

UM MODELO PARA PROPAGAÇÃO DE FISSURAS NO CONCRETO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO

Kelson Pothin Wolff, Roque Luiz Pitangueira e Samuel Silva Penna

*Laboratório de Software Livre: INSANE-Lab, Departamento de Engenharia de Estruturas,
Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901, Pampulha, Belo
Horizonte, MG, Brasil, kelson.wolff@gmail.com, roque@dees.ufmg.br, spenna@dees.ufmg.br*

Palavras Chave: Fissuras Coesivas, Concreto, XFEM, INSANE.

Resumo. O artigo trata da implementação computacional de um modelo capaz de descrever o comportamento do concreto sujeito à fissuração. Utilizam-se relações constitutivas baseadas no modelo de fissuras coesivas para representar a região fissurada do concreto, enquanto o restante do volume não-fissurado é representado como linearmente elástico. Tais relações constitutivas são, então, combinadas com as hipóteses do Método dos Elementos Finitos Estendido, formando um modelo que, introduzindo um salto no campo de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos Padrão, para representar a descontinuidade provocada neste campo pela fissura, é capaz de descrever a propagação da mesma. O critério de propagação é baseado no limite de resistência à tração do material e a geometria da fissura é definida por um conjunto de segmentos lineares. O modelo assim concebido permite que a fissura se propague livremente pela malha convencional, atravessando o domínio e a interface dos elementos finitos. O modelo foi implementado no núcleo numérico do sistema computacional INSANE (Interactive Structural Analysis Environment), permitindo simular problemas de propagação de fissuras em peças de concreto submetidas a tração axial, flexão e compressão diametral. Os resultados são obtidos dentro da faixa de resposta esperada. A principal dificuldade encontrada relaciona-se com o critério de propagação escolhido, que não se mostra adequado para predição da direção correta de propagação da fissura quando a análise alcança níveis elevados de tensão.

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) é o método dos elementos finitos padrão acrescido de recursos complementares que permitem o tratamento numérico de diversos problemas aplicados da ciência dos materiais, principalmente na modelagem numérica de problemas onde ocorrem descontinuidades acentuadas em pequenas partes do domínio. Assim, o XFEM torna-se muito eficaz em aplicações que precisam descrever descontinuidades e singularidades no domínio, por isso tem sido usado nos campos da Mecânica da Fratura, Mecânica dos Sólidos Geral, Mecânica dos Fluídos e Biomecânica. Como exemplo de algumas aplicações específicas, pode-se citar as aplicações da fratura de materiais, de defeitos cristalográficos e da interface entre fases (Belytschko et al., 2009). Esse método tem recebido recentemente muita atenção dos pesquisadores da área da Mecânica Computacional, por isso muitos avanços têm acontecido e muita discussão sobre o XFEM tem trazido cada vez mais luz sobre o método e suas aplicações.

Neste trabalho, apresenta-se uma implementação do XFEM para análise de propagação de fissuras coesivas, dentro do campo da Mecânica da Fratura Não Linear. Tal implementação baseou-se no modelo proposto por Wells e Sluys (2001), que foi escolhido por sua relação simples e direta com o modelo físico de fissura coesiva, usado por sua vez para a descrição da fissuração do concreto. Nessa implementação, uma macrofissura coesiva pode se propagar livremente pela malha de elementos finitos a partir de um ponto predeterminado. A fissura coesiva é inserida no contexto dos elementos finitos convencionais como uma entidade geométrica simples, um conjunto de segmentos de reta, capaz de transmitir tensões coesivas entre suas faces. O método foi implementado para o uso de elementos triangulares de seis nós em Estado Plano de Tensões.

O *INSANE - Interactive Structural Analysis Environment* é um projeto de software livre em desenvolvimento no DEES-UFMG (Pitangueira et al., 2008). Como o objetivo do *INSANE* é disponibilizar um ambiente de implementação amigável, escalável em complexidade e capaz de ser facilmente expandido para dar lugar a novas aplicações, foi usada a metodologia de implementação do XFEM sugerida por Bordas et al. (2006), na qual é descrita a estrutura geral de um código orientado a objeto para o uso em aplicações diversas do XFEM no campo da Mecânica da Fratura e Mecânica dos Sólidos. Dessa maneira, o XFEM foi implementado no *INSANE* dentro de uma estrutura modular, extensível e robusta. Logo, torna-se fácil o acréscimo de novas ferramentas que sejam necessárias ao XFEM para o tratamento de outros problemas que ainda não foram implementados no *INSANE*.

As próximas seções descrevem o modelo implementado. Inicialmente, na seção 2, é descrita a cinemática do salto no campo de deslocamentos que é inserido na base de interpolação dos elementos cruzados pela fissura. Em seguida, na seção 3, é feita a generalização do campo de deslocamentos, baseando-se no Método de Partição da Unidade (Melenk e Babuška, 1996), para possibilitar a inclusão das funções descontínuas na formulação. Logo depois, na seção 4, a partir da inclusão das funções de interpolação enriquecidas na equação dos trabalhos virtuais, as matrizes de rigidez e os vetores de força são redefinidos para levar em conta a presença da descontinuidade no campo de deslocamentos. Na seção 5, os principais aspectos da implementação do modelo numérico de fissuras coesivas baseado no XFEM são abordados. Finalmente, na seção 6, apresenta-se os detalhes da simulação da propagação de fissuras em uma viga.

