recurriendo a técnicas de interpolación lineal o circular. Ninguno de estos procedimientos es adecuado a la construcción de plantillas para levas de alta velocidad, debido a que los tramos de las curvas de interpolación quedan acordados sin continuidad del radio de curvatura. Estas discontinuidades constituyen la causa de impactos de amplitud teóricamente no acotada. Luego, no obstante las distintas formas de amortiguación viscosa siempre existentes en la realidad, el proceso de desgaste asociado a la marcha del motor no suaviza la curva rectificadora del camón sino que, en contrario, origina un fenómeno de deterioro realimentado desencadenante del fallo de la leva. Por consiguiente, otro objetivo de este trabajo es fundamentar un procedimiento constructivo de plantillas para levas de alta velocidad por mecanizado a CNC en una fresadora de tres ejes controlados disponible en nuestra Universidad; tornando incluso accesible a las capacidades de ese equipo el rectificado de los flancos del estator, sobre los cuales deslizarán los segmentos de cierre del prototipo de uno de los motores en desarrollo.

Las espirales de Arquímedes pueden generarse combinando dos movimientos de velocidad uniforme, uno de traslación y otro de rotación. En coordenadas polares, estas espirales son definidas por una ley lineal de la variable angular; determinándose otras funciones de interés: la primera y segunda derivadas, el radio de curvatura y la derivada de éste respecto de la longitud de su arco. La existencia de dichas funciones revela la “suavidad” de las espirales de Arquímedes; un comportamiento atractivo a efectos de aproximar los perfiles de levas propuestos por el diseñador motorista.

De acuerdo con la finalidad de la pieza a construir, son aceptables distintos acuerdos entre pares de espirales sucesivos; por ejemplo: la simple coincidencia en el punto de enlace de las tangentes extremas de ambos tramos adyacentes, como alternativa adecuada a la manufactura de álabes de rotores centrífugos y de levas radiales lentas. En cambio, las superficies deslizantes de los mecanismos de contacto sometidos a elevados regímenes dinámicos deben rectificarse y/o pulirse conforme los órdenes de continuidad preescriptos. Concretando, en el caso de un sistema de alta velocidad leva – seguidor, la superficie del camón debe satisfacer la continuidad simultánea del radio de curvatura y de su correspondiente derivada respecto del arco; condiciones que implican curvas continuas de aceleración y ausencia de choques; o, en otros términos, el lugar geométrico de los centros de curvatura debe resultar una curva continua y derivable.

Asumiendo la estipulación de diseño de una leva de alta velocidad como una curva comportando las condiciones de continuidad señaladas, la trayectoria del maquinado que aproxima al perfil despliega una sucesión de tramos de curvas tecnológicamente accesibles, enlazadas de modo que aquellas condiciones también sean satisfechas. Justamente, este trabajo está enfocado a resolver dicha aproximación.

A partir del estudio de una espiral genérica y de la propia curva de diseño a aproximar, se dedujeron las propiedades matemáticas de las trayectorias del husillo que admiten aproximantes operando en el modo de maquinado directo, con la herramienta acoplada al husillo, o en el indirecto, el cual acude a un mecanismo intermediario que mantiene una separación prefijada entre el eje del husillo y el de la herramienta.

Fue analizada la aproximación mediante una sucesión finita de espirales acordando cada par consecutivo sólo con continuidad de tangentes; comparándose esta opción con la simple

interpolación circular. Este análisis no ha sido incluido aquí pues arroja aproximantes caracterizadas por radios de curvatura discontinuos. No obstante la simplicidad que sugiere el problema, es destacable la dificultad asociada a su resolución numérica; presentando ergo indudable interés académico.

Se introdujo una idea acerca de la existencia de aproximantes definidas según sucesiones de infinitas espirales enlazadas con continuidad de tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco; dándole así fundamento a la resolución numérica del problema mediante una sucesión finita de espirales.

Por último, considerando las propiedades del perfil de una plantilla para levas rápidas que no habilita el maquinado directo, hemos preceptuado el diseño de mecanismos intermediarios sencillos que vuelven accesible su construcción.

2 LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

En coordenadas polares las espirales de Arquímedes, ilustradas en la Figura 1, están definidas mediante la ley lineal:

$$\mathbf{r}_{(q)} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{q} \quad (1),$$

donde a y \mathbf{r}_0 son constantes.

Luego, introduciendo la razón $z_{(q)} = a / \mathbf{r}_{(q)}$, la ecuación (1) adopta la forma:

$$\mathbf{r}_{(q)} = a / z_{(q)} \quad (2),$$

De las anteriores son deducidas las siguientes funciones de interés:
La derivada en coordenadas cartesianas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z_{(q)}} = \operatorname{tg} \left[\mathbf{d}_{(q)} \right] \quad (3);$$

donde $\mathbf{d}_{(q)}$ refiere el ángulo subtendido entre la tangente geométrica y el eje de abscisas (Véase Figura 1 c).

El radio de curvatura:

$$R_{c(q)} = \mathbf{r}_{(q)} \left[1 + z_{(q)}^2 \right]^{\frac{3}{2}} / \left[1 + 2z_{(q)}^2 \right] \quad (4),$$

y la derivada del radio de curvatura respecto de la longitud del arco:

$$F_{(q)} = z_{(q)} \left[1 + 4z_{(q)}^2 \right] / \left[1 + 2z_{(q)}^2 \right]^2 \quad (5).$$

Las existencia de las definiciones precedentes implica la “suavidad” de las espirales de Arquímedes.

Asimismo, la longitud de un arco diferencial ds puede escribirse:

$$ds = r_{(q)} \sqrt{1+z_{(q)}^2} dq \quad (6).$$

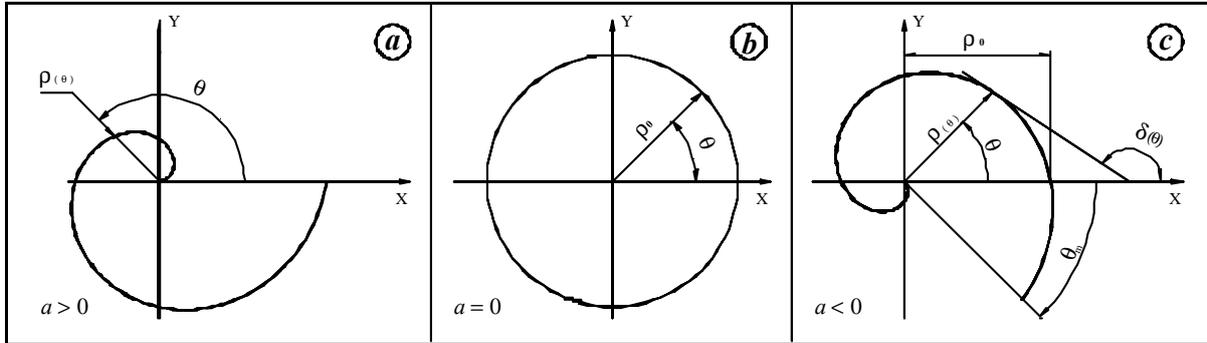


Figura 1

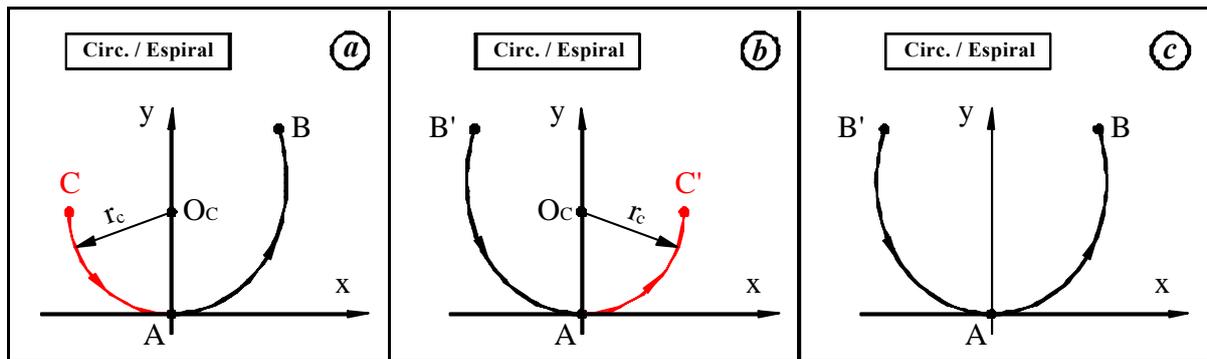


Figura 2

Las instancias *a* y *b* de la Figura 2 exponen un tramo de una espiral caracterizada por $r_0 = 0$ (origen en *A*) que, con arreglo a las exigencias de continuidad anticipadas, está acor- dada con la circunferencia de centro O_c y radio $r_c = |a|/2$; donde *a* representa la tasa de va- riación angular del radio vector de la espiral. Entonces, si se recorre la circunferencia en el sentido indicado por la flecha, al sortear la transición *A*, donde se enlaza con la espiral, ambas curvas poseen la misma tangente (eje de las abscisas); siendo además congruentes los respec- tivos radios de curvatura y también nulas sendas derivadas del radio de curvatura respecto de la longitud del arco. Empero, en aquella transición no es continua la función *z*; simplemente, nula para la circunferencia y no acotada para las espirales. La semblanza *c* de la misma figura expone el acordamiento tangente entre dos espirales, caracterizadas la $B'A$ por $a_{B'A} < 0$ y la AB por $a_{AB} > 0$, siendo $|a_{B'A}| = |a_{AB}| = 2r_c$; en consecuencia, ambas espirales quedan enla- zadas con continuidad del radio de curvatura ($R_{CA} = r_c$) y de la derivada de éste respecto del arco; simbólicamente: $F_{B'A}|_A = F_{AB}|_A = 0$. Obviamente, este enlace verifica la continuidad de

F , aunque z sea discontinua; aclarando, en el punto de encuentro A , en términos de la función z esas espirales reúnen dos extremos: $z_{B'A} \Big|_A \rightarrow -\infty$ y $z_{AB} \Big|_A \rightarrow +\infty$.

La Figura 3 exhibe el comportamiento de la función impar F extendida al subdominio infinito $z \geq 0$; resumiéndose en dos variables adimensionales todas las espirales de Arquímedes. La función $F = F_{(z)}$ presenta un máximo absoluto en:

$$z_M = 0.25\sqrt{6 + 2\sqrt{17}} \tag{7};$$

de magnitud:

$$F_{M\acute{a}x} = F_{(z_M)} = \left(\sqrt{107 + 51\sqrt{17}} \right) / 32 \tag{8}.$$

En consecuencia, las espirales de Arquímedes quedan caracterizadas así:

$$-F_{M\acute{a}x} \leq F \leq F_{M\acute{a}x} \tag{9};$$

significando que la tasa de variación del radio de curvatura por unidad de arco está limitada; constituyendo ésta una propiedad poco alentadora para su generalización como curva elemental aproximante.

Un aspecto interesante de $F = F_{(z)}$ es su comportamiento en los extremos del rango $z \geq 0$; verificándose: en la región $z \cong 0$, $F_{(z)} \cong z$ (primer orden); siendo válida para elevados valores de z la aproximación asintótica $F_{(z)} \cong z^{-1}$.

