

A RELIABILITY CRITERION TO EVALUATE THE PERFORMANCE OF STRUT-AND-TIE MODELS APPLIED IN DESIGN AND ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES.

João da Costa Pantoja^a, Luiz Eloy Vaz^a, Luiz Fernando Martha^b

^a*Universidade Federal Fluminense, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, Setor de Estruturas, Rua Passos da Pátria, São Domingos, Niterói 24210-240, Rio de Janeiro, Brasil, civil@engenharia.uff.br, <http://www.engenharia.uff.br/civil>*

^b*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC Rio, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação, Rua Marquês de São Vicente, 225, 22453-900 Gávea Rio de Janeiro, Brasil, civ-pos@puc-rio.br, <http://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/progciv.html>*

Keywords: Reliability, Topology optimization, Strut-and-Tie model, Concrete structures

Abstract. This paper shows a reliability criterion for analysis of reinforced concrete structures applying the strut-and-tie model. Monte Carlo simulation method is used to calculate the reliability index and probability of failure modes, considering both safety and ductile behavior of the strut-and-tie model. Three different formulations presented in the literature to compute the effective compression resistance of the concrete are considered: ACI-318, EUROCODE and Schailch et al. Both reliability index value and ductility behavior are considered in this comparison. Two examples for design of a deep beam using reliability analysis for validation of safety and ductility aspects are presented.

1 INTRODUÇÃO

O método das bielas e tirantes pode ser utilizado para o projeto de regiões da estrutura onde as hipóteses básicas da teoria de flexão, propriamente a que as seções transversais permanecem planas antes e depois da flexão, não podem ser aplicáveis. Nessas regiões ocorrem descontinuidades no campo de deslocamentos e tensões provenientes da aplicação de forças concentradas, reações de apoio e mudanças bruscas de geometria na estrutura. A utilização do método das bielas e tirantes para projeto se baseia na hipótese que certas regiões nas estruturas de concreto podem ser analisadas e projetadas segundo uma estrutura treliçada idealizada no interior do contínuo, formada por bielas e tirantes conectados pelos nós.

O desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes em peças de concreto armado utilizando métodos convencionais envolve um processo iterativo de tentativa e erro, baseado na intuição e experiência do projetista estrutural. É uma difícil tarefa para os projetistas estruturais encontrar um modelo de bielas e tirantes adequado em peças de concreto com condições de carregamento e geometrias complicadas. Como resultado disso, técnicas de computação gráfica e otimização topológicas vem sendo utilizadas no auxílio à modelagem via modelo de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado, conforme apresentado nos trabalhos de Ali (2003), Liang (2005), Tje N.T. e Kuchma D.A. (2007) e Bruggi (2009).

A técnica da otimização topológica do contínuo, que consiste na seleção da melhor configuração a ser utilizada no projeto de estruturas contínuas, têm se tornado extremamente popular nos últimos anos. Um trabalho pioneiro na área de otimização de layout foi apresentado por Rozvany et al (1991). Também trabalhos na área de homogeneização baseada em métodos de otimização foram apresentados por Bendsøe et al (1988). Nesse último, a otimização topológica é tratada como um problema de redistribuição de material compósito em microestruturas num domínio de projeto. Uma formulação baseada na função de densidade com variável de projeto foi apresentada por Bendsøe et al (1999), propondo sua variação em cada elemento. Os métodos de otimização que utilizam esse tipo de formulação buscam o ótimo através da remoção de material inutilizado dentro do domínio de projeto. O denominado método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) tem sido utilizado na determinação do encaminhamento de cargas ótimo dentro do contínuo da estrutura de concreto conforme apresentado em Pantoja et al (2009) e Bruggi (2009). Dessa maneira, considerando o teorema do limite inferior da plasticidade pode-se obter então um modelo de bielas e tirantes estaticamente admissível a ser aplicado no dimensionamento da estrutura de concreto.

Uma alternativa bastante interessante para avaliação do desempenho dos modelos de bielas e tirantes obtidos com relação ao seu nível de segurança e de ductilidade. A ductilidade é necessária de modo que seja possível garantir o funcionamento correto da treliça idealizada no interior do contínuo. Uma opção proposta por Pantoja et al (2010) é de um critério baseado em confiabilidade para

verificar esse desempenho. Um método de simulação do tipo Monte Carlo pode então ser utilizado de forma a obter os índices de confiabilidade do sistema e relação de probabilidade de falhas dos diversos modos de falha existentes.

Esse trabalho faz uma comparação de desempenho de dois modelos diferentes utilizados para dimensionamento de uma mesma viga parede. O modelo 1 foi retirado dos compêndios da norma americana ACI 318-02 (2002). O modelo 2 foi obtido via otimização topológica e dimensionado segundo as orientações normativas do ACI 318-02 (2002). Também diversas formulações para cálculo da resistência efetiva à compressão do concreto segundo Schlaich et al (1987), EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) são utilizadas e comparadas entre si.

2 EXEMPLO

O exemplo de viga parede a ser analisado foi retirado do ACI 318-02 (2002) sendo suas unidades transformadas para o sistema internacional de unidades-SI e seus valores arredondados. A estrutura representa uma viga parede bi-apoiada de seção retangular constante cujos valores de cargas e propriedades geométricas e do material são mostrados na Figura 1.