2 CINEMÁTICA DO SALTO DE DESLOCAMENTOS

Considerando-se o sólido Ω ($\Omega^+ \cup \Omega^-$), mostrado na Figura 1, o campo de deslocamentos u pode ser decomposto em duas partes, uma contínua e a outra descontínua:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (1)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u} são funções contínuas em Ω , e \mathcal{H}_{Γ_d} é a função de Heaviside centralizada na descontinuidade Γ_d ($\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 1$ se $\mathbf{x} \in \Omega^+$, $\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 0$ se $\mathbf{x} \in \Omega^-$). Os componentes do salto de deslocamentos na descontinuidade são dados por $\mathbf{u}_{\mathbf{x} \in \Gamma_d}$.

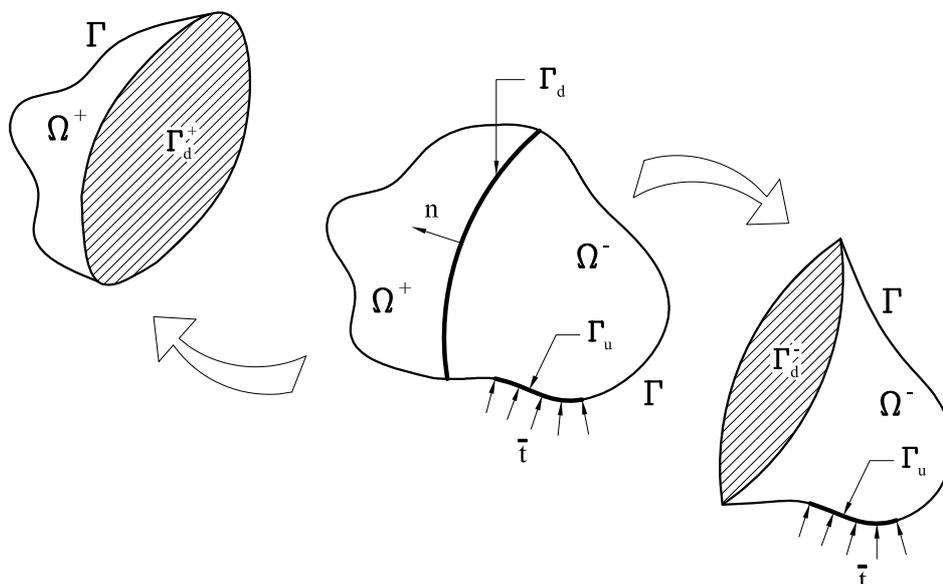


Figura 1: Corpo Ω cortado por uma descontinuidade Γ_d (Wells e Sluys, 2001).

Para encontrar o campo de deformações do corpo Ω , cruzado pela descontinuidade, basta que o gradiente da equação 1 seja calculado. Logo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \mathbf{u}) + (\nabla \mathcal{H}_{\Gamma_d} \otimes \mathbf{u})^s \\ &= \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \mathbf{u})}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta_{\Gamma_d} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{não-limitado}} \quad , \quad (2) \end{aligned}$$

em que δ_{Γ_d} é a função delta de Dirac centralizada na descontinuidade, \mathbf{n} é o vetor normal unitário da superfície de descontinuidade (apontando para Ω^+) e o operador \otimes é o produto de Kronecker. Como todas as deformações são consideradas infinitesimais, a simbologia $()^s$ indica que somente a parte simétrica dos tensores está sendo considerada. A função delta de Dirac aparece no campo de deformações devido ao salto imposto no campo de deslocamentos. Uma vez que a função delta de Dirac não é limitada (tem valor infinito), torna-se impossível dar um sentido físico a ela; entretanto, ela se tornará muito útil posteriormente, quando for necessária a inserção do campo de deformações na equação dos trabalhos virtuais.

3 UM CASO PARTICULAR DAS FUNÇÕES DE PARTIÇÃO DA UNIDADE

De forma simplificada, pode-se considerar que um conjunto de funções $\varphi_i(\mathbf{x})$, cada qual pertencendo a um nó, definidas ao longo de um corpo Ω ($\mathbf{x} \in \Omega$), formam uma partição da unidade se:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad , \quad (3)$$

em que n é o número de pontos nodais. Demonstra-se que um campo qualquer pode ser interpolado em termos de valores nodais usando partições da unidade. Através do uso das funções φ_i , a interpolação de um campo de deslocamentos $u(x)$ ao longo do corpo pode ser construída por

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^k(\mathbf{x}) \left(a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \gamma_j(\mathbf{x}) \right) \quad , \quad (4)$$

em que φ_i^k são funções de partição da unidade de ordem k (para funções de partição da unidade polinomiais, k indica a ordem do polinômio), a_i são os graus de liberdade regulares do nó, b_{ij} são os graus de liberdade adicionais e γ_j é a base adicional composta de m termos. Para que a dependência linear seja evitada, a ordem de qualquer um dos termos polinomiais da base adicional deve ser maior que k .