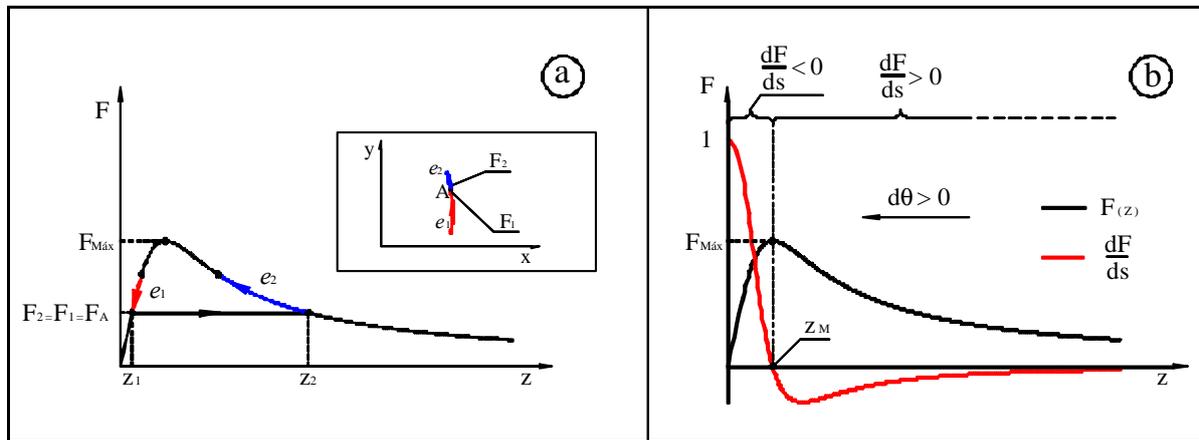


Figura 3

3 ÓRDENES DE CONTINUIDAD DEL CAMÓN Y RÉGIMEN DINÁMICO

En un acoplamiento mecánico típico leva – seguidor plano, h representa la alzada del seguidor, r_b denota el radio base, ω interpreta la velocidad de rotación de la leva, supuesta uniforme, y R_c señala el radio de curvatura del camón en el punto de contacto. Luego, surge de

un ejercicio cinemático elemental la conocida equivalencia (por deducción detallada, véase ítem 7 de la Bibliografía):

$$R_c = r_b + h + \frac{1}{w^2} \left(\frac{d^2 h}{dt^2} \right) \quad (10).$$

Derivando la anterior respecto del tiempo, se obtiene:

$$\left(\frac{dR_c}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{dh}{dt} + \frac{1}{w^2} \left(\frac{d^3 h}{dt^3} \right) \quad (11);$$

donde ds interpreta la longitud del arco diferencial “deslizado” por el punto de contacto al transcurrir el tiempo dt . Entonces, siendo continua y no nula la velocidad de ese deslizamiento, surge evidente el requisito de continuidad de la función $F = \frac{dR_c}{ds}$, dada por (11), a efectos de garantizar la continuidad del impulso; concretando, con la substitución de F en (11) y transponiendo:

$$F_{(q)} = \frac{dR_c}{ds} = \left[\frac{dh}{dt} + \frac{1}{w^2} \left(\frac{d^3 h}{dt^3} \right) \right] / \left(\frac{ds}{dt} \right) \quad (12);$$

cuya inspección evidencia la exigencia de continuidad impuesta a la manufactura de levas sometidas a elevados regímenes dinámicos.

4 CONSTRUCCIÓN DE PLANTILLAS PARA LA MANUFACTURA DE LEVAS EMPLEANDO MÁQUINAS COPIADORAS DE TIPO OSCILANTE

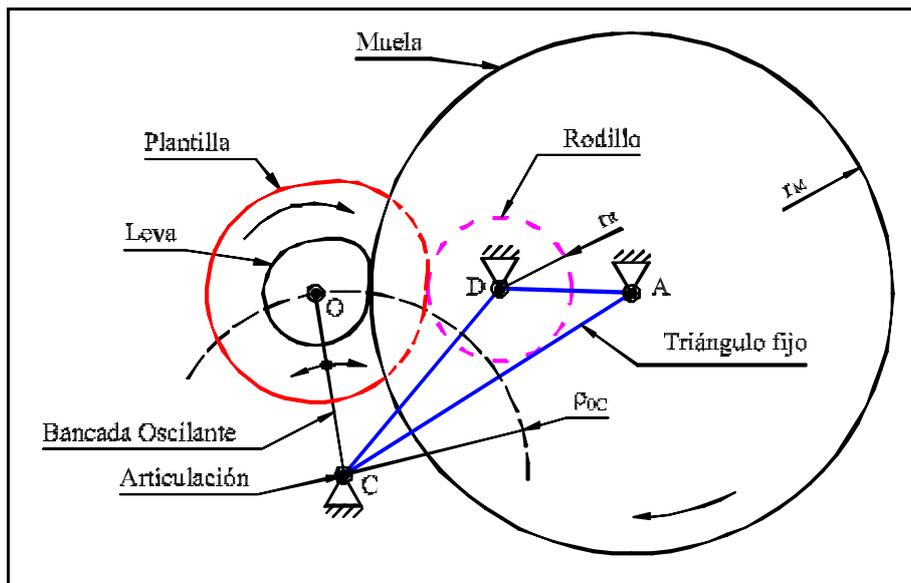


Figura 4

La Figura 4 aclara las funciones de los principales componentes del mecanismo copiadore: tanto la leva, objeto del mecanizado, como la plantilla, ambas supuestas planas, son eslabones no coplanares solidarizados por el eje O ; alrededor del cual rota el acoplamiento plantilla-leva. El eje O está articulado al brazo “basculante” OC , que pivota en C su oscilación respecto del bastidor fijo. La plantilla, en su propio plano, mantiene el contacto con un rodillo, cuyo eje D también está articulado al bastidor. Por último, girando alrededor de su eje, articulado al bastidor por A , la muela rectificadora genera el perfil de la leva.

Entonces, cuando el diseñador define el perfil de una leva, el de la plantilla correspondiente resulta unívocamente implicado por aquél y por las dimensiones características del cinematismo copiadore; o sea, las longitudes de los lados del “triángulo fijo” ADC , la extensión del brazo oscilante OC , el radio del rodillo (r_R) y el de la muela (r_M).

Al plantear la construcción de una plantilla por fresado y/o rectificado a CNC, se determina la trayectoria del eje de la fresa hallando la curva que describe el eje de una ruleta que rueda exteriormente sobre la plantilla; coincidiendo el diámetro de la ruleta con el de la herramienta asociada al procedimiento adoptado (fresa o muela). A efectos de simplificar la nomenclatura, en adelante designamos como “curva de diseño” a aquella recorrida por el eje de la herramienta en tanto labra el perfil de la plantilla.

Como, sobre toda la longitud de la leva a manufacturar, el radio de curvatura debe exhibir continuidad y derivabilidad, un análisis elemental sobre mecanismos de contacto determina idénticas exigencias para la plantilla y para la correspondiente “curva de diseño”.

5 SUCESIÓN DE ESPIRALES ACORDADAS CON CONTINUIDAD DE LAS TANGENTES, DEL RADIO DE CURVATURA Y DE SU DERIVADA RESPECTO DEL ARCO

A fin de condensar el tratamiento, reconocemos que una curva aproximante prácticamente coincide con la propia de diseño; simbólicamente:

$$s_D \cong \sum_{n=1}^N D S(q_n, r_{0n}, a_{0n}) \quad (13);$$

donde s_D interpreta la longitud de la curva de diseño extendida entre un par de sus puntos y el miembro derecho la longitud de la sucesión aproximante.

Respecto de la curva de diseño, definimos:

$$F_{D(s)} = \frac{d R_{CD(s)}}{d s} \quad (14);$$

cuyas integrales sucesivas, valuadas entre los extremos considerados de la curva, determinan: 1) El radio de curvatura, y 2) El ángulo subtendido entre las tangentes extremas; respectivamente según:

$$1) R_{CD(s)} = R_{CD(0)} + \int_0^s F_{D(u)} du, \text{ y } 2) \mathbf{a}_{D(s)} = \mathbf{a}_{D(0)} + \int_0^s R_{CD(u)}^{-1} du \quad (15).$$

Tomando en consideración las proyecciones del arco diferencial sobre los ejes cartesianos, $dx_D = \cos[\mathbf{a}_{D(s)}] ds$ y $dy_D = \text{sen}[\mathbf{a}_{D(s)}] ds$; integrándolas sobre toda la longitud se obtienen las coordenadas:

$$x_{D(s)} = x_{D(0)} + \int_0^s \cos \mathbf{a}_{D(s)} ds \text{ e } y_{D(s)} = y_{D(0)} + \int_0^s \text{sen} \mathbf{a}_{D(s)} ds \quad (16).$$

La definición anterior junto a la (15) detallan la forma exacta de reproducir la curva de diseño. Sin embargo, como nuestra estrategia apenas está basada en una sucesión de espirales, pareció razonable declinar la noción de exactitud y contentarse con aproximar la curva reemplazando la función $F_{D(s)}$ en aquellas expresiones por la correspondiente a la del arco aproximante respectivo, $F_{(s)}$; posponiéndose una estimación del orden que implica tal sustitución. Esta idea, simbólicamente, puede resumirse así:

$$\begin{aligned} &1) R_{C(s)} \cong R_{CD(0)} + \int_0^s F_{(u)} du; \quad 2) \mathbf{a}_{(s)} \cong \mathbf{a}_{D(0)} + \int_0^s R_{C(u)}^{-1} du; \\ &3) x_{(s)} \cong x_{D(0)} + \int_0^s \cos \mathbf{a}_{(s)} ds, \text{ y } 4) y_{(s)} \cong y_{D(0)} + \int_0^s \text{sen} \mathbf{a}_{(s)} ds \end{aligned} \quad (17).$$

Ahora discutiremos las exigencias que debe satisfacer una curva de diseño de aproximación factible según la metodología recién propuesta. Consideraremos que tanto el radio de curvatura de la aproximante como su derivada respecto del arco son continuas en los puntos de acuerdo entre pares de espirales consecutivas; supondremos además que en dichos enlaces se verifica $F_{D(s)} \cong F_{(s)}$ y $R_{CD(s)} \cong R_{C(s)}$, a fin de practicar reemplazos convenientes en la estimación de la función $\frac{dF}{ds}$ de cada espiral. Luego, al derivar la (5) respecto del arco (6) se tiene:

$$\left(\frac{dF}{ds} \right)_{(q)} = - \mathbf{r}_{(q)}^{-1} [z_{(q)}]^2 / \sqrt{1 + [z_{(q)}]^2} \left[\frac{dF}{dz_{(q)}} \right] \quad (18),$$

cuyo signo evidentemente resulta opuesto al de $\frac{dF}{dz_{(q)}}$; es decir:

$$\left(\frac{dF}{ds} \right)_{(q)} \geq 0 \text{ si } |z| \geq z_M \text{ ó } \left(\frac{dF}{ds} \right)_{(q)} \leq 0 \text{ si } |z| < z_M \quad (19).$$