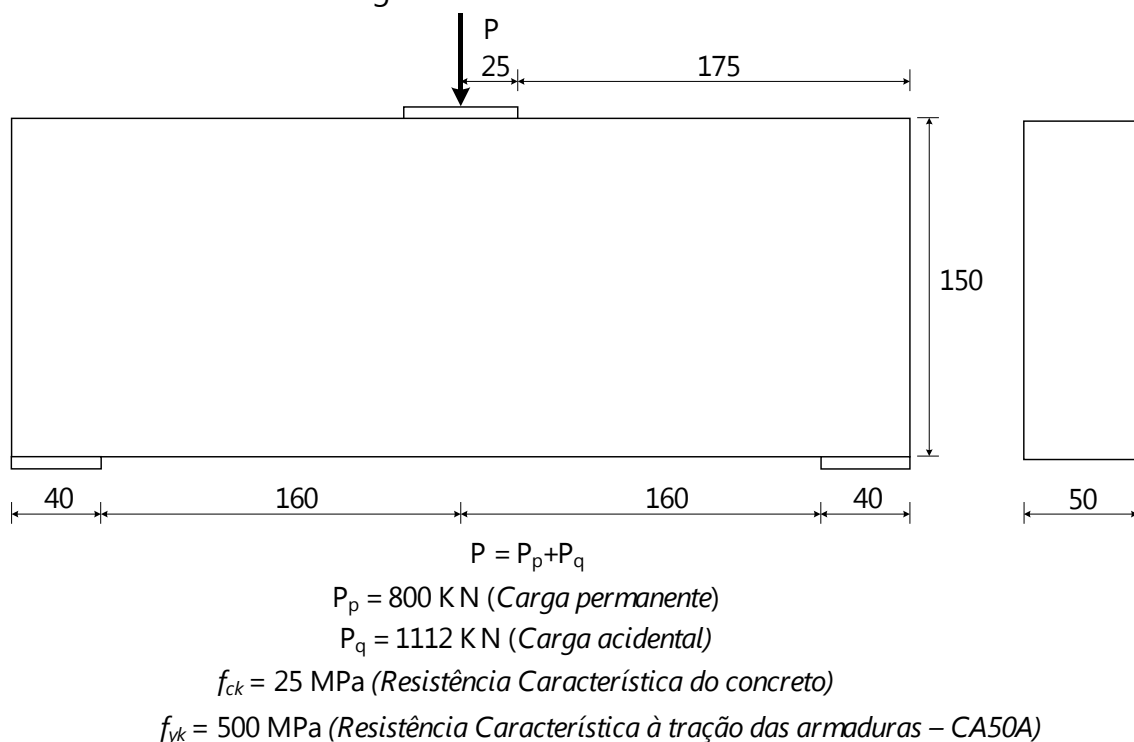


Figura 1: Exemplo de viga parede presente no ACI 318-02 (2002)

3 MODELO PROPOSTO PELO ACI 318-02 (2002)

O modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 2 é apresentado no ACI 318-

02 (2002) como exemplo ilustrativo para aplicação do modelo de bielas e tirantes. O modelo apresenta dois tipos de regiões nodais uma referente ao ponto de aplicação da carga P e outra referente aos pontos de apoio. Utilizando a nomenclatura originalmente proposta por Schlaich et al (1987), pode-se classificar o nó 1 como nó do tipo CCC, típicos nas regiões de introdução de cargas ou de reações de apoio, onde o estado tensional é decorrente das três forças de compressão existentes (carga P e bielas). Nesse caso o comprimento vertical do nó deve ser tal que a pressão sobre a placa de apoio governe o dimensionamento do nó.

Os nós 2 e 3 são idênticos e representam nós do tipo CCT, típicos de suportes de extremidades nos quais a altura de distribuição da armadura deverá ser definida. Foram adotados os valores apresentados no exemplo do ACI 318-02 (2002).

As bielas 1 e 2 serão responsáveis pelo encaminhamento de cargas dentro da contínuo até os apoios existentes. Conforme mostrado por Schlaich et al (1987), os campos em forma de leque ou garrafas são frequentemente encontrados em regiões D, onde cargas concentradas são introduzidas na estrutura e nela se espriam. As bielas foram consideradas do tipo leque.

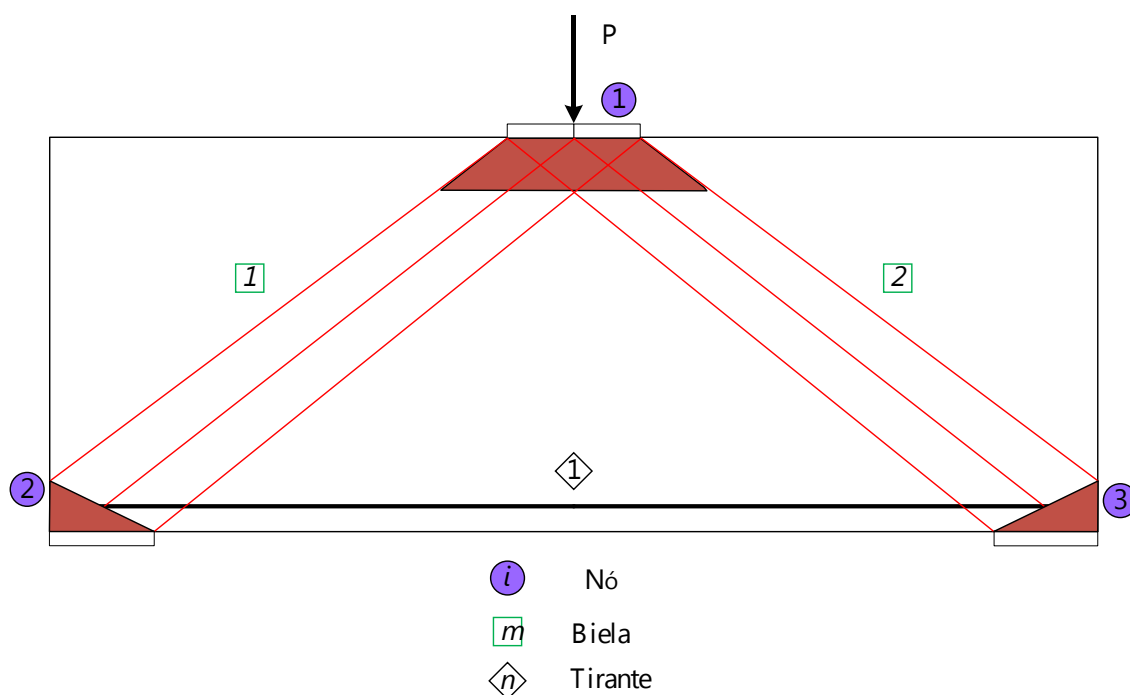


Figura 2: Modelo de bielas e tirantes proposto pelo ACI 318-02 (2002)

No tirante existente a força atuante será suportada pela armadura, sem que a resistência do concreto à tração seja considerada. Para dimensionamento do modelo o considerou-se o centro de gravidade das armaduras coincidentes com centro de gravidade do modelo (nós).

4 MODELO OBTIDO VIA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A figura 2 apresenta uma topologia obtida via otimização topológica com aplicação de simetria, para o modelo proposto. O problema de otimização de topologia foi formulado como um problema de distribuição de material no contínuo via modelo SIMP (*Solid Isotropic Material Penalization*). Essa modelagem busca a topologia ótima para uma estrutura através da aplicação de um material isotrópico com penalização na modelagem do problema. Uma malha com 75x100 elementos quadriláteros de 4 nós foi utilizada de forma a distribuir o material no seu interior. Uma fração de volume de 25% do volume inicial foi adotada como equação de restrição no processo de otimização. Exemplos da aplicação de técnicas de otimização na geração de topologias podem ser vistos em Ali (2003), Liang (2004), Bruggi (2009) e Pantoja et al (2009). Nesse exemplo não foi necessário o uso dos elementos indutores propostos por Pantoja et al (2009).