No caso de elementos finitos padrão, suas funções de forma também podem ser consideradas como casos particulares de partições da unidade, uma vez que

$$\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad , \quad (5)$$

em que N_i são as funções de forma de elementos finitos padrão. Assim, a interpolação do campo de deslocamentos de um elemento finito padrão pode ser vista como um caso particular da equação 4 se as funções de partição da unidade $\varphi_i(\mathbf{x})$ forem substituídas pelas funções de forma; a ordem da função de partição da unidade for tomada igual à ordem polinomial das funções de forma e a base adicional for nula. Logo, não há razão para que a base adicional não possa ser usada com elementos finitos padrão. A equação 4 garante uma interpolação bem-sucedida adicionando-se ao termo da base convencional de elementos finitos (funções de forma) os termos relacionados à base adicional γ_j . Assim, usando-se a notação de elementos finitos e aproveitando-se a propriedade da partição da unidade, a interpolação do campo de deslocamentos pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}}_{\text{termo convencional}} + \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})(\mathbf{N}_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{b})}_{\text{termo adicional}} \quad , \quad (6)$$

em que \mathbf{N} é a matriz que contém as funções de forma (polinomiais) usuais de ordem k , \mathbf{a} é o vetor que contém os graus de liberdade nodais convencionais, \mathbf{N}_γ é a matriz que contém os termos da base adicional e \mathbf{b} é o vetor que contém os graus de liberdade nodais adicionais. O número de graus de liberdade adicionais por nó é igual ao número de termos na base adicional multiplicado pela dimensão espacial. O vetor campo de deformações em função dos deslocamentos nodais pode então ser escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}_\gamma \mathbf{b} \quad , \quad (7)$$

em que $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ e $\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{L}(\mathbf{NN}_\gamma)$. A matriz \mathbf{L} contém os operadores diferenciais e é dada, para o caso tridimensional, por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (8)$$

Assim, a base adicional pode ser usada para melhorar a interpolação do campo de deslocamentos. O aspecto crítico da interpolação na equação 6 é o fato de que ela é construída em uma base "nó a nó", isto é, cada nó precisa ser tratado individualmente. Apesar desse aspecto dificultar um pouco a implementação, é possível aplicar a base adicional aos nós de forma individual. Logo, a solução pode ser aperfeiçoada sem que a malha original de elementos finitos seja modificada.

A seguir, para que o campo de deslocamentos possa incluir uma descontinuidade, acrescenta-se uma função descontínua na base adicional. Examinando-se a decomposição do campo de deslocamentos dada pela equação 1, conclui-se que essa tem forma similar à interpolação do campo de deslocamentos dado pela equação 6. A matriz \mathbf{N} e os graus de liberdade regulares dados pelo vetor \mathbf{a} representam a parcela contínua $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, enquanto o produto matricial \mathbf{NN}_γ , juntamente com os graus de liberdade adicionais dados pelo vetor \mathbf{b} , representam a parcela descontínua $\mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Adicionalmente, para a parte descontínua, a função contínua $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é interpolada por \mathbf{N} e a função de Heaviside \mathcal{H}_{Γ_d} fica embutida dentro da matriz \mathbf{N}_γ . Inserindo-se a função de Heaviside na base adicional da equação 6, o campo de deslocamentos para um elemento finito ao qual se acrescentam os graus de liberdade adicionais pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}}_{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{b}}_{\mathbf{u}} . \quad (9)$$

De forma análoga, o campo de deformações de um elemento finito, onde os graus de liberdade adicionais são ativados, pode ser expresso por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}\mathbf{b} + (\delta_{\Gamma_d} \mathbf{n})\mathbf{N}\mathbf{b} , \quad (10)$$

em que \mathbf{n} é a matriz que contém os componentes do vetor normal à superfície de descontinuidade, dada por:

$$\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} . \quad (11)$$

Efetivamente, os graus de liberdade regulares \mathbf{a} representam a parte contínua, enquanto os graus de liberdade adicionais \mathbf{b} representam o salto de deslocamentos ao longo da descontinuidade. O acréscimo da função de Heaviside \mathcal{H} à base adicional dos elementos finitos resulta em um salto de deslocamentos ao longo da descontinuidade. Esse salto dos deslocamentos é da mesma ordem polinomial que as funções de forma.

4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

A equação dos trabalhos virtuais, sem considerar-se as forças de corpo, é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad , \quad (12)$$

em que $\boldsymbol{\eta}$ são as *variações* admissíveis de deslocamentos, $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões e $\bar{\mathbf{t}}$ são as forças relacionadas às tensões externas aplicadas no contorno Γ_u . Inserindo-se o campo de deformações da equação 2 na equação dos trabalhos virtuais, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta_{\Gamma_d} (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_u} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad . \quad (13)$$

Uma condição imposta por razões práticas à parcela adicional do campo de deslocamentos \mathbf{u} , é que ela seja nula onde as condições de contorno naturais e essenciais são prescritas (em Γ_u). Esta condição simplifica o método e evita o aparecimento de $\boldsymbol{\eta}$ no lado direito da igualdade na equação 13. Assim, integrando-se a função delta de Dirac na equação 13 ao longo do corpo Ω , o termo não limitado desaparece (por definição, a integral da função delta de Dirac tem valor unitário), obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \boldsymbol{\eta}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad , \quad (14)$$

em que $\mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})_{\Gamma_d}$ são as forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade (fissura).

Tomando-se apenas as variações $\boldsymbol{\eta}$, a função de Heaviside \mathcal{H}_{Γ_d} pode ser eliminada da equação 14 pela integração somente em Ω^+ ($\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 1$ se $\mathbf{x} \in \Omega^+$). Assim:

$$\int_{\Omega^+} (\nabla^s \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \boldsymbol{\eta}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (15)$$

A equação 15 assegura que a continuidade das tensões coesivas seja satisfeita no nível variacional, ou no nível das deformações.

