

UM MODELO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DA FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

José M. Feitosa Lima, Koji de Jesus Nagahama, Paulo R. Lopes Lima e Geraldo J. Belmonte dos Santos

Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Bahia, Brasil, ppgecea@uefs.br, <http://ppgecea.uefs.br>

Palavras Chave: Viga de Concreto Armado; Teoria de Dano de Mazars; Teoria Clássica de Laminação; Método dos Elementos Finitos.

Resumo. A previsão do comportamento de vigas de concreto armado sob flexão é fundamental para o perfeito dimensionamento destes elementos. Usualmente os modelos utilizados não incorporam a contribuição do concreto tracionado e a não linearidade física do concreto sob tração e compressão, o que pode subestimar as deformações no elemento estrutural sob cargas de curta e longa duração. No presente trabalho é apresentada uma formulação variacional com base no método dos elementos finitos para a previsão do comportamento à flexão de vigas de concreto armado. O modelo proposto combina a teoria clássica de laminação com um modelo de dano (Mazars) aplicado ao concreto. O reforço foi considerado como uma lâmina de um material elasto-plástico perfeito. A comparação dos resultados numéricos com resultados encontrados na literatura para vigas de concreto armado, em termos de carga-deslocamento, demonstra uma boa aproximação do modelo com resultados experimentais.

1 INTRODUÇÃO

O avanço no desenvolvimento de novos tipos de concreto, como concreto de alto desempenho, concreto com fibras e concreto reciclado, tem exigido a utilização de métodos de análise mais sofisticados que possam avaliar o efeito de diferentes modelos de comportamento do material sobre a resposta de elementos ou sistemas estruturais submetidos a carregamentos diversos.

A análise numérica não linear de estruturas de concreto armado tem sido implementada com o objetivo de prever tanto a redução de rigidez com o incremento das deformações, quanto o mecanismo e processo de ruptura (Wang e Hsu, 2001). Uma das principais modificações acontece nas equações constitutivas do concreto, com a incorporação de modelos tensão-deformação não lineares na tração e/ou na compressão (Assan, 2002; Tao e Phillips, 2005). A utilização das teorias baseadas na mecânica do dano contínuo na definição das leis constitutivas do concreto, como o modelo isotrópico não linear de dano de Mazars (Mazars e Lemaitre, 1984), permite a representação contínua do modelo estrutural, mesmo após a fissuração do concreto, e tem gerado bons resultados na modelagem de estruturas de concreto armado (Álvares, 1993; Sanches Junior e Venturini, 2007). Este modelo apresenta simplicidade de aplicação, com a utilização de apenas uma variável interna, cuja lei de evolução é facilmente obtida através dos ensaios de tração e compressão do material.

Para o presente trabalho, vigas de concreto armado foram modeladas numericamente utilizando o modelo de Mazars, na definição do comportamento do concreto na tração e na compressão, em conjunto com a Teoria Clássica de Laminação, com o objetivo de verificar a compatibilidade do uso simultâneo dessas teorias a partir do confronto com resultados numéricos e experimentais da literatura. Para tanto, foi desenvolvida uma formulação variacional segundo o Princípio dos Trabalhos Virtuais, envolvendo tais teorias, a qual foi implementada segundo o método dos elementos finitos, em linguagem Fortran.

2 COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DOS MATERIAIS

2.1 Concreto

Segundo o modelo de Mazars (Mazars e Lemaitre, 1984) o dano no concreto inicia quando a deformação normal ε_{xx} atinge o limite elástico de tração desse material ε_{d0} . A partir desse instante a tensão normal σ_x passa a se relacionar com a deformação linear específica ε_{xx} através da seguinte expressão:

$$\sigma_x = (1 - D)E_c \varepsilon_{xx} \quad (1)$$

sendo E_c o módulo de elasticidade do concreto e D , $0 < D \leq 1$, a variável de dano escalar, devendo ser observado que enquanto não há dano ($D = 0$) essa expressão representa o trecho linear do diagrama tensão-deformação do concreto.

O modelo de Mazars preconiza que o dano deve ser avaliado através de uma combinação de efeitos de tração (T) e compressão (C), tal como expresso a seguir:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (2)$$

cabendo observar que, conforme Álvares (1993), para pontos submetidos à:

- tração uniaxial, $\alpha_T = 1$ e $\alpha_C = 0$, resultando em $D = D_T$;
- compressão uniaxial, $\alpha_T = 0$ e $\alpha_C = 1$, donde $D = D_C$.