Observa-se uma razoável modificação na topologia do modelo se comparamos o modelo proposto pelo ACI 318-02 (2002) com esse. Isso mostra como é possível a obtenção de modelos topológicos distintos, estaticamente admissíveis, capazes de representar o encaminhamento de cargas no interior do contínuo.

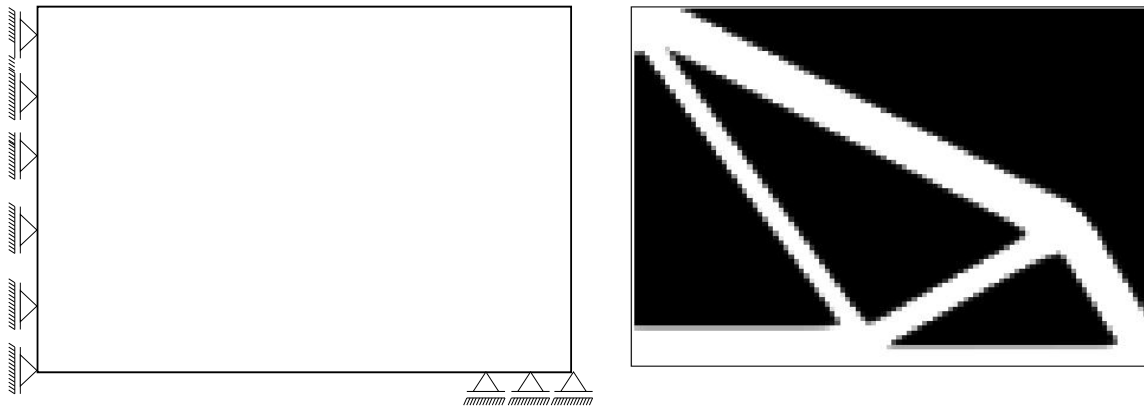


Figura 2: Resultado do processo de otimização topológica com utilização

A Figura 3 mostra o modelo de bielas e tirantes referente à topologia obtida. Verifica-se que o novo modelo apresenta um significativo aumento tanto das regiões nodais quanto do número de bielas e tirantes. Aplicando ao modelo às imposições geométricas referentes às placas de apoio e de aplicação de carga foi possível obter as espessuras limites e alturas das regiões nodais necessárias a montagem das equações de falha do modelo. Esse metodologia segue as orientações presentes originalmente no trabalho de Schlaich et al (1987) e apresentadas também em Silva e Giongo (2000) e Souza (2004).

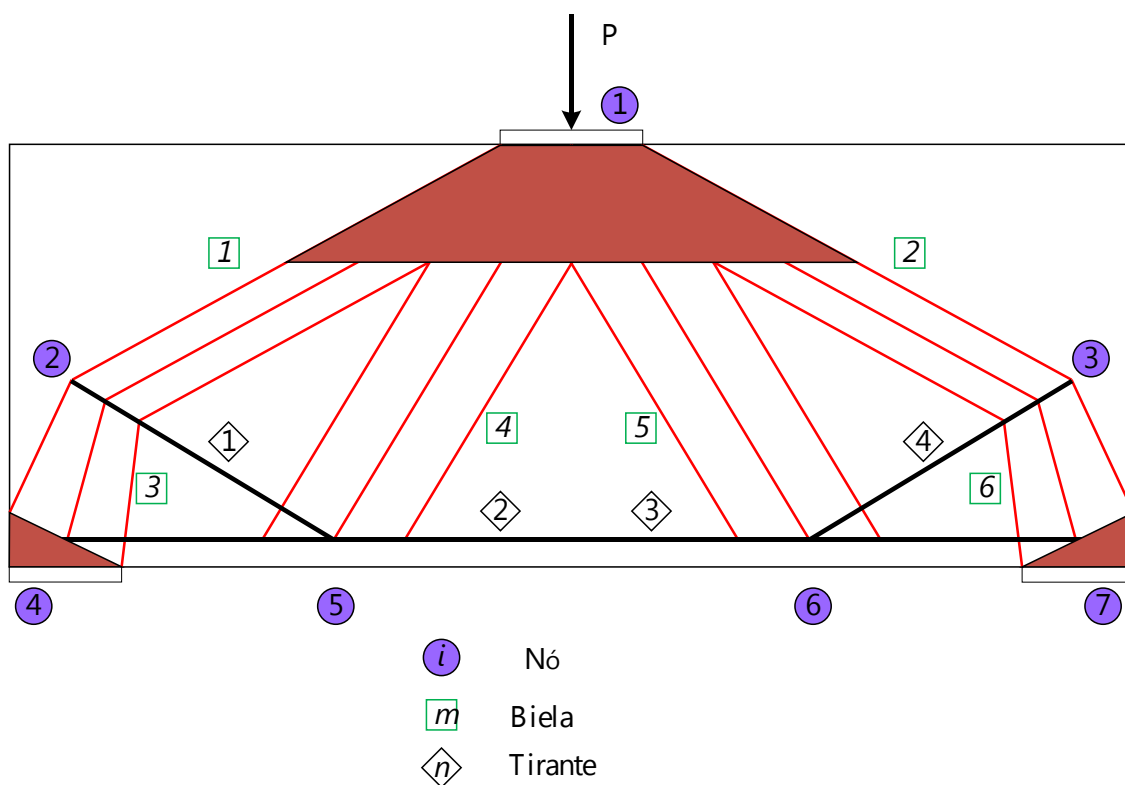


Figura 3: Modelo de bielas e tirantes obtido via processo de otimização topológica

5 CRITÉRIO BASEADO EM CONFIABILIDADE

Uma vez obtidos os dois modelos de bielas e tirantes estaticamente admissíveis conforme mostrado anteriormente, a adoção de um critério para avaliação do desempenho de cada um deles pode ser bastante interessante. O artigo apresentado por Schlaich et al (1987) propõe um critério baseado no Princípio da Energia de Deformação Mínima. Com base nesse critério modelos que possuam tirantes mais curtos são os melhores uma vez que a contribuição das bielas pode ser geralmente omitida devido aos seus pequenos valores de deformação. Posteriormente, no entanto, Mohamed e White (2001) mostraram que modelos baseados nesse critério podem levar a estruturas com uma fissuração excessiva e baixos valores de resistência.