Em seguida, definindo-se Γ_d^+ e Γ_d^- como as superfícies da descontinuidade Γ_d dos lados Ω^+ e Ω^- , respectivamente (ver Figura 1), pode-se concluir, a partir da decomposição dos deslocamentos na equação 1, que a contribuição de $\boldsymbol{\eta}$ é sempre zero sobre a superfície Γ_d^- ($\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 0$ se $\mathbf{x} \in \Omega^-$) e pode ser diferente de zero na superfície Γ_d^+ . Assim:

$$\int_{\Omega^+} (\nabla^s \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d^+} \boldsymbol{\eta}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (16)$$

Como consequência, pode-se concluir da equação 16 que as forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade Γ_d estão atuando em Γ_d^+ (ver Figura 2) e sofrem resistência de uma força equivalente no volume contínuo Ω^+ .

A seguir, para que a **matriz de rigidez** e o **vetor de forças internas** sejam obtidos, as interpolações devem ser inseridas na equação dos trabalhos virtuais. Assim, da equação 9, as variações $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ e $\boldsymbol{\eta}$, em termos das variações dos deslocamentos nodais, podem ser escritas como:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{N} \mathbf{a}' \quad (17a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{N} \mathbf{b}' \quad , \quad (17b)$$

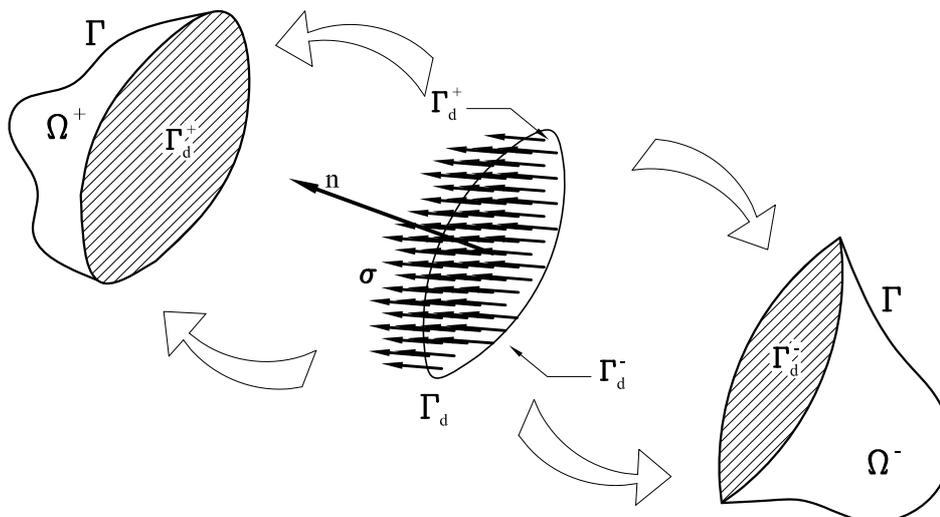


Figura 2: Forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade $\Gamma_d : \mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_{\Gamma_d}$ (Wells e Sluys, 2001).

em que \mathbf{a}' e \mathbf{b}' são as *variações* dos graus de liberdade nodais \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente. O gradiente das variações $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ e $\boldsymbol{\eta}$ pode ser escrito na forma discreta como:

$$\nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}' = \mathbf{B}\mathbf{a}' \quad (18a)$$

$$\nabla^s \boldsymbol{\eta} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{b}' = \mathbf{B}\mathbf{b}' \quad (18b)$$

Inserindo-se a forma discreta das variações dos deslocamentos nodais na equação 14 e separando-se os termos relativos a $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ e $\boldsymbol{\eta}$ na forma de um sistema de equações, têm-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (19a)$$

$$\int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (19b)$$

em que o domínio de integração da primeira integral na equação (19b) é Ω^* , o que indica que o domínio de integração considera as partes do corpo Ω , no qual $\boldsymbol{\eta}$ é diferente de zero.

A partir das equações (19), as forças nodais equivalentes correspondentes às variações dos graus de liberdade regulares \mathbf{a} e dos graus de liberdade adicionais \mathbf{b} são escritas como:

$$\mathbf{f}_a^{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (20a)$$

$$\mathbf{f}_b^{\text{int}} = \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (20b)$$

em que os subscritos "a" e "b" denotam as variações das partes regulares e adicionais, respectivamente.

O vetor de forças internas $\mathbf{f}_a^{\text{int}}$ na equação (20a) tem a mesma forma do vetor de forças internas usual dos elementos finitos, enquanto o vetor de forças internas $\mathbf{f}_b^{\text{int}}$ na equação (20b) precisa ser zero (ver equação (15)), impondo-se a continuidade das tensões coesivas no nível variacional. Para desenvolver-se um procedimento incremental da solução de maneira eficiente,

as relações constitutivas devem ser colocadas na forma de taxa ou razão. A taxa de tensões no domínio do contínuo pode ser expressa, em termos das velocidades dos deslocamentos nodais regulares, como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{a}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}\mathbf{B}\dot{\mathbf{b}}) \quad , \quad (21)$$

em que \mathbf{D} corresponde à relação instantânea entre as tensões e as deformações.

De forma similar, a taxa de tensões coesivas na descontinuidade pode ser expressa, em termos das velocidades dos deslocamentos nodais adicionais, como:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{N}\dot{\mathbf{b}} \quad , \quad (22)$$

em que \mathbf{T} corresponde à relação instantânea entre as tensões coesivas e os deslocamentos na descontinuidade ou fissura.