As parcelas do dano associadas à tração D_T e à compressão D_C são dadas, respectivamente, por:

$$D_T(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.a)$$

$$D_C(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.b)$$

onde A_T, B_T, A_C e B_C são parâmetros experimentais obtidos do diagrama tensão-deformação do material (concreto) e ε_{eq} é a deformação equivalente, como denominada por Mazars, sendo assim expressa:

$$\varepsilon_{eq} = \begin{cases} \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{xx} \geq 0 \\ -\nu \varepsilon_{xx} \sqrt{2}, & \varepsilon_{xx} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

observando-se que ν é o coeficiente de Poisson do concreto e que a deformação ε_{eq} é, portanto, sempre positiva.

2.2 Aço

Para as camadas de aço será admitido o comportamento elasto-plástico perfeito, conforme esquematizado na Figura 1, sintetizado na seguinte expressão:

$$\sigma_x = \begin{cases} E_s \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{xx} \leq \varepsilon_y \\ \sigma_y, & \varepsilon_{xx} \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (5)$$

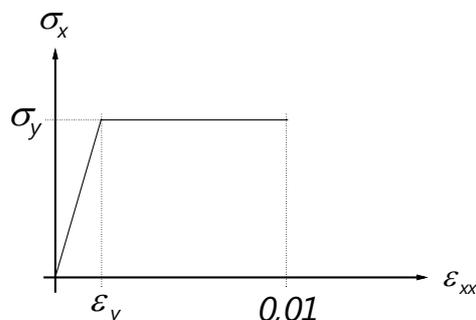


Figura 1: Diagrama tensão-deformação do aço

3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA O PROBLEMA

As vigas em estudo são consideradas prismáticas, de seção retangular. Além disso foram adotadas as seguintes hipóteses:

- durante à flexão as seções transversais permanecem planas e inextensíveis (hipótese de Euler-Bernoulli);
- as deformações e rotações são consideradas pequenas perante à unidade, localizando o problema no domínio linear geométrico;
- cada camada, ou lâmina, da viga é constituída de apenas um tipo de material, sendo as camadas homogêneas (não compósitas);
- há aderência perfeita entre as camadas na zona de contato;
- as cargas e os vínculos são aplicados diretamente no eixo x da viga.

Com base nas hipóteses (a), (b) e (d) tem-se o seguinte campo de deslocamentos:

$$u(x) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (6.a)$$

$$v(x) = 0 \quad (6.b)$$

$$w(x) = w_0(x) \quad (6.c)$$

sendo $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ as componentes do deslocamento de um ponto genérico da viga segundo as direções x , y e z , respectivamente, e com $u_0(x)$ e $w_0(x)$ representando os deslocamentos segundo os eixos x e z , nessa ordem, do ponto associado ao primeiro e localizado sobre o eixo da viga, conforme Figura 2. Como se observa nas expressões (6) a descrição do problema é unidimensional (função apenas de x).

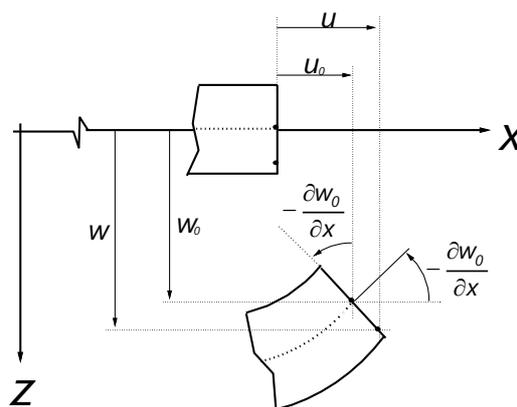


Figura 2: Componentes de deslocamento e geometria de deformação

As relações deformação-deslocamento para o problema, lineares de acordo com a hipótese (b), com a substituição das expressões do campo de deslocamentos (6), assumem a seguinte forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (7.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.c)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.d)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.e)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (7.f)$$

notando-se que apenas a componente ε_{xx} resulta não nula, como ocorre na teoria clássica de vigas.

Na presente formulação são requeridas as seguintes integrais de tensões, ou esforços solicitantes, na seção transversal genérica de área A :

$$N = \int_A \sigma_x dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (8.a)$$

$$M = \int_A \sigma_x z dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (8.b)$$

sendo N o esforço normal, M o momento fletor, b a largura da seção e h a sua altura. O esforço normal de tração, e o momento fletor que acarreta tração nas fibras inferiores da seção ($z = h/2$), são tomados como positivos.