Substituyendo $\mathbf{r}_{(q)}$ en la (18), con auxilio de (2) y (4), se obtiene:

$$g_{(s)} = \frac{dF}{ds} = z(1+z^2)(8z^4 - 6z^2 - 1) / \left[R_c(1+2z^2)^4 \right] \quad (20).$$

Asumiendo dos espirales de Arquímedes enlazadas de modo que, en el punto de acuerdo A , coincidan los radios de curvatura y sus derivadas respecto del arco, se tiene:

$$F_1 = F_2 = F_A = z(1+4z^2) / (1+2z^2)^2 \quad (21);$$

que se reduce a una ecuación polinomial de cuarto grado en la incógnita z :

$$16F_A z^4 - 4z^3 + 8F_A z^2 - z + F_A = 0 \quad (22);$$

de cuyas raíces, para el caso $(-F_M \leq F_A \leq F_M)$, importan las dos reales denotadas z_1 y z_2 en la Figura 3 (a); pues, las otras, las dos raíces complejas conjugadas carecen de significación geométrica. Además, conforme destaca esa figura, para $z > 0$ ($a > 0$) y variaciones positivas del ángulo descripto por una espiral respecto de su propia referencia local, diferenciando la (2) se comprueba:

$$dz = -r_{(q)}^{-1} a^2 dq \leq 0 \text{ si } dq \geq 0 \quad (23).$$

La anterior determina la variación de la función F ; precisando, en la región caracterizada por $\frac{dF}{dz} < 0$, los incrementos positivos del ángulo barrido por una espiral implican el aumento

de F ; asimismo, para la región caracterizada por $\frac{dF}{dz} > 0$, los incrementos positivos del ángulo

que barre una espiral ($dq > 0$) se asocian a decrementos de F (Véanse la instancia b de la Figura 3 y la a de la Figura 5).

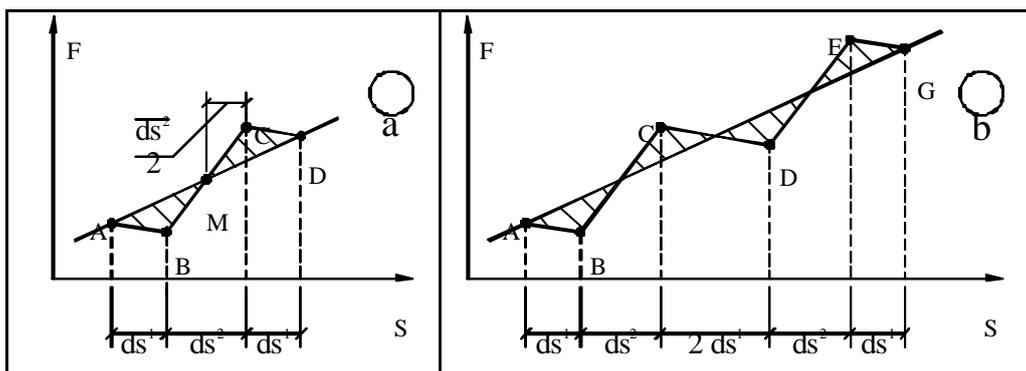


Figura 5

Suponiendo que en un punto A de la curva de diseño, en forma tangente a la misma, están acordadas dos espirales de Arquímedes acusando la continuidad del radio de curvatura y de su

derivada respecto del arco, siendo a la vez sendos valores respectivamente congruentes con los de la propia curva de diseño, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_D = z_D|_{1-2} \left[1 + 4 \left(z_D|_{1-2} \right)^2 \right] / \left[1 + 2 \left(z_D|_{1-2} \right)^2 \right]^2 \\ g_D|_{1-2} = \frac{z_D|_{1-2} \left[1 + \left(z_D|_{1-2} \right)^2 \right] \left[8 \left(z_D|_{1-2} \right)^4 - 6 \left(z_D|_{1-2} \right)^2 - 1 \right]}{R_{cD} \left[1 + 2 \left(z_D|_{1-2} \right)^2 \right]^4} \end{array} \right. \quad (24);$$

donde los valores de z subindiciados denotan las soluciones reales de la primera de las anteriores; o sea, las raíces reales de (22).

En consecuencia, para los puntos de la curva de diseño que cumplan $|F_D| \leq F_{Máx}$ es dable la determinación de las funciones $g_{D1} \leq 0$ y $g_{D2} \geq 0$. Estas nos han sugerido “heurísticamente” viable la aproximación de la curva de diseño mediante una sucesión infinita de espirales de Arquímedes acordadas con continuidad de tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco. En línea con este propósito planteamos el “seguimiento” de la curva F_D versus s_D , admitiendo despreciable la discrepancia entre esta longitud y s , que interpreta la longitud del arco mensurado sobre la sucesión de espirales (Véase 13). Por lo tanto, con relación a la Figura 5 (a), si tres espirales de longitud diferencial aproximan cierto tramo diferencial AD de la curva de diseño, por el simple hecho de “recuperarse” F_D en el punto M , surgen las siguientes equivalencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} ds_1 = (g_D - g_{D1}) / (g_{D2} - g_{D1}) ds \\ ds_2 = 2(g_{D2} - g_D) / (g_{D2} - g_{D1}) ds \end{array} \right. \quad (25);$$

donde g_D evalúa sobre la propia curva de diseño la derivada del radio de curvatura respecto de la longitud de su arco. La inspección de la Figura 5 (a) ilustra acerca de las “condiciones suficientes” para la existencia de la aproximación resuelta según una sucesión de infinitas espirales de Arquímedes, acordadas conforme las exigencias de continuidad antes precisadas; simplemente, para el caso $0 \leq F_D \leq F_{Máx}$, se tiene:

$$g_{D1} \leq g_D \leq g_{D2} \quad (26).$$

La última relación posee un significado geométrico simple y claro: en el dominio $s F$, la pendiente de la curva F_D de diseño, g_D , debe estar comprendida dentro del abanico g_{D1} y g_{D2} porque así, en cada punto de esa curva, las espirales diferenciales quedan acordadas cumpliendo, sin retorno o detenimiento ($dq \geq 0$), todos los requisitos de continuidad impuestos al problema. Esta condición adquirirá especial relevancia cual fundamento de los estima-

dores de inicialización necesarios para resolver numéricamente las sucesiones finitas de espirales de Arquímedes; que, en la realidad, son las aplicadas a aproximar las curvas de diseño. En consecuencia, cualquier curva caracterizada por $0 \leq F_D \leq F_{Máx}$ puede someterse al test que propone la (26) para establecer si puede o no ser “aproximada” mediante una sucesión de infinitas espirales de Arquímedes. Obviamente, un análisis similar vale con las curvas que verifican $-F_{Máx} \leq F_D \leq 0$. Luego, toda vez que la prueba (26) sea favorable, vale ensayar la aproximación mediante una sucesión finita de espirales de Arquímedes.

La integración sobre la longitud del arco de la discrepancia $D F_{(s)} = F_{D(s)} - F_{(s)}$ dispensa una aceptable estimación del orden de la aproximación del radio de curvatura. Por tanto, de acuerdo con la Figura 5 (a y b) y considerando la (25), pueden sumarse las áreas de las componentes “triangulares” de ese error, resultando:

$$D R_c \Big|_{AM} \cong \int_0^{\Delta s} D F_{(u)} du \cong f_{(g_D, g_D, g_{D2})} (\Delta s)^2 \tag{27},$$

donde $f_{(g_D, g_D, g_{D2})}$ da cuenta de la amplitud de la discrepancia en términos de las propiedades de la curva de diseño. Evidentemente, la sucesión finita de espirales permite reproducir el radio de curvatura exacto para aquellos valores de la longitud del arco, medido a lo largo de la curva de diseño, que anulen la sumatoria de las áreas triangulares; compensándose así “oscilatoriamente” los errores del radio de curvatura; es decir:

$$D R_c = \sum_i \int_0^{\Delta s_i} D F_{(u)} du = 0 \tag{28}.$$

La (27) sugiere que el radio de curvatura del perfil de diseño admite una aproximación de segundo orden respecto de la integral de la función F valuada sobre la longitud de la aproximante.

6 SUCESIÓN DE CINCO ESPIRALES DE ARQUÍMEDES

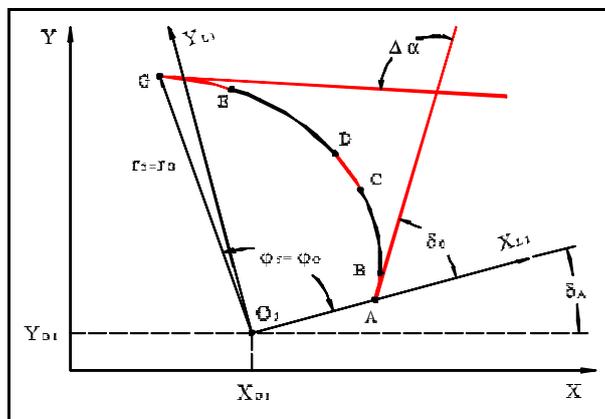


Figura 6

Manteniendo el supuesto de que la curva de diseño admite como aproximante una sucesión de infinitas espirales de Arquímedes, tratándose, por ejemplo, de una curva que cumple con $0 \leq F_D \leq F_{Máx}$ y $g_{D1} \leq g_D \leq g_{D2}$, se ensayará la aproximación de un tramo mediante una sucesión de cinco espirales de longitudes finitas y acordadas conforme los requisitos de continuidad de las tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco. Con este objetivo imponemos que tanto los puntos extremos de la sucesión y los propios extremos del tramo a aproximar (A y G en las figura 6 y 7), como los valores de las tangentes, de los radios de curvatura y de su derivada respecto del arco sean respectivamente congruentes. Esta formulación del problema arroja un sistema de cinco ecuaciones no lineales con cinco incógnitas angulares, conforme seguidamente explicamos.