A substituição da taxa de tensões e da taxa de tensões coesivas na equação discreta dos trabalhos virtuais, dada pela equação (19), conduz à obtenção da matriz de rigidez \mathbf{K} em função dos deslocamentos incrementais ($d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} d\Gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{\text{int}} \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{Bmatrix} \quad , \quad (23)$$

em que \mathbf{f}^{ext} é a matriz das forças externas aplicadas no contorno externo Γ_u (ver o lado direito da igualdade na equação (19a)), dada por:

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad . \quad (24)$$

O modelo constitutivo discretizado (relação entre as tensões e os deslocamentos no caminho da fissura) baseia-se no conceito de fissura coesiva ou fictícia, em particular no modelo de fissura fictícia de Hillerborg et al. (1976), no qual todas as deformações inelásticas (aquelas que ocorrem na zona de processo de fratura) são representadas em uma linha através das forças coesivas que agem na fissura, ou em uma extensão fictícia da fissura. O modelo constitutivo é definido por um sistema de coordenadas local, ortogonal, no qual os vetores n e s representam as direções normal e paralela à fissura, respectivamente (Figura 3). No restante do domínio não fissurado da amostra, considera-se que o material possui comportamento elástico. Assim, a relação instantânea entre as tensões e as deformações \mathbf{D} , dada na equação (21), é a tangente constitutiva elástica.

A relação instantânea entre as tensões coesivas e os deslocamentos na região da fissura \mathbf{T} , em duas dimensões, é definida como uma rigidez tangente, podendo ser chamada de tangente constitutiva não elástica. Esta, por sua vez, considera que o dano na região da fissura envolve os modos I e II de abertura de fissura, ou tração e cisalhamento, respectivamente.

A tensão coesiva normal t_n , transmitida ao longo da descontinuidade, é aproximada por uma função exponencial decrescente do parâmetro histórico κ :

$$t_n = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad , \quad (25)$$

em que f_t é a resistência à tração do material e G_f é a energia de fratura, aqui considerada como uma propriedade constante do material.

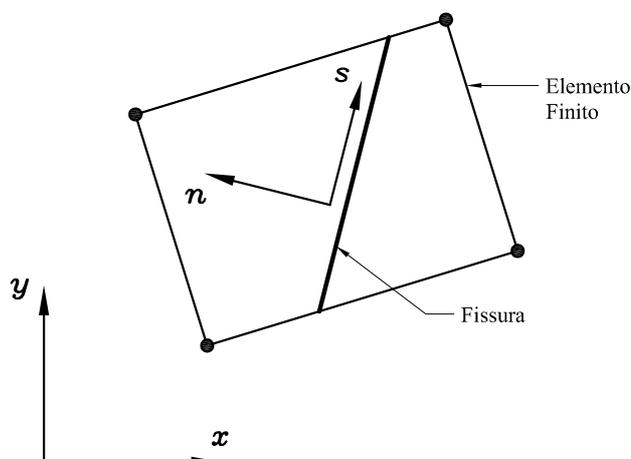


Figura 3: Sistema de coordenadas locais da descontinuidade dentro de um elemento finito (Wells e Sluys, 2001).

Considerando-se que a rigidez da fissura ao cisalhamento possui um valor constante, tem-se:

$$\begin{matrix} \text{Rigidez da fissura ao cisalhamento} = \text{constante} \\ \left\{ \begin{matrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{matrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & \beta G_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \left\{ \begin{matrix} \dot{u}_n \\ \dot{u}_s \end{matrix} \right\} . \end{matrix} \quad (26)$$

O risco que se corre ao se usar a *rigidez da fissura ao cisalhamento* constante é que, se essa é feita muito pequena, será prevista uma resposta global pós-limite excessivamente frágil. Por outro lado, se a rigidez da fissura ao cisalhamento é feita muito grande, será observado um fechamento excessivo da fissura (tensões coesivas oferecendo muita resistência à abertura da fissura).

O comportamento de *descarregamento* na descontinuidade é simulado através da rigidez secante S . Esta última é calculada fazendo-se todos os termos fora da diagonal principal da matriz T iguais a zero e trocando-se o termo (1, 1) da matriz T por $\left(\frac{f_t}{\kappa} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) / \kappa\right)$. Assim:

$$\begin{matrix} \text{Rigidez Secante usada no descarregamento} \\ \left\{ \begin{matrix} t_n \\ t_s \end{matrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_t}{\kappa} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & \beta G_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \left\{ \begin{matrix} u_n \\ u_s \end{matrix} \right\} . \end{matrix} \quad (27)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O procedimento numérico implementado neste trabalho usa apenas o triângulo de seis nós como o elemento finito base. Nada impede, porém, que posteriormente seja implementado para os demais elementos planos existentes no *INSANE*.

Durante o cálculo, as tensões principais de tração são verificadas em todos os pontos de integração do elemento logo adiante da ponta da descontinuidade, ao final de um incremento de carga. Se a tensão principal máxima de tração em qualquer dos pontos de integração do ele-

mento adiante da ponta da fissura excede o valor da resistência à tração do material, introduz-se uma descontinuidade através de todo o elemento. Uma vez que o concreto possui baixa resistência à tração, alinha-se a normal à descontinuidade (vetor n) com a tensão principal máxima de tração. Assim, no final de um passo de carregamento, se em um ponto de integração qualquer o valor da tensão principal máxima de tração ultrapassar o valor da resistência à tração do material, uma descontinuidade é introduzida. A descontinuidade é introduzida apenas no final do incremento de carga, uma vez que torna-se indesejável a introdução de uma descontinuidade em um sistema não equilibrado.