Segundo a teoria de laminados a avaliação desses esforços é feita somando-se a contribuição oriunda de cada lâmina, processo no qual se considera os diferentes materiais (Jones, 1999; Daniel e Ishai, 2006). Portanto, substituindo nas expressões (8) as relações constitutivas (1) e (5), do concreto e do aço respectivamente, e a equação (7.a), da deformação longitudinal ε_{xx} , tem-se que:

$$N = b \frac{\partial u_0}{\partial x} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) - \frac{b}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (9.a)$$

$$M = \frac{b}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) - \frac{b}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (9.b)$$

com NC representando o número de lâminas que formam a seção e $Q_{11}^{(k)}$ a constante mecânica da camada k , que liga a deformação ε_{xx} com a tensão normal σ_x , de acordo com as relações constitutivas (1) e (5). Deve ser observado que cada lâmina k é delimitada pelas coordenadas z_k e z_{k+1} , conforme Figura 3.

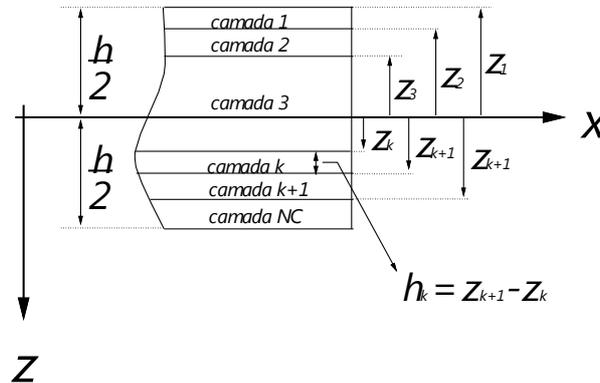


Figura 3: Laminação da viga

O desenvolvimento dos somatórios em (9) conduz a expressões mais compactas para esses esforços, quais sejam:

$$N = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (10.a)$$

$$M = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (10.b)$$

onde

$$A_{11} = b \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad (11.a)$$

$$B_{11} = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (11.b)$$

$$D_{11} = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (11.c)$$

As grandezas A_{11} , B_{11} e D_{11} representam, respectivamente, o termo $[1,1]$ das matrizes de rigidezes extensional $[A]$, flexional $[B]$ e de acoplamento $[D]$, como são denominadas na teoria de laminação (Jones, 1999). Cabe observar, no entanto, que na formulação aqui proposta essas constantes incorporam tanto o dano ocorrido nas camadas de concreto quanto o escoamento das barras de aço, uma vez que foram deduzidas incorporando as relações constitutivas (1) e (2) desses materiais componentes da viga. Este fato pode ser considerado como uma extensão da teoria de laminação à problemas envolvendo materiais sujeitos a dano e plasticidade, já que normalmente tal teoria é desenvolvida apenas para laminados formados por materiais ortotrópicos ou isotrópicos (Reddy, 2004).

O trabalho virtual realizado pelas forças internas δW_{int} para o problema é dado

por:

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_{xx} dV \quad (12)$$

onde $\delta \varepsilon_{xx}$ é a variação da componente de deformação ε_{xx} e V o volume da viga.

Desmembrando essa integral no volume em termos da área A da seção e do comprimento L da viga, levando-se em conta a expressão (7.a) de ε_{xx} , tem-se que:

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \int_A \sigma_x dA - \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \int_A \sigma_x z dA \right] dx \quad (13)$$

Reconhecendo nessa expressão os esforços N e M definidos em (8):

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left[N \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - M \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] dx \quad (14)$$

Finalmente, substituindo as expressões (10) desses esforços em (14) resulta, para δW_{int} :

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \left(B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] dx \quad (15)$$

Cabe ressaltar que essa expressão de δW_{int} , dada em função dos deslocamentos u_0 e w_0 , será considerada na formulação numérica por elementos finitos.

O trabalho virtual realizado pelas forças externas, com base na hipótese (e) e na Figura 4, é dado por:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L [p(x) \delta u_0 + q(x) \delta w_0] dx + \left[\bar{F}_x \delta u_0 + \bar{F}_z \delta w_0 - \bar{M} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right]_0^L \quad (16)$$

com $p(x)$ e $q(x)$ representando as cargas distribuídas de domínio, segundo as direções x e z , respectivamente, e nas extremidades $x=0$ e $x=L$ da viga, estão aplicadas as forças segundo as direções x e z , \bar{F}_x e \bar{F}_z respectivamente, e o momento \bar{M} (as cargas foram desenhadas com o sentido positivo na Figura 4).