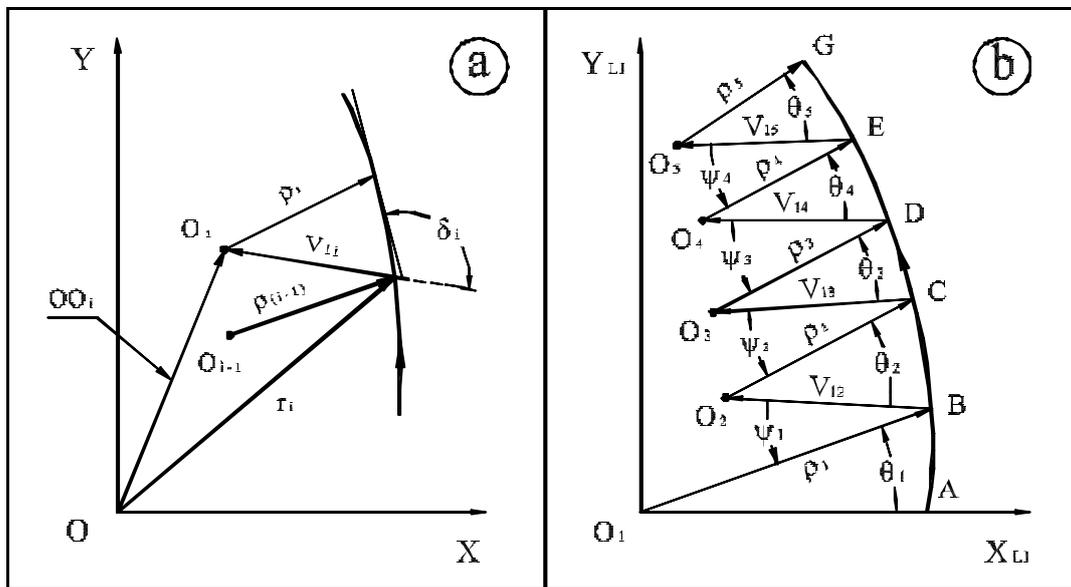


Figura 7

Por el punto A es posible definir una espiral tangente a la curva de diseño, cuyos valores del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco son respectivamente coincidentes con los correspondientes a la segunda. Dicha espiral queda determinada por una de las raíces reales de (22), suponiendo la menor z_{01} a la cual corresponde $g_{(z_{01})} < 0$ (Véanse las figuras 3 y 5). Asimismo, mediante (3) y (4) se deducen los parámetros de la primera espiral: el radio vector r_{01} y la tasa angular a_1 . Asumiendo como origen del referencial cartesiano el propio de la definición $r_{1(q)} = r_{01} + a_1 q$, con el eje de abscisas en la dirección $q = 0$, se obtienen los ángulos suplementarios:

$$d_1 = \arctg(1/z_{01}) \text{ y } b_1 = p - d_1 \quad (29),$$

que sitúan la referencia “local” de la primera espiral, subtendida a través del intervalo $0 \leq q \leq q_1$; cuya cota superior constituye la primer incógnita del problema. Esa referencia

“local” debe determinarse a fin de transformar la formulación al sistema coordinado respecto del cual fue descripta la curva de diseño. La ley de la primera espiral $\mathbf{r}_{1(q)} = \mathbf{r}_{01} + a_1 \mathbf{q}$ permite evaluar $\mathbf{r}_{B1} = \mathbf{r}_{01} + a_1 \mathbf{q}_1$ y el correspondiente z , según:

$$z_{B1(q_1)} = a_1 / (\mathbf{r}_{01} + a_1 \mathbf{q}_1) \quad (30),$$

que posee un significado en cierto modo “trivial”, constituyendo una de las raíces reales del polinomio (22) para $F_B = F_{(z_{B1})}$; es decir, la segunda espiral (**BC**), acordada en **B** a la primera (**AB**) y ajustada a las condiciones de continuidad especificadas, bien puede ser la prolongación hacia **C** desde **B** de la primera espiral. En cambio, se adopta la definida por la otra raíz real de (22). Entonces, dividiendo ésta entre $[z - z_{B1(q_1)}]$ se obtiene un polinomio completo de tercer grado, cuya única raíz real interpreta la solución buscada:

$$z_{B2}^3 + b z_{B2}^2 + c z_{B2} + d = 0 \quad (31),$$

cuyos coeficientes son las siguientes funciones de \mathbf{q}_1 :

$$\begin{aligned} 1) \ b = b_{(q_1)} &= z_{B1(q_1)} - F_{B1(q_1)}^{-1}; \ 2) \ c = c_{(q_1)} = z_{B1(q_1)} \left[z_{B1(q_1)} - F_{B1(q_1)}^{-1} \right] + 1, \text{ y} \\ 3) \ d = d_{(q_1)} &= z_{B1(q_1)} \left[z_{B1(q_1)}^2 - z_{B1(q_1)} F_{B1(q_1)}^{-1} + 1 \right] - 0.25 F_{B1(q_1)}^{-1} \end{aligned} \quad (32).$$

Entonces, aplicando la resolvente de Cardano a la ecuación polinomial (31), para los coeficientes dados por la (32), se obtiene exactamente la raíz real:

$$z_{B2} = z_{B2(q_1)} \quad (33),$$

también sólo función del ángulo \mathbf{q}_1 que subtiende la primera espiral. Asimismo, después de evaluar mediante (4) el radio de curvatura del extremo **B** de dicha espiral, recurriendo a la (2) se determinan:

$$\mathbf{r}_{02} = \mathbf{r}_{02(q_1)} \text{ y } a_2 = \mathbf{r}_{02(q_1)} z_{B2(q_1)} \quad (34),$$

las cuales definen completamente la segunda espiral en su referencial local; es decir, $\mathbf{r}_{2(q)} = \mathbf{r}_{02} + a_2 \mathbf{q}$, subtendida al intervalo $0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_2$; cuya cota superior es la segunda incógnita del problema. Además, el ángulo formado por la tangente común a las espirales enlazadas en **B** con el eje de abscisas de la referencia está impuesto también por \mathbf{q}_1 conforme:

$$d_{B(q_1)} = \arctg \left\{ \left[\mathbf{r}_{01} + a_1 \mathbf{q}_1 + a_1 \text{tg}(\mathbf{q}_1) \right] / \left[a_1 - \mathbf{r}_{01} \text{tg}(\mathbf{q}_1) - a_1 \text{tg}(\mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 \right] \right\} \quad (35),$$

cuya entidad modula la rotación que ajusta la referencia “local” de la segunda espiral. Por lo tanto, generalizando el procedimiento precedente, se determinan:

$$\mathbf{r}_{0i} = \mathbf{r}_{0i(q_1, \dots, q_{i-1})} \text{ y } a_i = a_{i(q_1, \dots, q_{i-1})} \quad (36).$$

Resumiendo, los parámetros de cada espiral, excepto los de la primera, son determinados mediante los ángulos q_i descriptos por las espirales que la anteceden en la sucesión. Una vez definida cualquiera de dichas curvas en su correspondiente referencia local, son requeridas dos transformaciones, una traslación y una rotación, para establecer la ley de esa espiral respecto del referencial en el cual es descrita la curva de diseño.

La Figura 7 (a) exhibe el ángulo d_i como el subtendido entre la tangente geométrica por el punto correspondiente a la cota angular superior q_i de la espiral i -ésima y el eje de las abscisas de su referencial local; b_i interpreta el correspondiente ángulo complementario. La misma figura ilustra también el significado de y_i . Los tres ángulos mencionados admiten una sencilla expresión generalizada:

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{d}_i &= \arctg \left\{ \left[\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i + a_i \tan(\mathbf{q}_i) \right] / \left[a_i - \mathbf{r}_{0i} \tan(\mathbf{q}_i) - a_i \mathbf{q}_i \tan(\mathbf{q}_i) \right] \right\}; \\ 2) \mathbf{b}_i &= \arctg \left(-\mathbf{r}_{0i} / a_i \right), \text{ y } 3) \mathbf{y}_i = \mathbf{p} + \mathbf{q}_i - \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{d}_i; \text{ con } i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (37).$$

Para determinar tanto el origen de cada referencia local como los puntos inicial y final de la espiral respectiva, son requeridos vectores cuya expresión generalizada resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{V}_{1i} &= -\mathbf{r}_{0i} \left\langle \cos \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k - \mathbf{y}_k) \right], \text{sen} \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k - \mathbf{y}_k) \right] \right\rangle \\ \vec{\mathbf{r}}_i &= (\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i) \left\langle \cos \left(\sum_{n=1}^i \mathbf{q}_n - \sum_{m=1}^{i-1} \mathbf{y}_m \right), \text{sen} \left(\sum_{n=1}^i \mathbf{q}_n - \sum_{m=1}^{i-1} \mathbf{y}_m \right) \right\rangle \\ O_{i-1} \vec{O}_i &= \left\langle \left[\mathbf{r}_{0(i-1)} + a_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} \right] \cos \left(\sum_{n=1}^{i-1} \mathbf{q}_n - \sum_{m=1}^{i-2} \mathbf{y}_m \right) - \mathbf{r}_{0i} \cos \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k - \mathbf{y}_k) \right], \right. \\ &\quad \left. \left[\mathbf{r}_{0(i-1)} + a_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} \right] \text{sen} \left(\sum_{n=1}^{i-1} \mathbf{q}_n - \sum_{m=1}^{i-2} \mathbf{y}_m \right) - \mathbf{r}_{0i} \text{sen} \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k - \mathbf{y}_k) \right] \right\rangle \\ O_1 \vec{O}_i &= \sum_{k=2}^i O_{k-1} \vec{O}_k \\ \vec{\mathbf{r}}_i &= O_1 \vec{O}_i + \vec{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \right. \quad (38),$$

con $i = 1, 2, 3, 4, 5$

donde r_{0i} y a_i , denotan los parámetros dados por (36).

En el punto extremo de cada espiral, correspondiente a la cota superior de la amplitud angular respectiva q_i , el radio de curvatura y su derivada respecto del arco son generalizables según:

$$\begin{cases} R_{Ci(q_1, \dots, q_i)} = [(\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i)^2 + a_i^2]^{3/2} / [(\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i)^2 + 2a_i^2] \\ F_{i(q_1, \dots, q_i)} = a_i (\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i) [4a_i^2 + (\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i)^2] / [(\mathbf{r}_{0i} + a_i \mathbf{q}_i)^2 + 2a_i^2]^2 \end{cases} \quad (39).$$

Luego, al particularizar la anterior en el punto G de la sucesión, se obtienen:

$$\begin{cases} R_{C5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = [(\mathbf{r}_{05} + a_5 \mathbf{q}_5)^2 + a_5^2]^{3/2} / [(\mathbf{r}_{05} + a_5 \mathbf{q}_5)^2 + 2a_5^2] \\ F_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \frac{a_5 (\mathbf{r}_{05} + a_5 \mathbf{q}_5) [4a_5^2 + (\mathbf{r}_{05} + a_5 \mathbf{q}_5)^2]}{[(\mathbf{r}_{05} + a_5 \mathbf{q}_5)^2 + 2a_5^2]^2} \end{cases} \quad (40),$$

dos de las ecuaciones del sistema a resolver.

El eje de abscisas de la referencia local de la última espiral y la tangente geométrica por el punto final de la sucesión aproximante, G , determinan el ángulo d_G ; d_G^* denota el ángulo subtendido entre esa tangente y el mismo eje de abscisas; simbólicamente:

$$d_G^* = d_G - \sum_{i=1}^4 (y_i - q_i) \quad (41).$$

Considerando dado $d_A = d_{1(R_{CA}, F_A)}$ por la (3), el ángulo entre la tangente geométrica por el punto inicial A y el eje de abscisas de la referencia local de la primera espiral, el ángulo subtendido entre las tangentes extremas de la sucesión aproximante, respectivamente congruentes con las tangentes extremas del tramo de la curva de diseño, que aproxima la sucesión, se obtiene la amplitud angular Da_{AG} “rotada” por esas tangentes mediante:

$$Da_{AG} = d_{G(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)}^* - d_1 = Da_{(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} \quad (42),$$

que constituye otra de las ecuaciones del sistema.