Uma opção bastante interessante utiliza um critério baseado em confiabilidade para avaliar os aspectos relativos tanto a segurança quanto a ductilidade relativa aos modelos propostos. Um trabalho nessa área foi inicialmente proposto e mostrado em Pantoja et al (2010) para avaliação comparativa do desempenho de uma viga parede considerando as diversas formulações existentes para consideração da resistência efetiva à compressão do concreto presentes no ACI 318-02 (2002), CEB (1990) e Schlaich et al (1987). A formulação baseada em confiabilidade proposta considera os aspectos randômicos existentes nas variáveis do problema através de suas

correspondentes distribuições de probabilidades e valores médios e desvios padrão. Assim, um método de simulação do tipo Monte Carlo pode ser aplicado e os valores de índices de confiabilidade e razões de probabilidade obtidas para avaliação do modelo. Nesse trabalho, em cada iteração do processo de simulação, 15.000.000 de valores randômicos para cada uma das variáveis foram gerados para obtenção de valores médios e coeficientes de correlação relativos aos resultados obtidos. Esse enorme número de dados só foi possível devido à relativa simplicidade dos modelos considerados e suas respectivas equações de falha.

No presente trabalho foram consideradas as orientações propostas pelo comitê normativo de segurança estrutural JCSS (2001). A tabela 1 mostra os principais valores considerados para avaliação dos modelos de bielas e tirantes considerados.

Tabela 1 - Variáveis aleatórias do modelo

| Variável aleatória | Distribuição | Média | Desv. Padrao | Coef. de var. |
|-------------------------------|--------------|-------------------|---------------|---------------|
| Carregamento permanente | Normal | $P_{gm}(kN)$ | $0,03 P_g$ | 0,03 |
| Carregamento acidental | Gamma | $P_{qm}(kN)$ | $1,5 P_q$ | 1,5 |
| Resist. compressão - concreto | Lognormal | $f_{cm}(kN/cm^2)$ | $0,17 f_{cm}$ | 0,17 |
| Resist. tração - Aço | Lognormal | $f_{ym}(kN/cm^2)$ | $0,05 f_{ym}$ | 0,05 |

Vale salientar que o dimensionamento dos modelos de bielas e tirantes foi feito anteriormente a análise de confiabilidade executada. Apenas após a determinação dos valores de projeto do modelo é possível aplicar uma análise de confiabilidade no modelo e avaliação do seu desempenho. Os modos de falha referentes aos dois modelos considerados são: esmagamento dos nós, esmagamento das bielas e escoamento das armaduras. Não foram verificados os modos de falha referentes aos comprimentos de ancoragem das armaduras.

Tabela 2 - Modos de falha dos modelos

| Tipo de falha | Bielas | Nós | Tirantes |
|-----------------|------------|-----------|------------|
| Modo de falha 1 | Inclinada* | | |
| Modo de falha 2 | | Superior* | |
| Modo de falha 3 | | Inferior* | |
| Modo de falha 4 | | | Escoamento |

* Esmagamento

6 FUNÇÕES DE ESTADO DOS MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

As funções de estado consideradas são definidas abaixo para a verificação do estado limite último de resistência. Assim o modelo é considerado satisfatório quando são verificadas simultaneamente as seguintes condições (sistema em série):

MODELO 1 e 2

- **Bielas:** $G_1(X_1, X_2, X_3) = R_1(X_1, X_2) - S_1(X_3)$

Onde:

$S_1(X_3)$ - Força solicitante atuante na biela comprimida;

$R_1(X_1, X_2) = F_g * A_p$ - Força resistente (Resistência efetiva X Área da biela)

- **Nós:** $G_2(X_1, X_2, X_3) = R_2(X_1, X_2) - S_2(X_3)$ e $G_3(X_1, X_2, X_3) = R_3(X_1, X_2) - S_3(X_3)$

Onde:

G_2 , equilíbrio dos nós tipo 1 e G_3 , equilíbrio dos nós tipo 2: $\sum \text{Forças} = 0$

$S_2(X_3)$, $S_3(X_3)$ - Forças solicitantes na placa (apoio ou carregamento);

$R_2(X_1, X_2) = R_3(X_1, X_2) = F_g * A_p$ - Força resistente

Muda conforme tipo de nó.

- **Tirantes:** $G_4(X_1, X_2, X_3) = R_4(X_1, X_2) - S_4(X_3)$, onde:

$S_4(X_3)$ - Força solicitante atuante na tirante tracionado;

$R_4(X_1, X_2) = F_g * A_p$ - Força resistente

Todas formulações

$$F_g = f_y(i)$$

Em cada tipo de nó e biela foram considerados parâmetros referentes ao cálculo da resistência à compressão do concreto conforme exposto na literatura existente. A formulação inicialmente apresentada por Schlaich et al (1987) e as outras relativas as normas EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) foram consideradas segundo seus valores propostos. Os valores médios obtidos em cada uma das variáveis aleatórias da análise de confiabilidade feita seguiram também as orientações propostas pelo ACI 318-02 (2002). Isso foi feito com a finalidade de avaliar o impacto das diferentes propostas de avaliação das resistências para nós e bielas no comportamento estrutural da peça relativamente a segurança e ductilidade.

7 RESULTADOS

Os modelos 1 e 2 considerados nessa análise foram inicialmente dimensionados

pelos orientações normativas presentes no ACI 318-02 (2002). Como já apresentado em Pantoja et al (2010), a área principal de armadura encontrada não atende os critérios de segurança e ductilidade solicitados pelo JCSS (2001). Esses resultados iniciais foram obtidos via método de simulação de Monte Carlo. Em seguida, um acréscimo de 50% nos valores das armaduras existentes foi feito. A área de armadura utilizada no tirante mais solicitado é de 110,00 cm². Uma vez que o valor da maior força normal atuante nos tirantes é a mesma nos dois modelos devido a topologia adotada, uma mesma área, porém com detalhamento diferente foi utilizado (Figura 2 e 3). Os valores de resistência efetiva à compressão das bielas e nós a serem computados nas respectivas funções de falha, foram considerados segundo três diferentes formulações: Schlaich et al (1987), EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002).

O modelo 1 foi primeiramente analisado, é os resultados são mostrados na Figura 1 abaixo. Todas as formulações apresentadas conseguiram cumprir o índice de confiabilidade alvo, no entanto, foram necessários diferentes valores de resistência característica do concreto para isso.