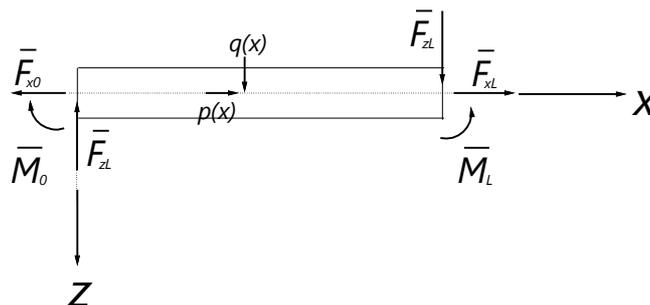


Figura 4: Carregamento considerado na viga

Tal como mencionado para (15), a expressão (16) de δW_{ext} também será utilizada na formulação por elementos finitos.

Aplicando-se então o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), ou seja:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (17)$$

pode-se instituir as equações diferenciais do problema, compatibilizando-se previamente as variações dos deslocamentos nas parcelas do domínio em (15) e (16), através de integrações por partes, daí resultando o sistema de equações associados ao modelo:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = -p(x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -p(x) \quad (18.a)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = q(x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q(x) \quad (18.b)$$

Ainda como fruto da aplicação do PTV em (17) extraem-se as seguintes condições de contorno, em $x = 0$ e $x = L$, adequadas ao modelo de viga aqui formulado:

$$u_0 = \bar{u}_0 \quad \text{e} \quad \delta u_0 = \delta \bar{u}_0 \quad \text{ou} \quad N = \bar{F}_x \quad (19.a)$$

$$w_0 = \bar{w}_0 \quad \text{e} \quad \delta w_0 = \delta \bar{w}_0 \quad \text{ou} \quad Q = \bar{F}_z \quad (19.b)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \quad \text{e} \quad \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = \delta \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right) \quad \text{ou} \quad M = \bar{M} \quad (19.c)$$

sendo Q o esforço cortante na seção, cuja expressão pode ser obtida a partir do equilíbrio de um elemento diferencial da viga, ou seja:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (20)$$

Como era de se esperar a formulação variacional segundo o PTV gerou todas as condições de contorno do problema, tanto as cinemáticas quanto as naturais. Todavia, para fins de implementação pelo método dos elementos finitos, serão utilizadas apenas as condições cinemáticas, por serem as apropriadas a esse método computacional.

4 TRATAMENTO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para o tratamento segundo o método dos elementos finitos (MEF), da formulação desenvolvida no item anterior, foi escolhido o elemento clássico de viga, o qual é delimitado por dois nós em suas extremidades, havendo três graus de liberdade em

cada um desses nós, quais sejam: u_0 , w_0 e $\frac{\partial w_0}{\partial x}$. E nesse contexto, como apresentado em Cook et al. (2002), as funções de interpolação, usadas para representar esses deslocamentos ao longo do elemento finito de comprimento L_{el} , são: polinomial cúbica para expressar $w_0 = w_0(x)$ e linear para $u_0 = u_0(x)$, com a rotação $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ sendo obtida por derivação de $w_0(x)$.

De modo sucinto a aplicação do MEF gera um sistema de equações nodais de equilíbrio do tipo

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (21)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura, função tanto da geometria da viga quanto das propriedades mecânicas dos materiais que a constituem, $\{F\}$ é o vetor de cargas, contendo as ações nodais do carregamento atuante na estrutura, e $\{D\}$ é o vetor de deslocamentos nodais, obtido através da resolução do sistema de equações (21).

A matriz de rigidez da estrutura $[K]$ é usualmente calculada através do somatório de contribuições associadas à matriz de rigidez $[k_{el}]$, dos NE elementos finitos definidos na discretização da viga:

$$[K] = \sum_1^{NE} [k_{el}] \quad (22)$$

sendo

$$[k_{el}] = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{L_{el}} & 0 & -\frac{B_{11}}{L_{el}} & -\frac{A_{11}}{L_{el}} & 0 & \frac{B_{11}}{L_{el}} \\ 0 & \frac{12D_{11}}{L_{el}^3} & \frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & 0 & -\frac{12D_{11}}{L_{el}^3} & \frac{6D_{11}}{L_{el}^2} \\ -\frac{B_{11}}{L_{el}} & \frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & \frac{4D_{11}}{L_{el}} & \frac{B_{11}}{L_{el}} & -\frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & \frac{2D_{11}}{L_{el}} \\ -\frac{A_{11}}{L_{el}} & 0 & \frac{B_{11}}{L_{el}} & \frac{A_{11}}{L_{el}} & 0 & -\frac{B_{11}}{L_{el}} \\ 0 & -\frac{12D_{11}}{L_{el}^3} & -\frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & 0 & \frac{12D_{11}}{L_{el}^3} & -\frac{6D_{11}}{L_{el}^2} \\ \frac{B_{11}}{L_{el}} & \frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & \frac{2D_{11}}{L_{el}} & -\frac{B_{11}}{L_{el}} & -\frac{6D_{11}}{L_{el}^2} & \frac{4D_{11}}{L_{el}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Cabe observar que essa matriz de rigidez do elemento foi deduzida com base na Eq.(15) de δW_{int} e nas funções de interpolação para os deslocamentos. Além disso, deve ser destacado que essa matriz tende a ser distinta de elemento para elemento, mesmo adotando-se o mesmo comprimento L_{el} para todos, pois com o início do

processo de fissuração do concreto o dano D vai assumindo diferentes valores ao longo da extensão da viga, de acordo com o comportamento da deformação equivalente ε_{eq} , já que esta é função de ε_{xx} (ver Eqs. (3) e (4)).

De acordo com esse tratamento pelo MEF as condições de contorno previstas nas extremidades da viga são as do tipo cinemáticas sendo, portanto, aplicadas sobre os deslocamentos nodais u_0 , w_0 e $\frac{\partial w_0}{\partial x}$, de acordo com as vinculações observadas nas extremidades da viga em estudo.

4.1 Análise não linear

O processo de obtenção da solução foi realizado através da aplicação incremental das cargas externas, seguido do cálculo da solução inicial ou predita e de um processo iterativo para se buscar a solução de equilíbrio para cada nível de carga.

No presente trabalho usa-se o processo iterativo de Newton-Raphson.

O procedimento segue os seguintes passos:

1. No início de cada passo, deve-se efetuar o cálculo da matriz de rigidez em relação à última configuração de equilíbrio, usando os deslocamentos, as deformações, as tensões e as variáveis de dano atualizadas;
2. Calcular o incremento de carga $\{\Delta F\}$;
3. Resolver o sistema de equação $[K]\{\Delta D\} = \{\Delta F\}$;
4. Atualizar deslocamentos ($\{\Delta D\} + \{D\}$) e atualizar a variável de dano. Em seguida deve-se calcular a força interna e a força desbalanceadora (força externa menos força interna);
5. Verificar a convergência e em caso de não convergir deve-se atualizar a rigidez da estrutura e em seguida calcular a força desbalanceadora, repetindo esse processo até a solução convergir para esse nível de carga.
7. Após a convergência deve-se atualizar os deslocamentos e as tensões, calcular o novo incremento de carga e montar a matriz de rigidez, seguindo os passos listados acima.

5 ANÁLISE DE CASOS

Em seu estudo, Álvares (1993) utilizou o modelo de Mazar em conjunto com uma formulação de elementos finitos. Para validá-lo ensaiou três vigas de concreto armado, sob flexão de quatro pontos, obtendo resultados carga versus deslocamento. As três vigas ensaiadas possuíam as mesmas características geométricas e físicas, tendo comprimento de 2400mm, com duas cargas concentradas aplicadas a 800 mm das extremidades, sendo que a medição de deslocamentos foi realizada através de relógio comparador, nos apoios e no centro, conforme esquematizado na Figura 5.

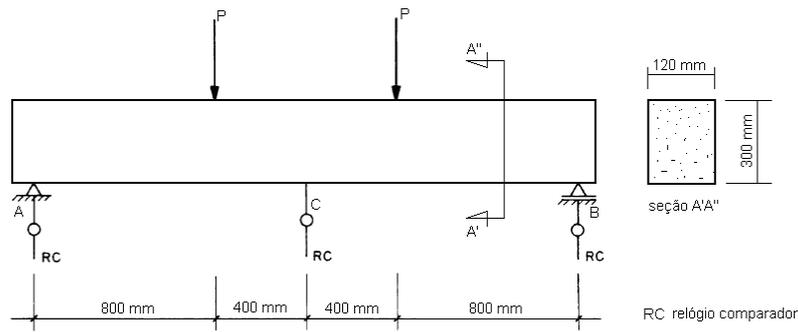


Figura 5: Esquema estrutural das vigas ensaiadas por Álvares (1993)

Foram avaliados três tipos de armadura (reforço) conforme mostrado na Figura 6, sendo a primeira pouco armada usando, na parte tracionada, 3 barras de 10 mm de diâmetro, a segunda normalmente armada, com 5 barras de 10 mm, e a terceira super armada, utilizando 7 barras de 10 mm.