En cuanto a la posición del punto G , basta particularizar la forma generalizada de r_i , según:

$$\begin{cases} r_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \left| \vec{r}_G \right| \\ \mathbf{j}_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \text{Arg} \left(\vec{r}_G \right) \end{cases} \quad (43),$$

las cuales, junto a las establecidas en (40) y (42), completan el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} & 1) R_{C5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = R_G ; \quad 2) F_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = F_G ; \\ & 3) \mathbf{Da}_{(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \mathbf{a}_G - \mathbf{a}_A ; \quad 4) r_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} , \\ & \text{y } 5) \mathbf{j}_{5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)} = \text{arctg} \left(y_G / x_G \right) \end{aligned} \quad (44),$$

donde x_G e y_G , de acuerdo con los esquemas de las figura 6 y 7 (b), interpretan en la referencia local de la primera espiral las coordenadas cartesianas del punto G . La misma figura también revela que el ángulo rotado por la tangente entre los puntos extremos del tramo es la simple diferencia $\mathbf{Da} = \mathbf{a}_G - \mathbf{a}_A$. Por lo tanto, la solución del sistema no lineal (44) determina las cinco amplitudes angulares q_i ; cuyos valores definen la sucesión. A fin de implementar el resolutor puede recurrirse, por ejemplo, a un método de la familia Newton-Raphson; sin embargo, en razón del carácter fuertemente no lineal del sistema, para esa opción será menester complementar el esquema mediante un algoritmo capaz de suministrar valores de inicialización muy próximos a los de la solución del problema. Con ese sentido, son asumidos dos supuestos fundamentales: 1) La longitud del tramo de la curva AG (diseño), que aproxima la sucesión, es suficientemente pequeña; implicando, a lo largo de la misma, leves variaciones del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco; y 2) La función $F_{D(s)}$ posee un comportamiento aceptablemente lineal sobre el tramo a aproximar; es decir, $g_{D(s)} \cong \bar{g}_D$.

Luego, con los supuestos enunciados precedentemente, retomamos la noción sobre la existencia de la sucesión infinita de espirales para resolver la aproximación al verificarse (26).

Dividiendo miembro a miembro las expresiones de (25), se obtiene:

$$\frac{ds_2}{ds_1} = 2 \left(\frac{g_D - g_{D1}}{g_2 - g_D} \right) = c_{2-1} \quad (45);$$

es decir, la razón entre las longitudes diferenciales de un par de espirales consecutivas de aquella sucesión infinita apta para reproducir F y el radio de curvatura sobre la curva de diseño (Véanse la (28) y la Figura 5). Además, reuniendo (18), (20) y (25), surgen:

$$\begin{cases} ds_1 = \left[\frac{(1+2z_1^2)}{(1+z_1^2)} \right] R_{C_1} dq_1 \\ ds_2 = \left[\frac{(1+2z_2^2)}{(1+z_2^2)} \right] R_{C_2} dq_2 \end{cases} \quad (46),$$

donde z_1 y z_2 denotan el par de raíces reales del polinomio (22), valuadas para $F = F_A$. Luego, dividiendo miembro a miembro las expresiones dadas en (46), la continuidad del radio de curvatura en el enlace autoriza la cancelación de R_{C_1} y R_{C_2} ($R_{C_1} = R_{C_2} = R_{CA}$), obteniéndose:

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \left(\frac{1+z_1^2}{1+2z_1^2} \right) \left(\frac{1+2z_2^2}{1+z_2^2} \right) \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) \quad (47).$$

Asimismo, con arreglo a los supuestos asumidos y de acuerdo con la Figura 5 (b), por cancelarse las discrepancias triangulares y “recuperarse” F , la longitud del tramo DS_{AG} de la curva de diseño es fácilmente aproximable considerando $DS_2 \cong c_{2-1} DS_1$, en razón de la (45), y las estimaciones: $DS_3 \cong 2DS_1$, $DS_4 \cong 2DS_2$ y $DS_5 \cong DS_1$. Resultando entonces:

$$DS_{AG} \cong \sum_{i=1}^5 DS_i \cong (4+2c_{2-1}) DS_1 \quad (48).$$

Entonces, combinando (45), (47) y (48), son estimados los valores necesarios para inicializar la iteración que resuelve numéricamente el sistema (44):

$$\begin{aligned} Dq_1 &\cong \frac{DS_{AG}}{4R_{CA}} \left(\frac{g_{D2} - g_D}{g_{D2} - g_{D1}} \right) \left(\frac{1+z_1^2}{1+2z_1^2} \right); \\ Dq_2 &\cong \frac{DS_{AG}}{2R_{CA}} \left(\frac{g_D - g_{D1}}{g_{D2} - g_{D1}} \right) \left(\frac{1+z_2^2}{1+2z_2^2} \right); \\ Dq_3 &\cong 2Dq_1; \quad Dq_4 \cong Dq_2 \quad \text{y} \quad Dq_5 \cong Dq_1 \end{aligned} \quad (49).$$

La última constituye el rasgo crucial del problema, arrojando valores Dq_i de inicialización que vuelven aplicable un esquema del tipo Newton-Raphson a la resolución del sistema (44).

Si son cumplidos los supuestos especificados en el presente apartado, como la sucesión de cinco espirales explicada es apta para aproximar un tramo genérico AG de la curva de diseño, resultará factible extender a toda su longitud esta estrategia de aproximación.

7 MECANISMOS ACCESORIOS INTERMEDIARIOS PARA FRESADO O RECTIFICADO INDIRECTO A CNC DE PLANTILLAS CON CONTINUIDAD DE TANGENTES, DEL RADIO DE CURVATURA Y DE SU DERIVADA RESPECTO DEL ARCO

Toda vez que una curva de diseño satisface los tests (9) y (26), la plantilla cumplirá las exigencias de continuidad prescriptas en el título, siendo factible mecanizarla en modo directo; es decir, con la herramienta acoplada al husillo, describiendo su eje una sucesión finita de espirales de Arquímedes. En cambio, cuando la curva de diseño incumple alguna de aquellas pruebas, vale recurrir a un mecanismo intermediario como el esquematizado en la Figura 8; consistente básicamente en una barra con corredera recta, cuyo botón deslizante se articula al bastidor fijo en el punto O_C ; el husillo se mantiene articulado al extremo H del eslabón de la corredera, cuyo otro extremo (M) conduce la traslación del eje de la muela, alrededor del cual ésta gira al rectificar la plantilla. Para la configuración planteada, la curva exterior en la Figura 8 ilustra la trayectoria del husillo acusando cierto sesgo “circunferencial”; es decir, a través de su longitud y respecto de la propia plantilla, aquella curva da lugar a una leve variabilidad del radio de curvatura; implicando la disminución de las tasas F y g . Por tanto, adoptando posiciones convenientes del punto O_C , podrían obtenerse trayectorias del eje del husillo que satisfacen los tests (9) y (38). En tal caso, cada una de esas trayectorias consiste en una “curva de diseño” accesible al modo directo. Sin embargo, la variante de mecanizado que acaba de exponerse fue designada como el “modo indirecto” pues, sencillamente, el husillo no motoriga la herramienta en forma directa. No obstante la dificultad consignada, como el eje del husillo y el de la herramienta están separados por la distancia invariante L (Véase la Figura 8 (b)), bastará conectarlos mediante una transmisión por correas (directa o multiplicada) para sincronizar mecánicamente la rotación de trabajo de la herramienta (órgano conducido) con el giro del husillo (órgano conductor). Por lo tanto, para una fresadora a CNC de tres ejes controlados, el mecanismo plano explicado vuelve factible la construcción de plantillas para máquinas copiadoras oscilantes destinadas a manufacturar levas de motores modernos.

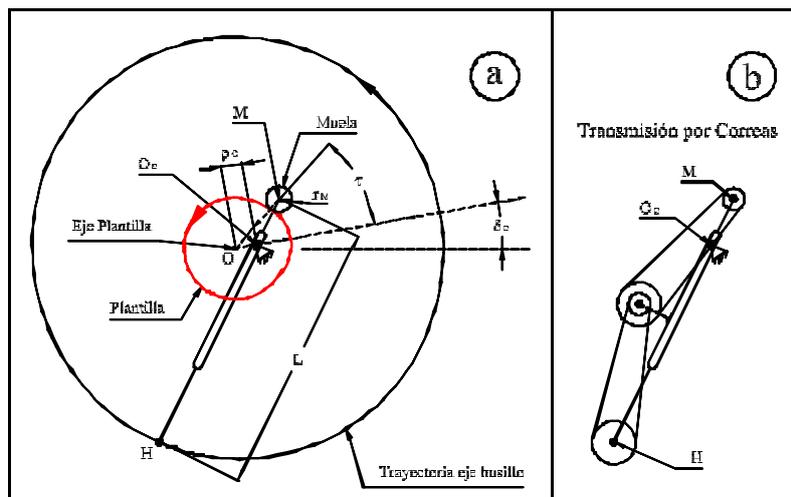


Figura 8

Cuando una plantilla es mecanizada en el modo indirecto, la curva del husillo es determinada unívocamente por el propio perfil de la plantilla y por las dimensiones características del mecanismo de corredera: L , r_c , r_M (radio de la muela) y d_c ; siendo éste el ángulo subtendido entre la dirección OO_C y una dirección x característica de la plantilla. Después, la trayectoria del husillo debe someterse a las pruebas (9) y (38), a efectos de establecer si comprende tramos aproximables según sucesiones finitas de espirales de Arquímedes. Con esta metodología, suponiendo dados L , r_M y el perfil de la plantilla, es posible, en el dominio $r_c d_c$, hallar las posiciones de la articulación asociadas a la mecanización de un tramo de la plantilla. Posteriormente, en la búsqueda de al menos una sucesión de tramos que totalice la longitud del mecanizado, son aplicables técnicas de optimización a propósito de definir el subconjunto de los puntos (r_c, d_c) “más aptos” para las sucesivas localizaciones de la articulación O_C . Las funciones objetivo de este problema son formulables, por ejemplo, minimizando el número de los reposicionamientos necesarios para completar el mecanizado. Asimismo, recordando que los referidos reposicionamientos son relativos a la plantilla, si razones geométricas y/o de disponibilidad de recursos fijan los máximos desplazamientos controlados (x, y) y/o el tamaño de la mesa de trabajo y las características del mecanismo de corredera L , r_c y r_M , todas estas dimensiones definirán las restricciones del problema que optimiza la selección de los d_{ci} .

Aunque este trabajo postula un mecanismo intermediario de corredera, es evidente que existen innumerables dispositivos teóricamente adecuados al cometido de “suavizar” la trayectoria del husillo. En particular, ofreciendo un control continuo del reposicionamiento de la articulación O_C en los sucesivos mecanismos imaginarios equivalentes al de la Figura 8 (variación temporal continua del ángulo d_c), un cuarto eje gobernado que conduzca la rotación sincrónica de la plantilla también concedería una solución al problema.