As descontinuidades são introduzidas como linhas retas dentro dos elementos (o vetor n normal à descontinuidade é uma constante dentro de cada elemento). Uma vez que, no contexto teórico de fissura coesiva, a energia total de fratura é dissipada com a separação entre as superfícies fissuradas e não com a criação dessas superfícies (como é tratada na Mecânica da Fratura Linear-Elastica), o resultado numérico do método aqui descrito não é particularmente sensível a quando exatamente uma descontinuidade é estendida, ou mesmo a qual o valor do comprimento dessa extensão. É possível (e inevitável sob o refinamento da malha) que uma descontinuidade propague-se por mais de um elemento finito ao final de um incremento de carga. A introdução de uma descontinuidade através de um elemento inteiro pode conduzir a saltos de tensão na introdução da descontinuidade, porém, a experiência indica que isso não tem influência na robustez do algoritmo, além do que, sob o refinamento da malha, os saltos de tensão tendem a ser minimizados. Por outro lado, tais saltos de tensão podem trazer problemas no cálculo da direção correta de propagação da fissura, uma vez que esse cálculo depende dos valores das tensões que se desenvolvem nas proximidades da ponta da fissura.

Diferente de outros modelos, nesse modelo, uma fissura precisa propagar-se a partir de um ponto discreto. Então, existem duas formas de uma fissura começar: a primeira é pela escolha de um ponto antes do início do cálculo e a segunda é executando um passo de carregamento elástico em toda a estrutura e verificando onde exatamente as tensões principais são maiores. Na implementação feita neste trabalho, a fissura se propaga a partir de um ponto escolhido antecipadamente, que deve ser informado na entrada de dados do programa.

A consideração mais importante na propagação da descontinuidade é a escolha correta da direção da mesma. Uma vez que, normalmente, a ponta da descontinuidade não se localiza em um ponto onde as tensões são conhecidas com precisão (como nos pontos de Gauss), o campo de tensões local não é confiável para produzir com precisão o vetor normal à descontinuidade de forma correta. Para superar esse problema, tensões não locais são calculadas na ponta de uma descontinuidade para serem usadas na definição das direções principais. O tensor de tensões não local é calculado como uma média ponderada das tensões, usando uma função de peso Gaussiana:

$$w = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad , \quad (28)$$

em que w é o peso, l determina quão rapidamente a função de peso diminui longe da ponta da descontinuidade e r é a distância de um ponto até a ponta da fissura (ver Figura 4).

Ressalta-se que o uso da função de peso não implica em uma não localidade no modelo, mas é um método para regularizar as tensões locais, de modo a definir com maior precisão a direção das tensões principais. Considera-se que o parâmetro l tem valor igual a aproximadamente três vezes o tamanho típico do elemento. Alguns pesquisadores comprovaram que o uso de uma medida não local para a determinação da direção de propagação da descontinuidade conduz a uma previsão mais confiável do caminho da fissura.

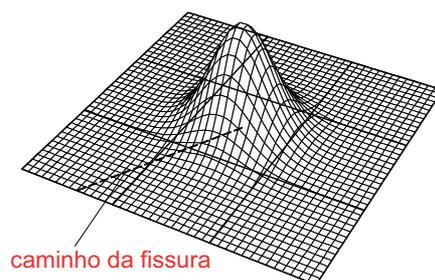


Figura 4: Função de peso gaussiana (Dumstorff e Meschke, 2007).

Até então, não foi feita nenhuma menção sobre quais nós devem ser enriquecidos (nó enriquecido = nó que possui os graus de liberdade adicionais além dos graus de liberdade convencionais) quando o elemento ao qual pertencem é cruzado por uma descontinuidade. Como as funções na base adicional γ são multiplicadas pelas funções de forma de um nó particular, a base adicional de um nó particular tem influência somente sobre o suporte desse nó (suporte do nó = o(s) elemento(s) ao(s) qual(ais) o nó pertence). Logo, a função de Heaviside é acrescentada somente na base adicional γ dos nós cujo *suporte* é cruzado por uma descontinuidade.

A Figura 5 ilustra o processo de enriquecimento dos nós passo a passo, para cada incremento completo de carga.