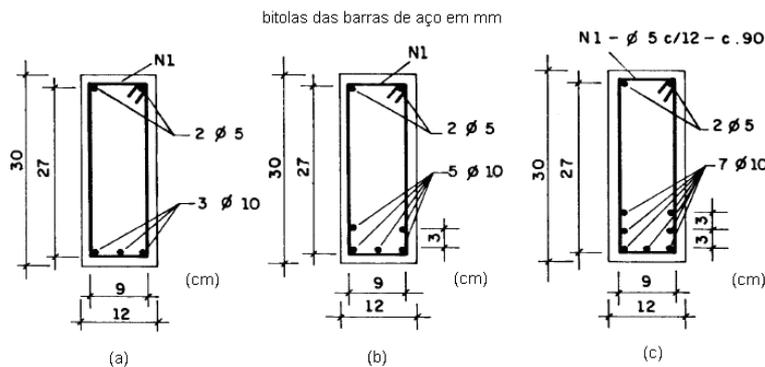


Figura 6: Seção transversal das três vigas ensaiadas por Álvares (1993): (a) Seção pouco armada; (b) Seção normalmente armada; (c) Seção super armada.

Os parâmetros experimentais utilizados por Álvares (1993) para a modelagem numérica das vigas são apresentados na Tabela 1. Além destes parâmetros foi utilizado no presente trabalho um valor de tensão de escoamento (f_y) do aço igual a 500 MPa.

Material	Parâmetros
Concreto	$E_c = 29200 \text{ MPa}$
	$\nu = 0,2$
	$A_t = 0,995$
	$B_t = 8000$
	$A_c = 0,85$
	$B_c = 1620$
	$\varepsilon_{d0} = 0,00007$
Aço	$E_s = 196000 \text{ MPa}$

Tabela 1: Parâmetros associados aos materiais constituintes das vigas estudadas por Álvares (1993).

Com relação à discretização adotada foram tomados 12 elementos de viga. Quanto à discretização da seção, as vigas foram discretizadas com quantidades diferentes de camadas, e de espessuras variáveis, para considerar as diferentes taxas de armadura mostradas na Figura 6. As Tabelas 2 a 4 mostram esta discretização.

Camada	Material	Espessura (mm)
1	concreto	14,67275
2	aço	0,32725
3 a 22	concreto	13,0
23	concreto	9,01825
24	aço	1,9635
25	concreto	14,01825

Tabela 2: Discretização da seção transversal da viga pouco armada.

Camada	Material	Espessura (mm)
1	concreto	14,67275
2	aço	0,32725
3 a 22	concreto	11,5
23	concreto	9,3455
24	aço	1,3090
25 e 26	concreto	14,181875
27	aço	1,9635
28	concreto	14,01825

Tabela 3: Discretização da seção transversal da viga normalmente armada.

Camada	Material	Espessura (mm)
1	concreto	14,67275
2	aço	0,32725
3 a 22	concreto	10,0
23	concreto	9,3455
24	aço	1,3090
25 e 26	concreto	14,3455
27	aço	1,3090
28 e 29	concreto	14,181875
30	aço	1,9635
31	concreto	14,01825

Tabela 4: Discretização da seção transversal da viga super armada.

As curvas carga-deslocamento medidas experimentalmente e as curvas calculadas por Alvares (1993), bem como as curvas calculadas pelo presente modelo são apresentadas nas Figuras 7 a 9 para os casos analisados.