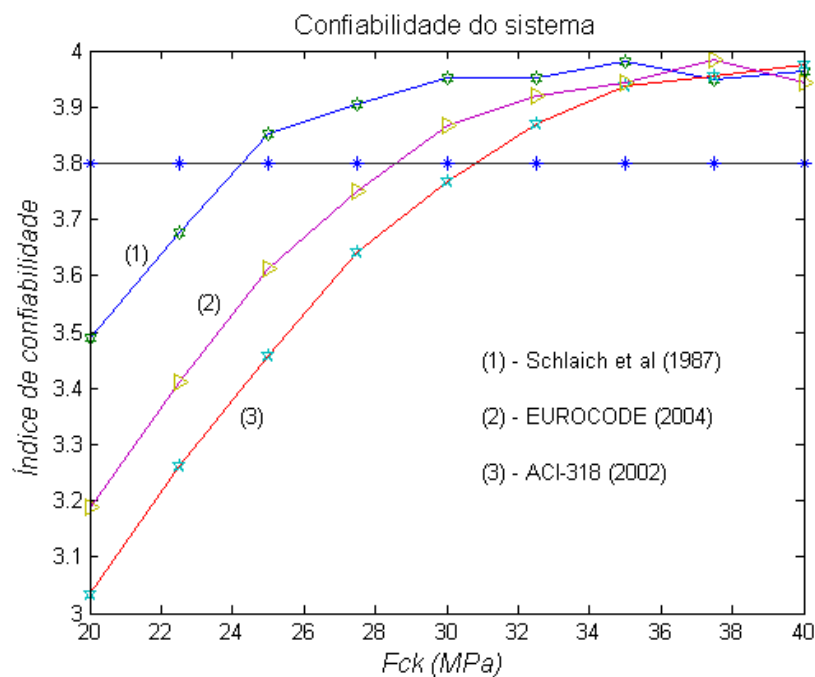


Figura 1: Índice de confiabilidade do sistema do modelo 1

A formulação proposta por Schlaich et al (1987) foi a que obteve maiores valores para o índice de confiabilidade, conseguindo cumprir o valor do índice de confiabilidade alvo para valores superiores a 25 MPa. A formulação apresentada pelo EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) necessitaram de valores superiores a 29 MPa e 31MPa para atingir os mesmos níveis de segurança.

De modo a caracterizar o comportamento dos modos de falhas do modelo 1, as relações entre a probabilidade de cada modo de falha existente e a probabilidade de

falha total do sistema foram obtidas em porcentagem. A Figura 2 apresenta os resultados obtidos para resistência efetiva à compressão considerada segundo a formulação de Schlaich et al (1987). Interessante observar que, considerando as funções de falha propostas, apenas a partir de valores superiores a 26 MPa foi possível obter porcentagem maiores para falha do tipo dúctil (escoamento da armadura) representado pelo modo de falha 4 do que para o modo de falha 3 (esmagamento da biela inclinada). Ao ponto onde há essa inversão de valores denominou-se ponto limite ou de controle de ductilidade.

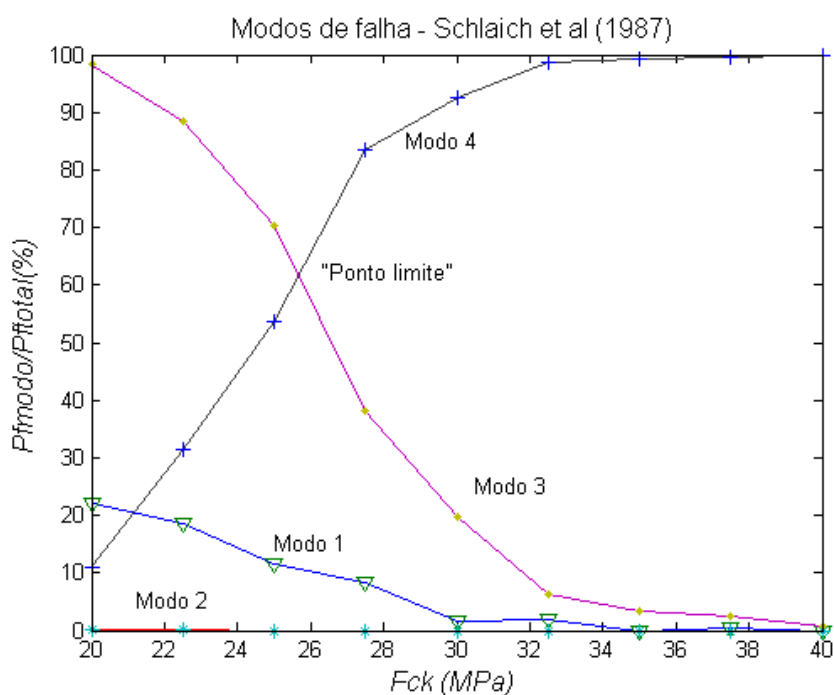


Figura 2: Modos de falha do modelo 1 segundo a formulação de Schlaich et al (1987)

Observa-se que o modo de falha 3 governa o rompimento frágil do modelo 1 uma vez que o modo de falha 1 (esmagamento do nó superior) e modo de falha 2 (esmagamento do nó inferior) têm valores bastante inferiores a esse. No caso de garantir uma ruptura dúctil para a estrutura do modelo 1, seria necessário definir valores mínimos de Fck de modo que um alto valor para modo 4 e um baixo valor para modo 3 ocorressem simultaneamente.

A formulação proposta pelo EUROCODE (2004) tem seu comportamento para os modos de falha apresentado na Figura 3. O ponto limite nesse caso foi obtido próximo a 30 MPa, o que mostra a necessidade de um aumento no valor da resistência característica do concreto Fck para atingir um comportamento semelhante ao apresentado por Schlaich et al (1987) na busca por um comportamento dúctil. Apesar de bastante semelhantes o modo de falha 1 nessa formulação obteve valores menores do que na formulação anterior.

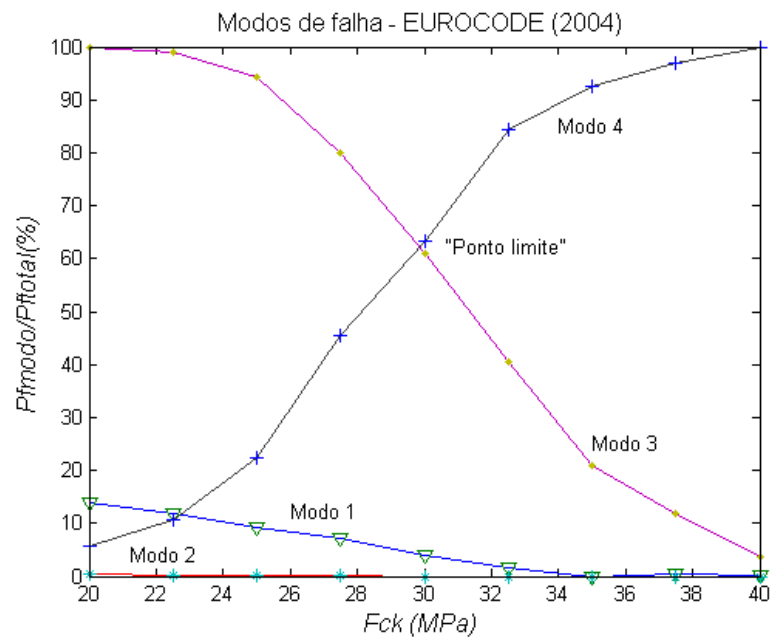


Figura 3: Modos de falha do modelo1 segundo a formulação de EUROCODE (2004)