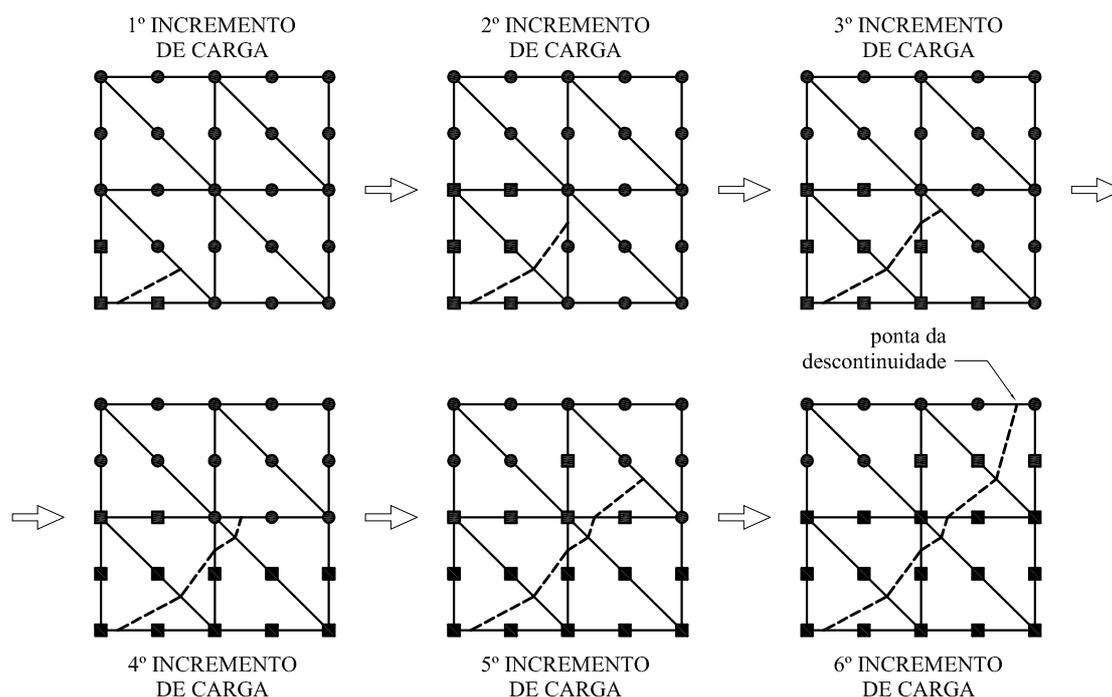


Figura 5: Processo de enriquecimento de nós. Os nós enriquecidos são indicados por quadrados, e os nós regulares são indicados por círculos.

Nesse processo, a condição que deve ser satisfeita é que o salto de deslocamentos na ponta da fissura seja zero. Para garantir isso, os nós pertencentes a um elemento cujo contorno é apenas "tocado" por uma descontinuidade não são enriquecidos, nenhum deles, mesmo que sejam compartilhados por outros elementos cruzados pela descontinuidade. Somente quando a descontinuidade se propaga para o próximo elemento é que todos os nós localizados atrás da ponta da fissura são enriquecidos (ver Figura 5).

Trata-se agora da questão da integração numérica. Quando usam-se funções de forma diferentes das funções de forma padrão, surge a questão de como a integração numérica deve ser realizada. O requisito mais importante quando se usam funções descontínuas é que o campo de deformações seja integrado adequadamente em ambos os lados da descontinuidade. A falha de integração em ambos os lados da descontinuidade resulta na dependência linear do sistema de equações, uma vez que a função de Heaviside não pode ser distinguida de uma simples função constante. Por isso, quando uma descontinuidade cruza um elemento, normalmente o esquema inicial de integração de Gauss não é suficiente para garantir que as funções de forma permaneçam linearmente independentes. Assim, um esquema especial de integração proposto por Wells e Sluys (2001), ilustrado na Figura 6, é usado.

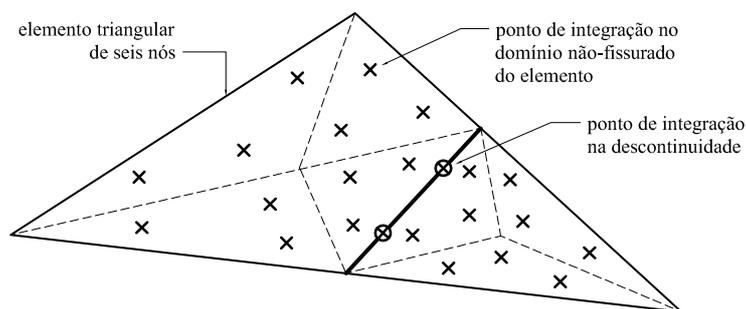


Figura 6: Esquema de integração para o elemento triangular de 6 nós cortado por uma descontinuidade (linha cheia). As cruzes representam pontos de integração para o meio contínuo e as cruzes dentro de um círculo indicam os pontos de integração para as tensões coesivas na descontinuidade (Wells e Sluys, 2001).

Os elementos que não são cruzados pela descontinuidade são integrados pela quadratura de Gauss padrão; logo, no caso do elemento triangular de seis nós, são três pontos de integração. Porém, quando um elemento triangular de seis nós é cruzado por uma descontinuidade, os domínios Ω_e^+ e Ω_e^- do elemento, em cada lado da descontinuidade, são divididos em subdomínios triangulares (ver Figura 6). Dentro de cada subdomínio triangular, aplica-se uma quadratura de Gauss de três pontos. Adicionalmente, além dos pontos de Gauss criados no domínio não fissurado Ω_e^+ e Ω_e^- do elemento, acrescentam-se dois pontos de integração sobre a descontinuidade, para a integração das tensões coesivas.

O esquema de integração proposto requer 23 pontos de integração por elemento, o que pode parecer um excesso à primeira vista. Entretanto, uma vez que somente os elementos cruzados pela descontinuidade precisam do esquema de integração modificado, o esforço computacional é pequeno. No domínio não fissurado Ω_e^+ e Ω_e^- do elemento, o esquema proposto integra o campo de tensões de forma redundante. Porém, adota-se o esquema de integração modificado para permitir a máxima flexibilização do modelo, uma vez que pode-se desejar o acréscimo de outras funções enriquecedoras além da função de salto de Heaviside (por exemplo, os campos próximos à ponta da fissura usados pela Mecânica da Fratura Linear-Elastica). Como é indesejável que o esquema de integração seja modificado para cada grupo diferente de funções de enriquecimento que se queira usar, o custo computacional da integração redundante em um pequeno número de elementos torna-se desprezível.