8 RESOLUCION NUMERICA

Fue ensayada la aproximación mediante sucesiones de espirales de Arquímedes con continuidad de tangentes; advirtiéndose que, a pesar de la sencillez del problema planteado, la resolución numérica del sistema asociado recurriendo a un esquema de la familia Newton-Raphson requirió una estrategia de inicialización cuidadosa, basada en una minuciosa interpretación geométrica del caso, para asegurar la convergencia de la solución (Véase ítem 7 de la Bibliografía). Luego, no obstante el interés académico de dicho ensayo, a los fines del presente trabajo esta estrategia apenas vale como alternativa a la simple interpolación circular, cuando deben ser programadas las trayectorias del fresado a CNC de levas lentas o de otros perfiles que no exigen continuidades de mayor orden. Este enfoque permite perfilar curvas cuyos radios de curvatura, como en general ocurre con la interpolación circular, son discontinuos; demandando además mayor costo computacional. Por lo tanto, hemos descartado su empleo como sustitución a la interpolación circular en la programación del maquinado por CNC.

El método de las cinco espirales de Arquímedes acordadas con continuidad de tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco fue aplicado a aproximar dos curvas,

ambas definidas en forma exacta. La del primer ejemplo está determinada según:
 $\left(\frac{dR_c}{ds}\right)_{(s)} = F_0$; con condiciones iniciales: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0)} = 0$, $R_{c(0)} = R_{c0}$ e $y_{(0)} = 0$. Entonces, integrando, surge el radio de curvatura: $R_{c(s)} = R_{c0} + F_0 s$.

Asimismo, las coordenadas cartesianas de la solución, dadas paramétricamente, resultan:

$$\begin{cases} x_{(s)} = -\frac{F_0 R_{c0}}{1+F_0^2} + \frac{R_{c(s)}}{1+F_0^2} \left\{ F_0 \cos \left[\ln \left(\frac{R_{c(s)}}{R_{c0}} \right) \right] + \text{sen} \left[\ln \left(\frac{R_{c(s)}}{R_{c0}} \right) \right] \right\} \\ y_{(s)} = \frac{R_{c0}}{2F_0} - \frac{R_{c(s)}}{2F_0} \left\{ \cos \left[\ln \left(\frac{R_{c(s)}}{R_{c0}} \right) \right] - \text{sen} \left[\ln \left(\frac{R_{c(s)}}{R_{c0}} \right) \right] \right\} \end{cases}$$

La definición precedente fue particularizada para: $F_0 = 0.2 < F_{Máx}$ y $R_{c0} \cong 5 \text{ mm}$; habiéndose hallado también, para $F_{D(s)} = F_0$ y $g_{D(s)} = \frac{dF}{ds} = 0$, las leyes analíticas $g_{1D(s)}$ y $g_{2D(s)}$

que, en este caso, verifican el test (26) en el rango $s \geq 0$. Esta propiedad significa, a través de ese subdominio, la existencia de la sucesión de infinitas espirales como aproximante y, en consecuencia, la validez de la inicialización (49), para resolver la aproximación (44) de un tramo genérico mediante una sucesión finita de espirales. La longitud del arco así aproximado fue de 5 mm , comprendiendo tres tramos que despliegan 15 espirales (5 por cada tramo).

El esquema de resolución adoptado en ambos ejemplos pertenece a la familia Newton-Raphson, inicializándose la iteración conforme (49). Cada elemento del jacobiano asociado al sistema (44) fue evaluado numéricamente por medio de un esquema en diferencias finitas de segundo orden (centrado). Complementariamente, un algoritmo automatiza la elección de la amplitud de los Dq_i necesarios para calcular el jacobiano; asegurándole mayor precisión mediante una estrategia que, computando hasta una tolerancia prefijada (por ejemplo: 10^{-2}) las discrepancias del orden de cada componente, por un lado elimina el ruido numérico y, por el otro, computa cada derivada recurriendo a un polinomio. La tolerancia adoptada para la solución del sistema (44) fue $e = 10^{-10}$. La curva adoptada para el segundo ejemplo de la aproxima-

mante del tramo según el método de las cinco espirales está definida por $\left(\frac{d^2 R_c}{ds^2}\right)_{(s)} = g_0$;

cuya solución analítica compone series hipergeométricas; particularizándose para: $g_0 = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$; $R_{c0} = 401.5 \text{ mm}$; $y_{(0)} = 0$ y $F_0 = 6 \cdot 10^{-3}$. La longitud del arco aproximado en este caso fue de 108 mm , incluyendo también 3 tramos (15 espirales). Sin embargo, a diferencia del ejemplo explicado previamente ($F_{(s)} = F_0$), la “existencia” de la sucesión infinita se extiende a un dominio acotado. Además, los parámetros elegidos para la curva

corresponden a la aproximación de un tramo de la plantilla que importa perfilar como ejercicio concreto de construcción por fresado y rectificado a CNC.

Acerca de los resultados gráficos correspondientes al primer ejemplo de aplicación se tiene: 1) Las figuras 9 y 10 muestran, respectivamente, la curva de diseño y la aproximante; sobre la cual, los centros de los círculos indican los extremos de las espirales y las cruces los extremos de los tramos; 2) La Figura 11 compara ambas curvas, aceptando como una medida continua de la discrepancia la separación entre éstas, definida en dirección normal a la aproximante; normalizándose la representación respecto de la longitud total del arco de diseño; 3) Las figuras 12, 13 y 14, para los puntos discrepantes establecidos en el ítem anterior, ilustran respectivamente las siguientes diferencias: a) Angulos rotados por las tangentes; b) Radios de curvatura y c) Derivada del radio de curvatura respecto del arco (F); 4) La Figura 15 exhibe, para los mismos puntos discrepantes, el comportamiento de la función $g_{(s)}$ (negro) valuada a lo largo de la sucesión aproximante, oscilando según “pulsos” discontinuos alrededor de $g_{D(s)}$ (rojo), prácticamente entre $g_{D1(s)}$ (azul) y $g_{D2(s)}$ (magenta), las funciones asociadas a la “existencia” de la sucesión infinita; corroborándose entonces la prueba (26); y 5) Las figuras 16 y 17 califican la aptitud del inicializador (49); pues recorriendo las espirales sucesivas de la aproximante se advierte que, alternativamente, se cumple:

$$g_{(s)} \cong g_{D1(s)} \text{ o } g_{(s)} \cong g_{D2(s)}.$$

Relativo a los resultados gráficos del segundo ejemplo: 1) Las figuras 18 y 19 muestran, respectivamente, la curva de diseño y la aproximante; donde, los centros de los círculos indican los extremos de las espirales y las cruces los extremos de los tramos; 2) La Figura 20 compara ambas curvas, midiendo la discrepancia como en el ejemplo anterior; 3) Las figuras 21, 22 y 23, para los puntos discrepantes conforme el criterio ya establecido, respectivamente exhiben las siguientes diferencias: a) Angulos rotados por las tangentes; b) Radios de curvatura y c) Derivada del radio de curvatura respecto del arco (F); y 4) La Figura 24 ilustra, para los mismos puntos discrepantes, el comportamiento de las funciones $g_{(s)}$ (negro), $g_{D(s)}$ (rojo), $g_{D1(s)}$ (azul) y $g_{D2(s)}$ (magenta). No siendo significativo el error de la función $g_{(s)}$ de cada una de las espirales sucesivas con relación a los pronósticos respectivos $g_{D1(s)}$ y $g_{D2(s)}$; explicándose esta concordancia en razón de que el inicializador (49) está basado, justamente, en la linealidad de F respecto de s ($g = \text{Constante}$).

A efectos de ejemplificar la manufactura de levas empleando un acoplamiento leva – mecanismo copiador – plantilla, se adoptó una leva polinomial simétrica y sin rampa (simplificación) de un motor 4T típico; cuyas características son las siguientes: radio base de 22.375 mm; 10 mm de alzada máxima; 240° de apertura (en ángulo de rotación del cigüeñal), y exponentes del polinomio: 2, 11, 16, 21 y 42. A seguir, asumiendo aquel perfil de la leva fue deducido el de la plantilla, para un mecanismo copiador oscilante caracterizado según: $\overline{AD} = 112.8 \text{ mm}$; $\overline{DC} = 207.9 \text{ mm}$ y $\overline{CA} = 291.3 \text{ mm}$, para el “triángulo fijo”; la longitud del brazo oscilante $r_{oc} = 157.5 \text{ mm}$; radio del rodillo en contacto con la plantilla, $r_R = 61.5 \text{ mm}$ y el de la muela

rectificadora $r_M = 223\text{ mm}$. Finalmente, el mecanismo de corredera analizado para mecanizar un tramo de la plantilla (“modo indirecto”) como una sucesión finita de espirales fue configurado según: 500 mm de separación entre el eje del husillo y el de la herramienta; radio de la herramienta de 25 mm ; distancia entre el pivote de la corredera y el eje de la plantilla $r_C = 40\text{ mm}$ y el ángulo subtendido desde dicha dirección hasta la asociada a la alzada máxima $d_C = 0$. Los principales resultados gráficos obtenidos son: 1) Las figuras 25 y 26 muestran, respectivamente, el comportamiento del radio de curvatura de la plantilla y el de la trayectoria del eje del husillo; evidenciándose, al comparar las curvas, el efecto “suavizante” del esquema indirecto; 2) La Figura 27 expone la distribución de F sobre la plantilla; 3) La Figura 28 exhibe la tasa F del husillo (muy “suave” al cotejarla con la de la plantilla) y las cotas ($-F_{M\acute{a}x} \leq F_H \leq F_{M\acute{a}x}$) entre las cuales existen las raíces reales z_1 y z_2 ; 4) La Figura 29 define la función g asociada a la plantilla; y 5) La Figura 30 ilustra los comportamientos de las funciones $g_{H(s)}$ (rojo), $g_{H1(s)}$ (azul) y $g_{H2(s)}$ (negro) valuadas sobre un tramo de la trayectoria del husillo, donde valen tanto la sucesión infinita como las finitas; comprobándose $g_{H1(s)} \leq g_{H(s)} \leq g_{H2(s)}$; significando que, con la configuración elegida del mecanismo intermedio, es posible resolver el tallado de algunos arcos de la plantilla. La totalidad del tramo correspondiente a la circunferencia base de la plantilla es obviamente mecanizable en forma directa; siéndolo también parcialmente en el modo indirecto. Sin embargo, como aplicar este esquema al caso de una curva “torneable” supone aproximar un arco circunferencial moviendo el eje del husillo sobre una sucesión de espirales, solucionar así el problema constituiría un auténtico despropósito. Empero, ese ejercicio representa un arduo test para la contrastación del esquema propuesto; principalmente en cuanto a la eliminación del ruido numérico, no habiéndose expuesto los resultados de dicho test sólo con intención de resumir.