Também a formulação apresentada pelo ACI 318-02 (2002) apresentou a necessidade de maiores valores de F_{ck} para atingir o ponto limite, com relação as formulações anteriores. Isso significa uma probabilidade maior da ocorrência de ruptura frágil na estrutura. Uma vez que a mobilização da estrutura treliçada dentro da massa de concreto se faz necessária, uma ruptura frágil poderia comprometer o funcionamento do modelo dentro da mesma, conforme apresentado em Schlaich et al (1987).

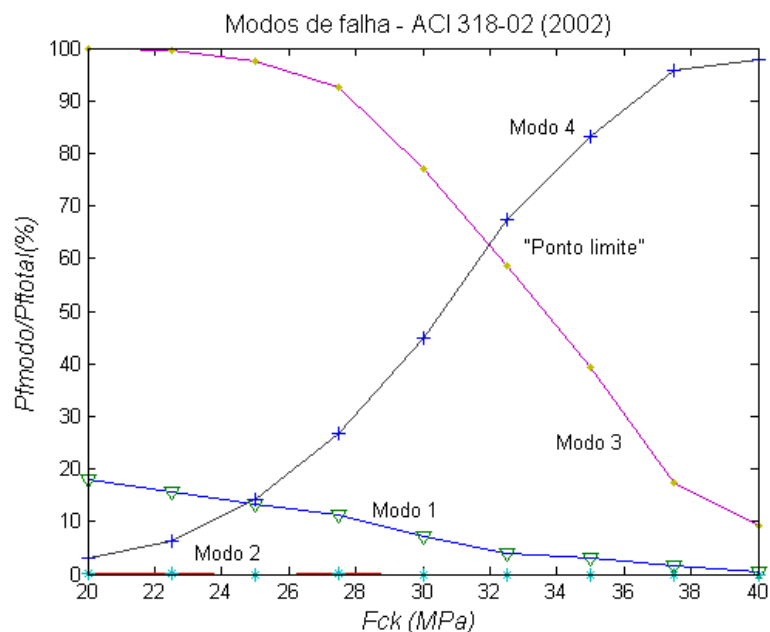


Figura 4: Modos de falha do modelo1 segundo a formulação de ACI (2002)

A delimitação entre vigas-parede e vigas esbeltas é normalmente feita de acordo com a relação l/h , sendo l o vão de cálculo e h a altura da viga. Os limites de esbeltez convencionados são baseados nesse critério conforme apresenta Araújo (2003). No entanto, a espessura de uma viga parede pode ser muitas vezes um item determinante na escolha do modelo, pois tem uma influência direta sobre o custo da estrutura (volume de material aplicado) e também devido ao seu dimensionamento com relação à segurança e tipo de ruptura considerada.

A Figura 5 abaixo mostra a variação do índice de confiabilidade do sistema do modelo 1 quando a espessura do mesmo. Nota-se um decréscimo bastante acentuado no índice de confiabilidade quando sua espessura é diminuída.

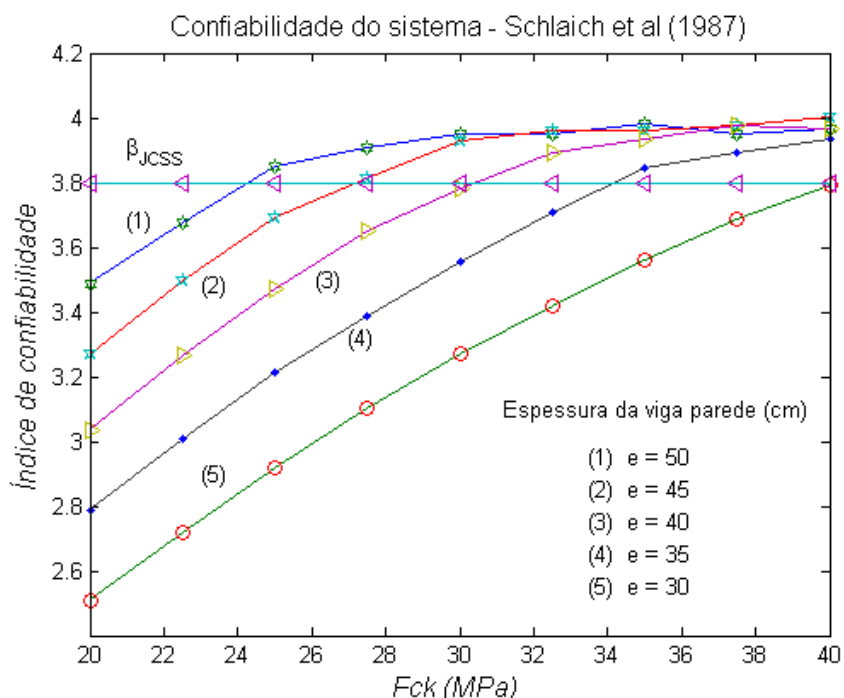


Figura 5: Confiabilidade do sistema do modelo 1 com variação da espessura

Um aumento significativo no valor da resistência característica do modelo é necessário para que o nível alvo do índice de confiabilidade seja atingido. Isso mostra como a diminuição na espessura da viga parede leva a um modelo menos seguro. Um aumento no F_{ck} então é necessário para cumprir o quesito de segurança. Um estudo mais apropriado seria considerar uma função de custo que se considera as variáveis F_{ck} e volume de material e que poderia ser otimizada levando a uma relação de F_{ck} e espessura ótima para um determinado modelo.

Com relação à ductilidade do modelo 1, a Figura 6 mostra seu comportamento quando há uma variação na espessura. Observa-se que à medida que a espessura da viga parede diminui o ponto limite, que mede a ductilidade do modelo, sofre um

deslocamento horizontal conduzindo a um modelo com comportamento mais frágil. Quando a espessura atinge 30 cm, o ponto limite não pode ser obtido mesmo com valores de F_{ck} iguais a 40 MPa. Nessa figura, apenas os modos mais críticos, ou seja, o modo 3 (esmagamento da biela inclinada) e modo 4 (escoamento do aço) foram apresentados para melhor clareza do comportamento.