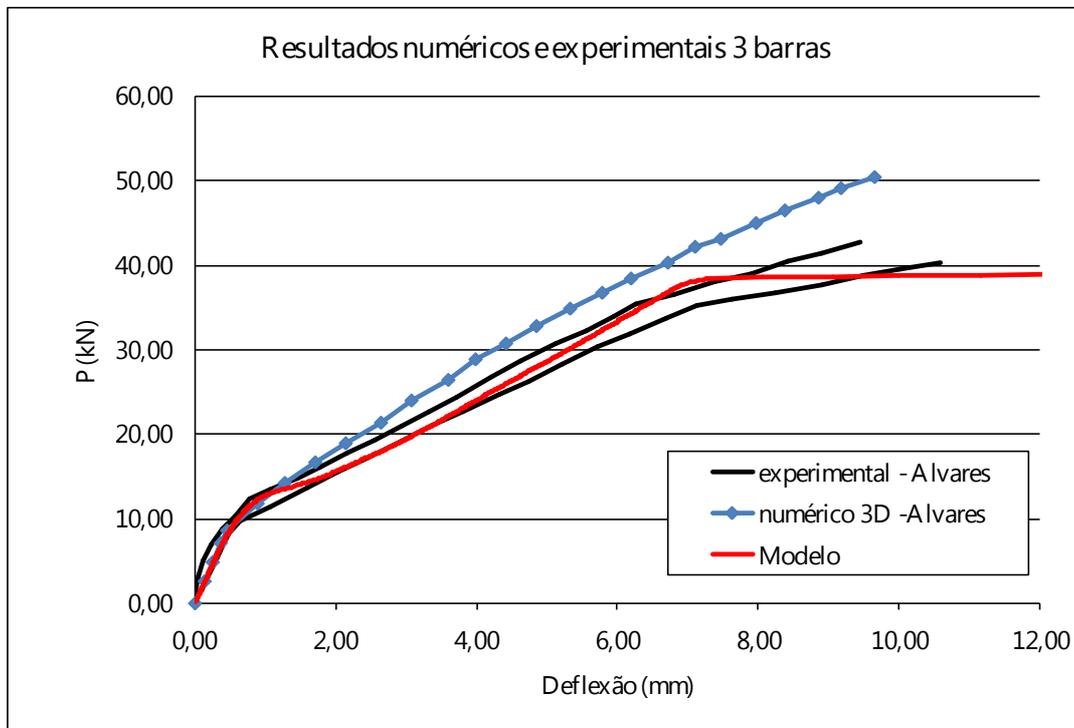


Figura 7: Resultados carga-deslocamento para a viga pouco armada

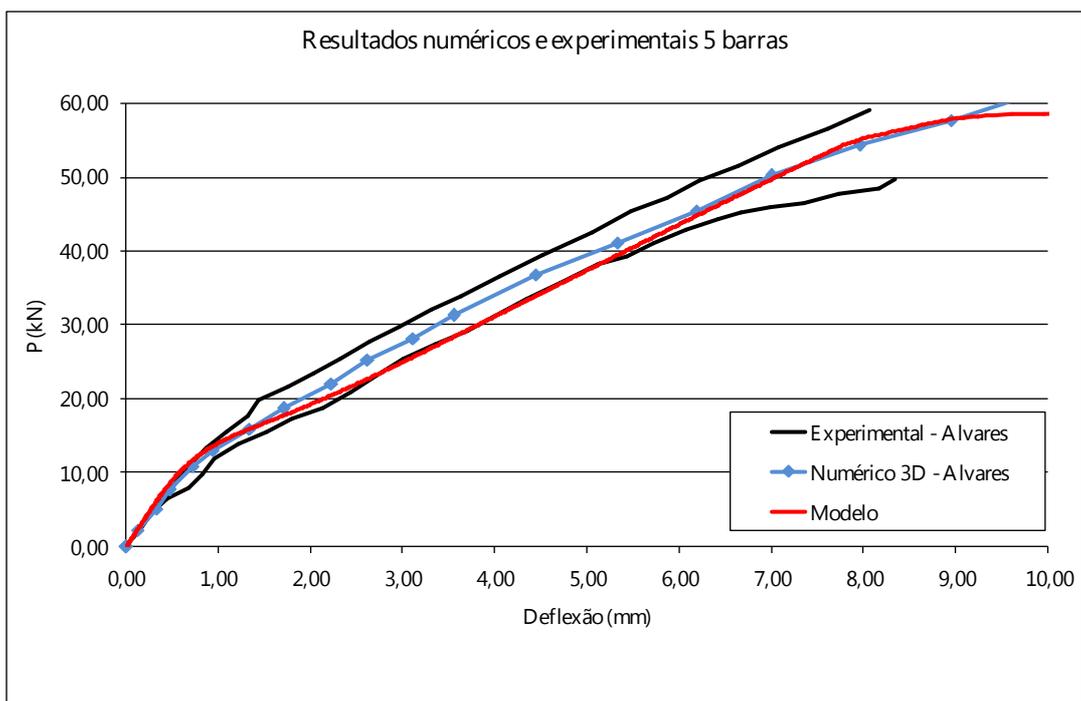


Figura 8: Resultados carga-deslocamento para a viga normalmente armada

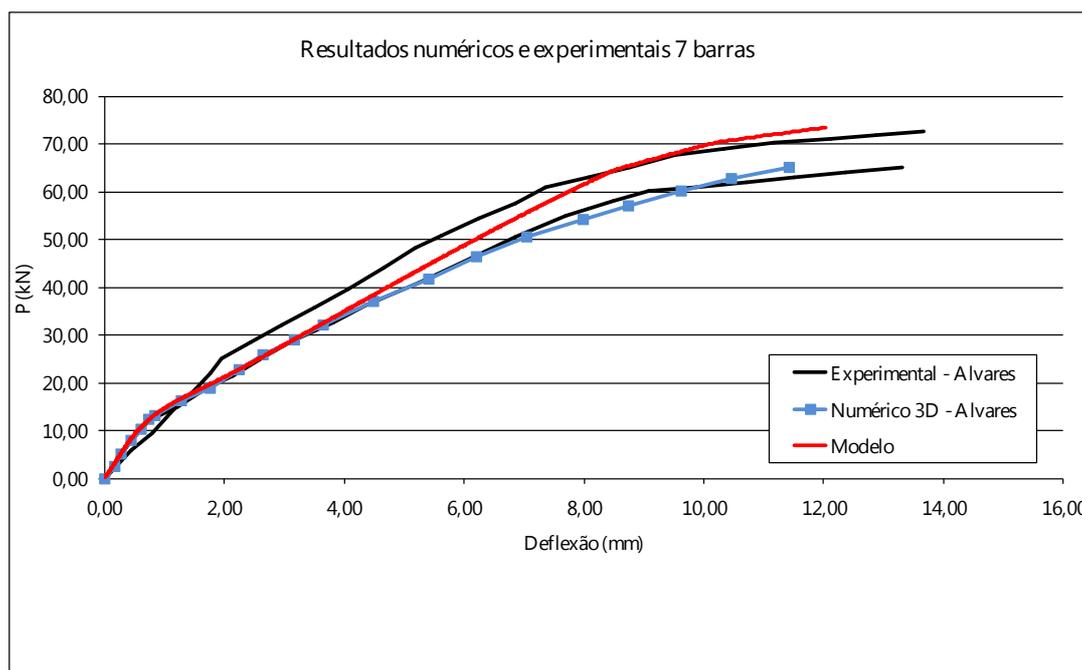


Figura 9: Resultados carga-deslocamento para a viga super armada

Verifica-se uma boa aproximação do modelo apresentado com as curvas experimentais, particularmente para o caso da viga pouco armada (ver Figura 7), onde o comportamento pós-escoamento da armadura pode ser observado. Para este caso, o modelo numérico proposto apresenta melhor aproximação do que o utilizado por Álvares (1993). Para os demais casos os modelos numéricos apresentam resultados similares.

6 CONCLUSÃO

Um modelo numérico para avaliação da deflexão de vigas de concreto armado foi proposto, e apresentou boa aproximação com resultados experimentais. Foi demonstrado, com isso, que é possível incorporar em uma formulação variacional a não linearidade do material juntamente com a Teoria Clássica dos Laminados, o que abre caminho para análise de diversos tipos de estruturas compostas.

REFERÊNCIAS

- Álvares, M.S., Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- Assan, A.E., Nonlinear analysis of reinforced concrete cylindrical shells. *Computer & Structures*, 80:2177–2184, 2002.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., and Witt, R.J., *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons. Inc, 2002.
- Daniel, I.M., and Ishai, O., *Engineering mechanics of composite materials*. Oxford

- University Press, Inc., 2006.
- Jones, R.M., *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis Group, 1999.
- Mazars, J., and Lemaitre, J., *Application of Continuous Damage Mechanics to Strain and Fracture Behavior of Concrete*, In: SHAH, S.P. editor. USA: Northwestern University, 1984.
- Reddy, J.N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press, 2004.
- Sanches Junior, F., and Venturini, W.S., Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, 38:538–456, 2007.
- Tao, X., and Phillips, D.V., A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states. *Cement & Concrete Composites*, 27:716–726, 2005.
- Wang, T., and Hsu, T.T.C., Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models. *Computer & Structures*, 79:2781–2791, 2001.