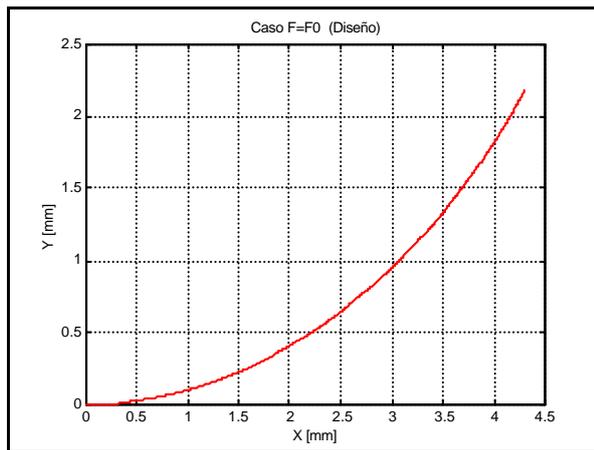


Figura 9

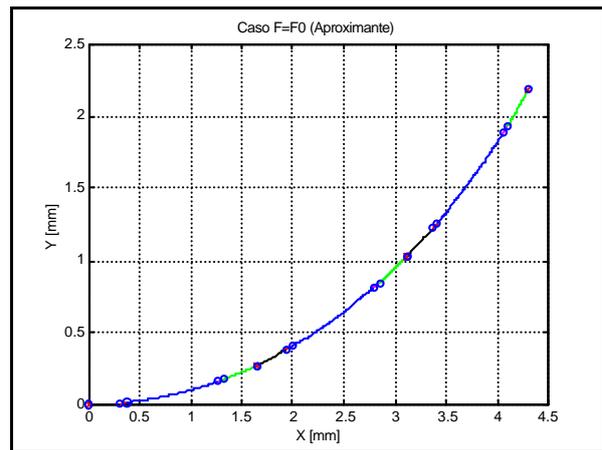


Figura 10

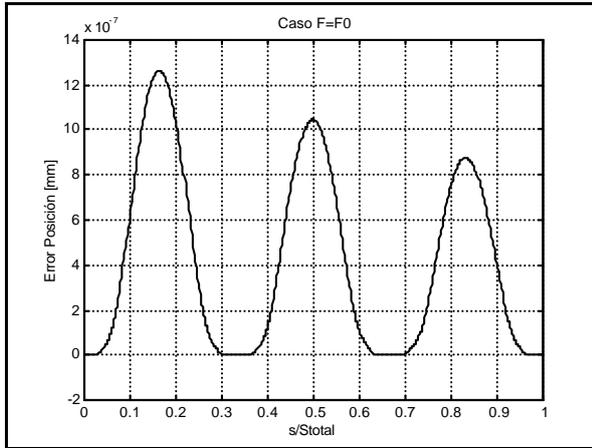


Figura 11

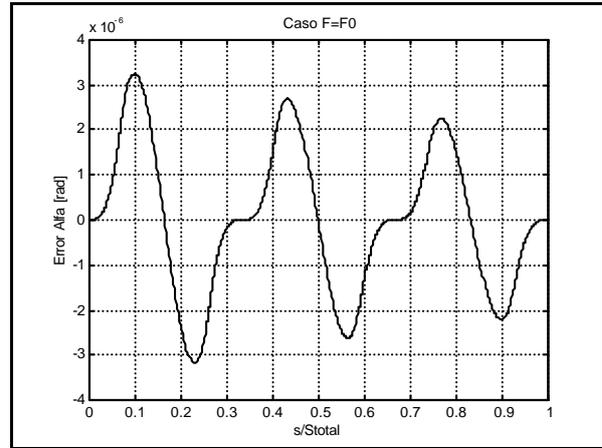


Figura 12

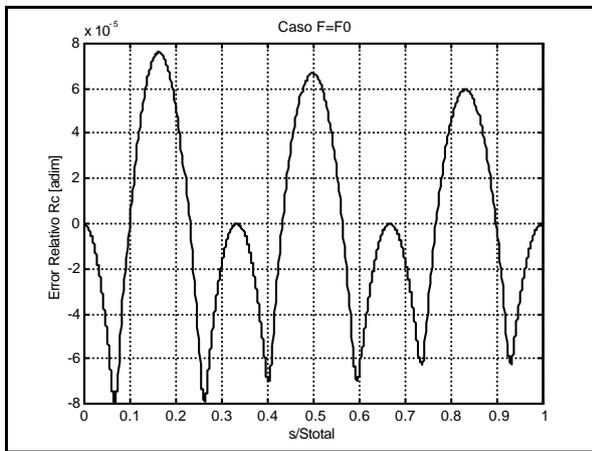


Figura 13

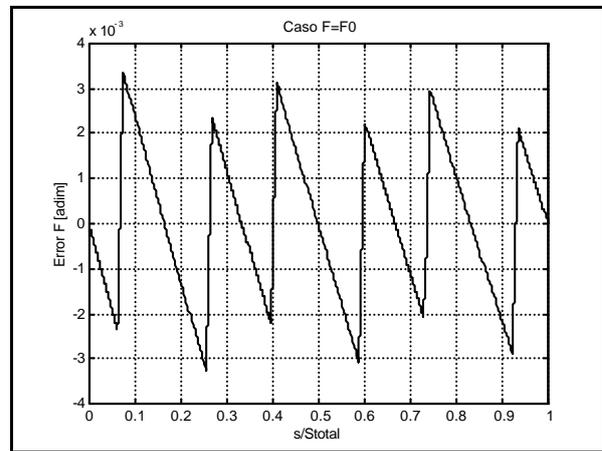


Figura 14

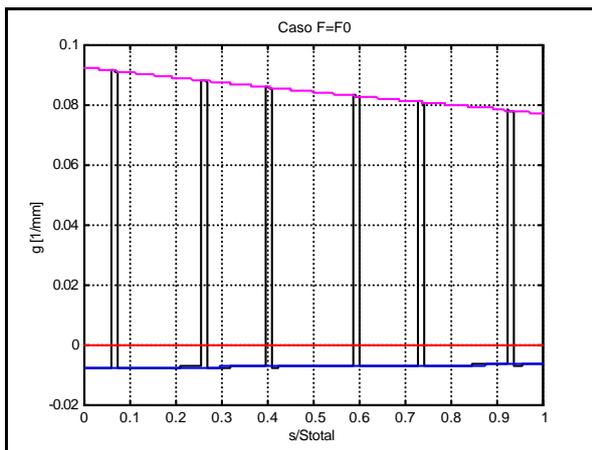


Figura 15

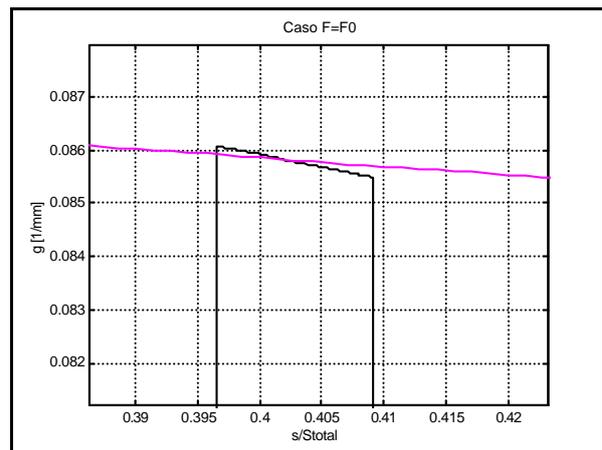


Figura 16

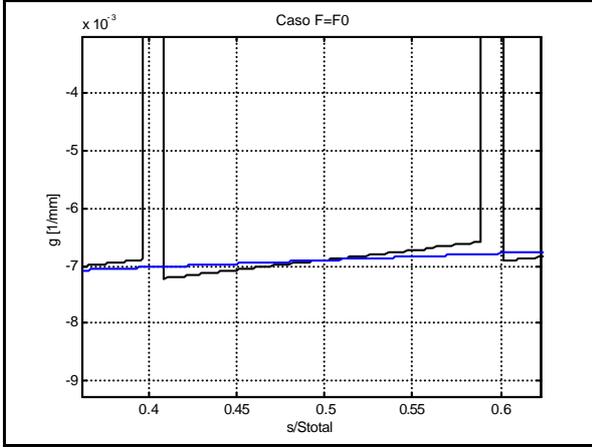


Figura 17

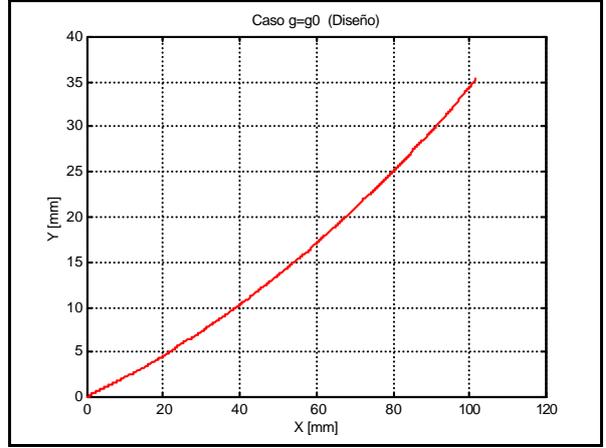


Figura 18

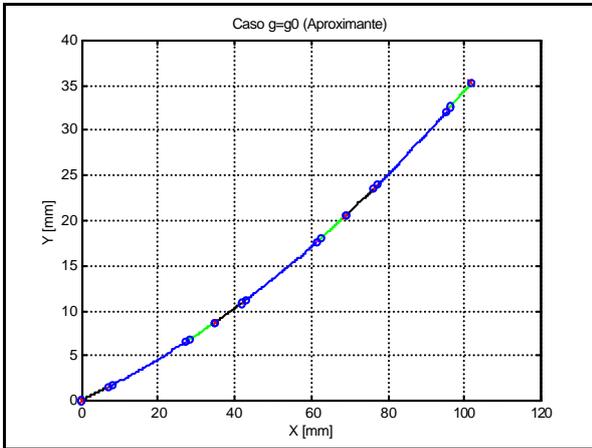


Figura 19

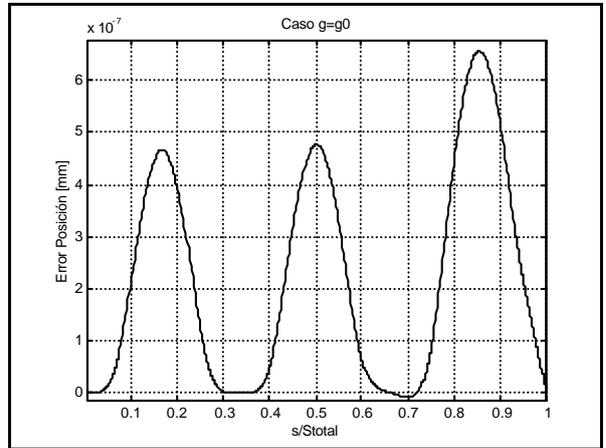


Figura 20

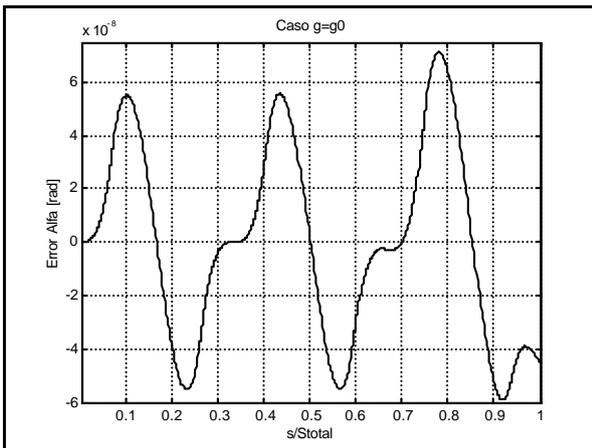


Figura 21

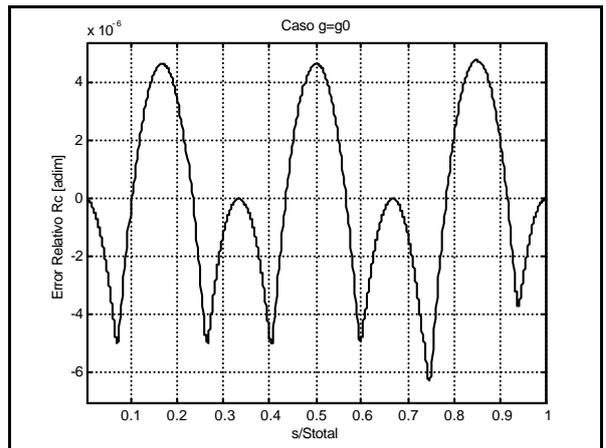


Figura 22

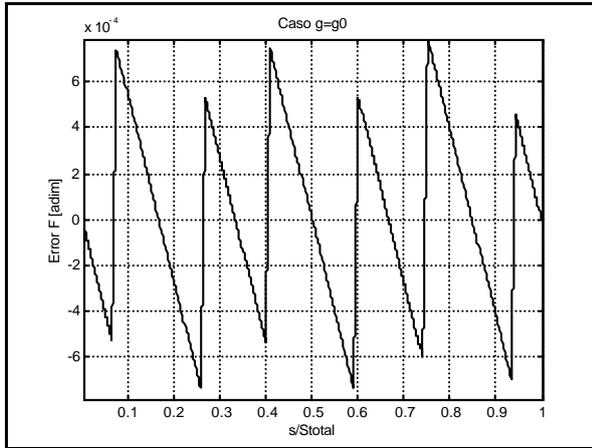


Figura 23

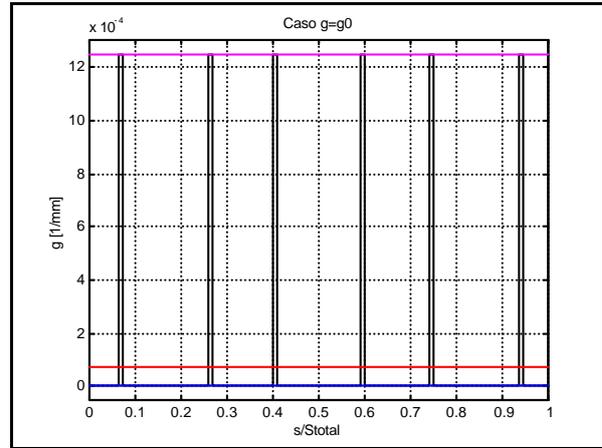


Figura 24

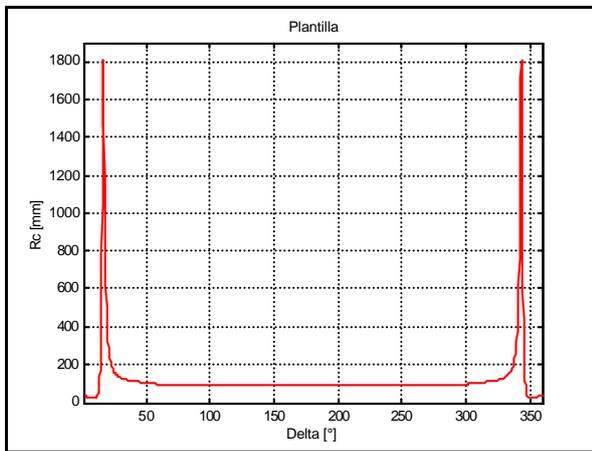


Figura 25

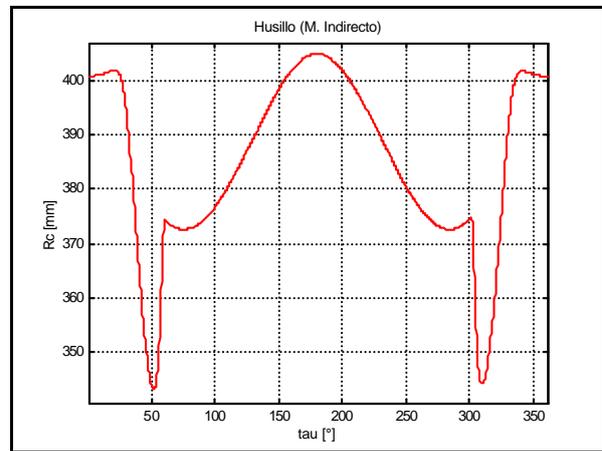


Figura 26

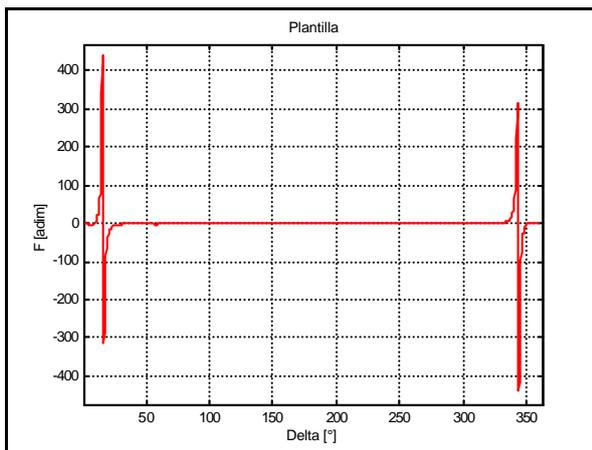


Figura 27

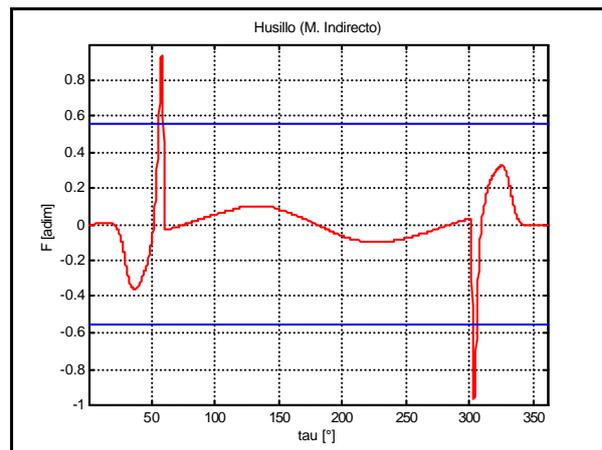


Figura 28

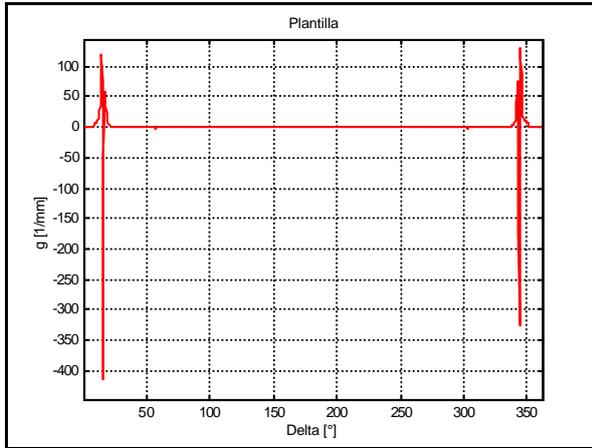


Figura 29

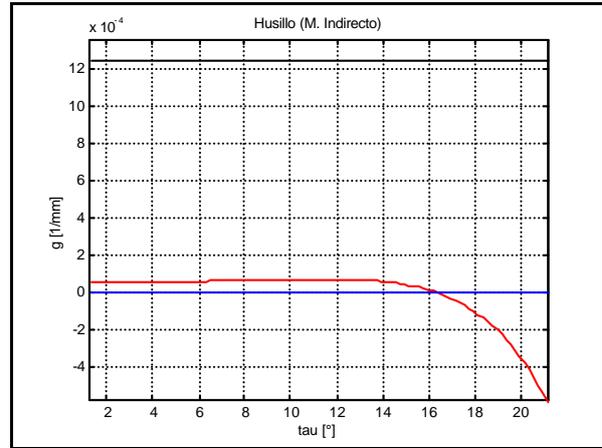


Figura 30

9 CONCLUSIONES

Este trabajo planteó el fundamento matemático y numérico de un código computacional destinado a generar la aproximación de curvas suaves, asimilables a la demanda de un diseñador, mediante sucesiones finitas de espirales de Arquímedes.

Se introdujo una idea sobre la existencia de curvas aproximantes definidas según sucesiones infinitas de espirales de Arquímedes, como condición suficiente para la existencia de aproximantes resueltas mediante sucesiones finitas, cuyos pares consecutivos quedan enlazados con continuidad de tangentes, del radio de curvatura y de su derivada respecto del arco. Para esta estrategia, la resolución numérica fue fundada en el acordamiento de cinco espirales cumpliendo las exigencias de continuidad estipuladas a lo largo de cada tramo de la curva de diseño; manteniéndose idénticos requisitos entre tramos sucesivos. El esquema