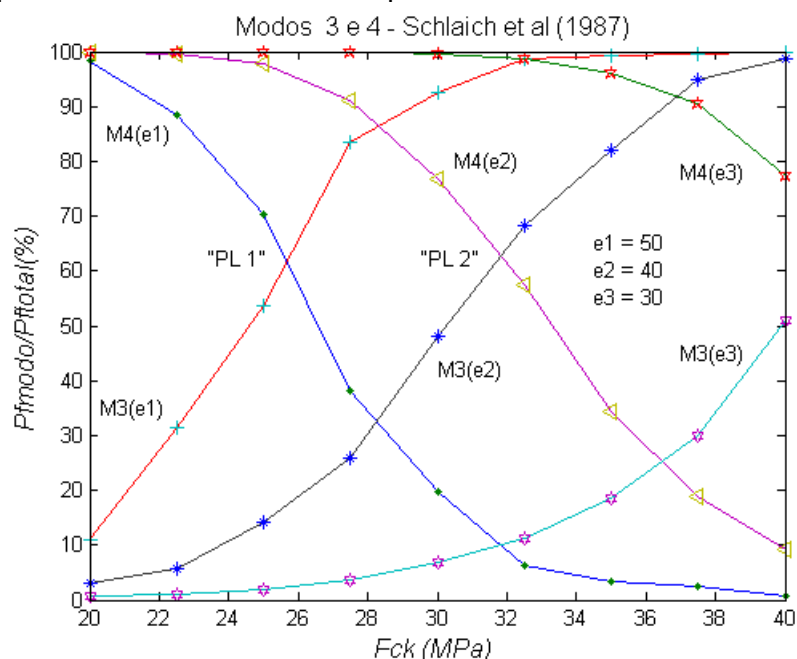


Figura 6: Ductilidade do modelo 1 com a variação da espessura

Também a relação de probabilidade do modo 1 (esmagamento do nó superior) teve seus valores aumentados com diminuição da espessura da viga parede conforme mostra a Figura 7.

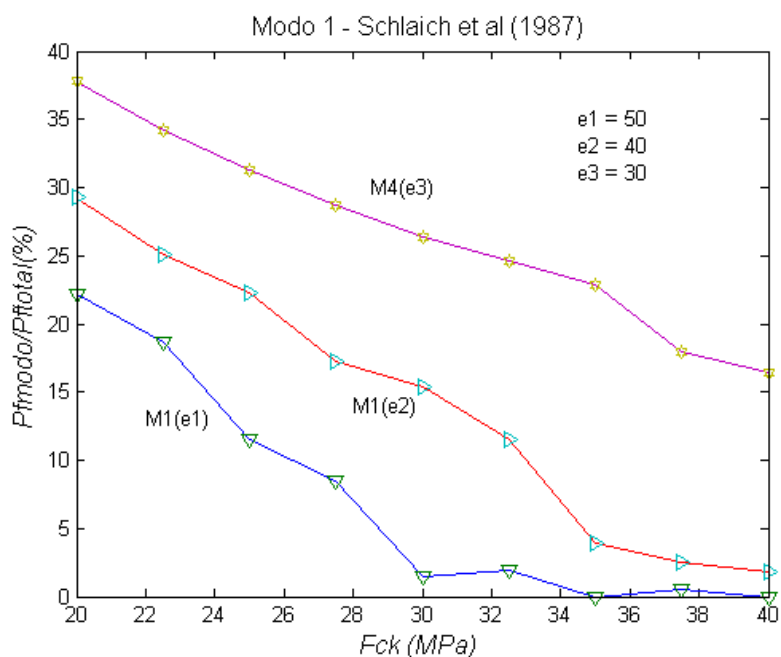


Figura 7: Ductilidade do modelo 1 com a variação da espessura para modo 1

A seguir o modelo 2, obtido via otimização topológica, é analisado e seu desempenho comparado com o do modelo 1. Sua diferença de topologia conduziu a menores valores nos esforços de compressão das bielas e valores semelhantes em partes dos tirantes. Mesmo assim, devido a geometria dos nós, bielas e tirantes os esforços tiveram valores não muito discrepantes dos valores máximos. A Figura 8 mostra como o modelo 1 e 2 obtiveram desempenhos semelhantes com relação a obtenção dos índices de confiabilidade devido a variação do F_{ck} . Isso em parte pode ser atribuído a dois fatores. Primeiro que os modos de falha dominantes continuaram os mesmos ou seja os modos de esmagamento da biela inclinada e escoamento do aço conduziram o comportamento principal da peça. O segundo motivo se refere a pouca diferença existente entre os esforços nas barras de bielas e tirantes. Isso conduziu a valores de índices de confiabilidade semelhantes em ambos os modelos. Mesmo assim, o modelo 2 conduziu a valores de índice de confiabilidade ligeiramente superiores o que parece estar coerente uma vez que os esforços na barras do modelo 2 são ligeiramente inferiores. Os dois modelos atingiram o índice de confiabilidade de referência praticamente no mesmo ponto.

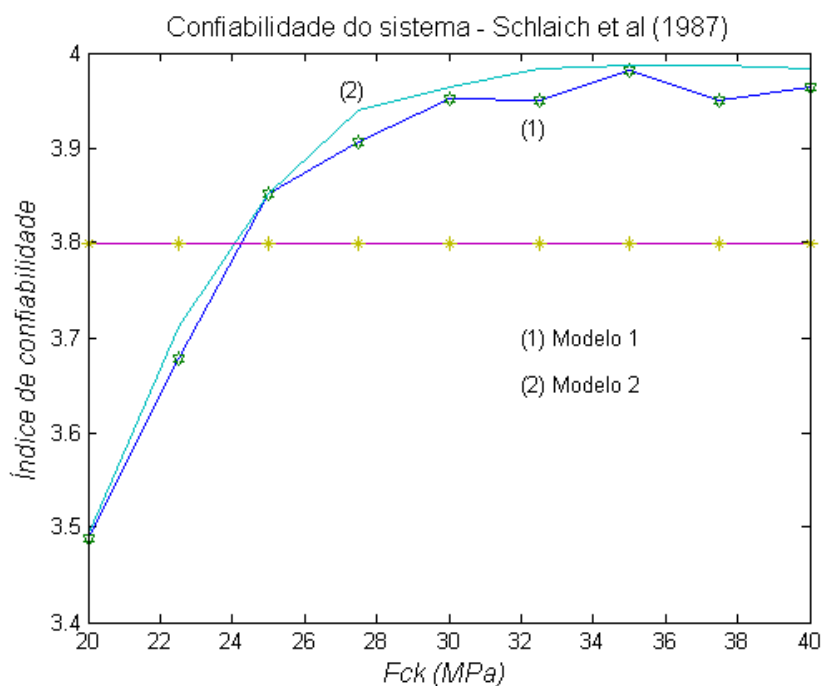


Figura 8: Comparação entre os índices de confiabilidade do sistema do modelo 1 e 2.

Assim fica claro que os modelos 1 e 2 obtiveram desempenho bastante semelhantes com relação a obtenção do índice de confiabilidade e relação de probabilidade referente aos modos de falha.

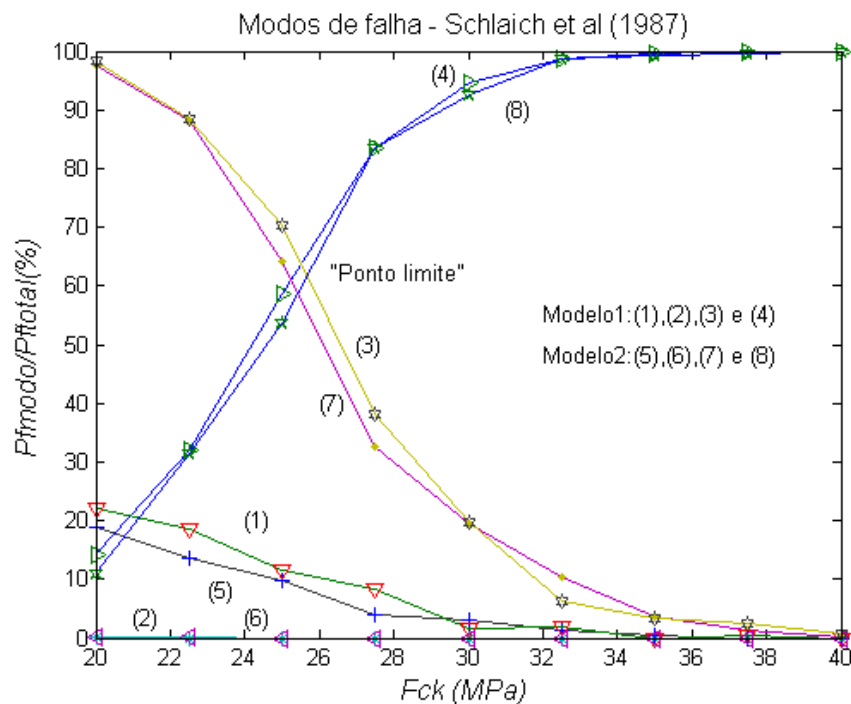


Figura 9: Comparação da ductilidade do modelo 1 e 2 com a variação da espessura

Vale salientar que apesar dos modelos possuírem um número de modos de falha diferentes em cada modelo, os modos de falha governantes do problema foram os mesmos, o que provavelmente conduziu a comportamentos semelhantes no seu desempenho.

8 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou um critério de confiabilidade para análise do desempenho de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. O método de simulação de Monte Carlo foi adotado para cálculo dos valores de índice de confiabilidade e relações de probabilidade para os diversos modos de falha existentes. Dois modelos foram testados, sendo seu desempenho com relação à segurança e confiabilidade dos modelos obtida. Os resultados apresentados revelaram um comportamento bastante semelhante para os dois modelos. Isso provavelmente se deve ao fato dos modos de falha que governam o problema ser os mesmos nos dois modelos.

No modelo 1 três formulações diferentes para cálculo da tensão resistente efetivas nos nós e bielas foram testadas. A formulação original proposta por Schlaich et al (1987) levou a valores mais seguros e mais dúcteis para o sistema do modelo considerado. As formulações do EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) necessitaram de valores maiores de F_{ck} para obtenção de índices de confiabilidade e ponto limites

semelhantes à formulação de Schlaich et al (1987). O EUROCODE (2004) levou a valores mais seguros que os do ACI 318-02 (2002).

Uma análise com relação a influência da espessura da viga parede na segurança e ductilidade da estrutura foi apresentada. Segundo os resultados obtidos valores baixos de espessura podem levar a ruptura frágil, mesmo para valores de F_{ck} altos.

A obtenção de uma topologia para montagem do modelo de bielas e tirantes também foi feita através do algoritmo de otimização topológica do modelo SIMP. Assim foi possível confirmar a validade da utilização desse tipo formulação na obtenção de modelos estaticamente admissíveis na prática de projeto.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 318-02 – Building Code Requirements for Structural Concrete*, 2002.
- Ali, M. *Automatic generation of truss models for the optimal design of reinforced concrete structures*. Dissertation. Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1997.
- Araújo, J.M.. *Curso de Concreto Armado Vol. 1, 2, 3 e 4*. Editora Dunas, Rio Grande do Sul, 2003.
- Bendsøe, M. P. & Kikuchi, N., *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2):197-224, 1988.
- Bendsøe, M. P. & Sigmund, O., *Material interpolation schemes in topology optimization*, *Archives of Applied Mechanics* 69(9-10): 635-654, 1999.
- Bendsøe, M. P. e Sigmund, O., *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003
- Bruggi, M. *Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization*. *Computers and Structures*, 87:1483-1495, 2009.
- EUROCODE 2. *European Standard – First Draft*, 2004.
- JCSS – *Probabilistic model code*. The Joint Commite on Structural Safety. *The Probabilistic Model Code*, 2001.
- Liang, Q. Q., *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*. Spon Press - Taylor & Francis Group, 2005.
- Pantoja, J. C.; Vaz, L. E.; Martha, L. F. *Modelo de Bielas e Tirantes Gerados por Otimização Topológica e Elementos Indutores*. Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais – XXX CILAMCE. Búzios. Rio de Janeiro/RJ, 2009.
- Pantoja, J. C.; Vaz, L. E.; Martha, L. F. *Reliability analysis of concrete structures applied to strut-and-tie model*. SEMC – *The Fourth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, Cape Town – South Africa, 2010
- Rozvany, G. I. N. & Zhou, M., *The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:281-308, 1991.
- Santos, S. H. C. – *Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado*. Apostila do curso da UFRJ, 2010.

- Schäfer, K. e Schlaich, J. *Consistent Design of Structural Concrete using Strut and Tie Models*. In: *Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas*, PUC Rio., Rio de Janeiro/RJ, 1988
- Schlaich, J.; Schäfer, K.; Jennewein, M. *Towards a Consistent Design of Structural Concrete*. *PCI Journal*, v.32, n.3, p.74-150. May-June, 1987.
- Silva, R. C. e Giongo, J. S. *Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP, 2000.
- Souza, R. A. *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP, 2004.