resultó hábil para resolver la aproximación de un par de curvas cuyos radios de curvatura, en términos de las longitudes respectivas, están comportados en forma lineal o cuadrática. El excelente grado de aproximación obtenido en ambos tests propicia el empleo de este esquema asistiendo a la formulación del código que programa la trayectoria (x,y) del husillo de una fresadora a CNC, provista de dos o tres ejes controlados. Este abordaje, para el caso de una fresa o muela montada en el husillo (“mecanizado directo”), exhibió aptitud para el maquinado de perfiles caracterizados por un elevado orden de continuidad; en particular: 1) Tramos de plantillas para manufacturar levas de motores 4T modernos, y 2) Paletas y estator de un prototipo de motor rotativo en desarrollo. Asimismo, cuando una prueba basada en la propia curva de diseño inhibió la ejecución de aquel modo directo, fue no obstante comprobado que, con auxilio de un dispositivo accesorio sencillo, también es factible construir perfiles ajustados a los fuertes requerimientos de continuidad prescriptos.

10 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Harold A. Rothbart, “*Cam Design Handbook*”, McGraw Hill, 2003.
- [2] Robert L. Norton. “*Cam Design and Manufacturing Handbook*”, Industrial Press, 2001.

- [3] Robert L. Norton, “*Diseño de Maquinaria*”, MacGraw Hill, 1995.
- [4] Singiresu S. Rao, “*Engineering Optization*”, John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [5] Joseph E. Shigley, J.J. Uicker, “*Teorias de máquinas y mecanismos*”, McGraw Hill, 1990.
- [6] Harold A. Rothbart, “*CAMS, Design, Dynamics and Accuracy*”, John Wiley & Sons Inc., 1956.
- [7] Jorge A. Toth, Ezequiel J. López, “*Construcción de Perfiles No Alabeados por Fresado y/o Rectificado a CNC, Métodos de Interpolación*”, Reporte Interno, U.N. Comahue, 2003.

11 RECONOCIMIENTOS

- Al Sr. David Zampini por sus siempre oportunos e inteligentes aportes en la discusión de las ideas.
- Al alumno Sebastián Celescenco por colaborar en la elaboración de los esquemas incluidos en este trabajo.