De forma complementar, para se ter uma visão geral da estrutura usada na implementação computacional, o trabalho de Wolff (2010) deve ser consultado. Nele, dentro de um contexto de Projeto Orientado a Objeto, são indicados, esquematicamente, cada um dos recursos necessários à montagem do modelo de fissuras coesivas baseado no XFEM, conforme cada um dos aspectos aqui descritos.

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Simulações numéricas de propagação de fissuras em peças de concreto submetidas a tração axial, compressão diametral, flexão em três pontos e cisalhamento em quatro pontos foram processadas no *INSANE*. Os exemplos foram extraídos de artigos que apresentam métodos numéricos de implementação de fissuras coesivas baseados no XFEM. Assim, foi possível comparar os resultados encontrados com os resultados apresentados por outros pesquisadores. Todos estes resultados podem ser encontrado em [Wolff \(2010\)](#). Aqui, apresenta-se somente parte dos resultados da simulação de uma viga biapoada sujeita a flexão em três pontos, explorando-se uma limitação do modelo relativa ao critério de cálculo da direção de propagação da fissura. Para esse ensaio, verifica-se a capacidade do modelo em descrever a propagação de uma fissura com trajetória retilínea ou curvilínea. Os resultados obtidos são comparados aos resultados apresentados por [Wells e Sluys \(2001\)](#).

A Figura 7 mostra a geometria e as condições de contorno de uma viga biapoada. Os seguintes valores foram adotados para os parâmetros do material: $E = 100 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0.0$; $f_t = 1.0 \text{ N/mm}^2$ e $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$.

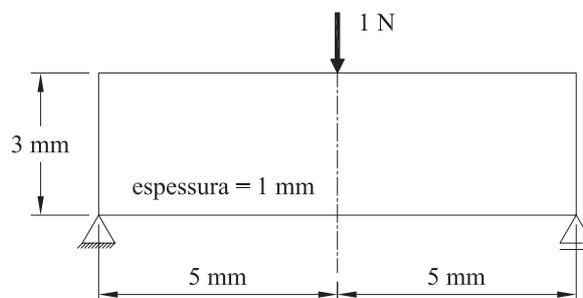
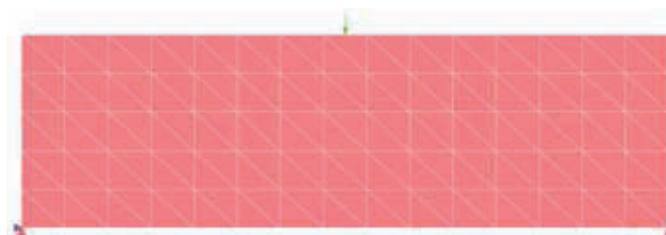


Figura 7: Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em 3 pontos.

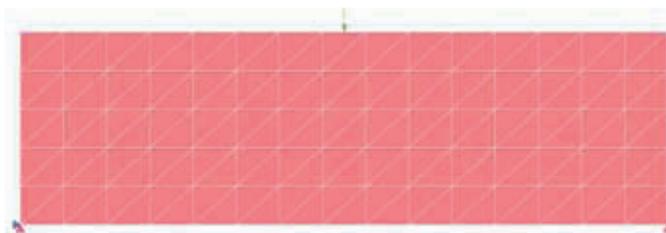
Usando-se os dados acima, são adotadas quatro malhas distintas:

- Malha I — Malha estruturada formada por 150 elementos dispostos em faixas inclinadas a 45° à esquerda (Figura 8(a));
- Malha II — Malha estruturada formada por 150 elementos dispostos em faixas inclinadas a 45° à direita (Figura 8(b));
- Malha III — Malha não estruturada formada por 184 elementos com uma coluna central estruturada de elementos (Figura 8(c)) e
- Malha IV — Malha não estruturada formada por 622 elementos (Figura 8(d)).

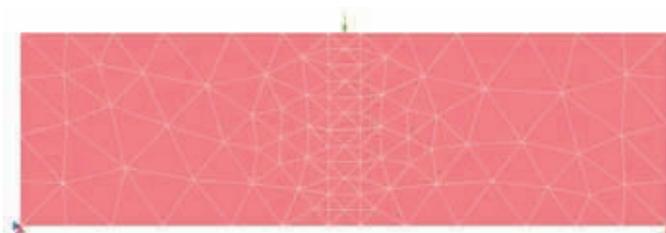
Inicialmente, uma fissura é inserida na região central da viga, na parte inferior, e sua propagação é estudada usando-se as Malhas I, II e III. Espera-se que a sua propagação aconteça de baixo para cima, em uma trajetória retilínea. As malhas usadas são grosseiras, mas suas topologias foram estrategicamente preparadas. Assim, percebe-se que as Malhas I e II são assimétricas em relação ao eixo vertical central da viga e são espelhadas uma em relação à outra, enquanto a Malha III possui simetria em relação ao eixo vertical na parte central. Essas três malhas são usadas para exemplificar a deficiência do critério usado para o cálculo da direção da fissura. A Malha IV é usada, por ser mais refinada, para comparação com os resultados apresentados por [Wells e Sluys \(2001\)](#), para uma fissura de trajetória curvilínea.



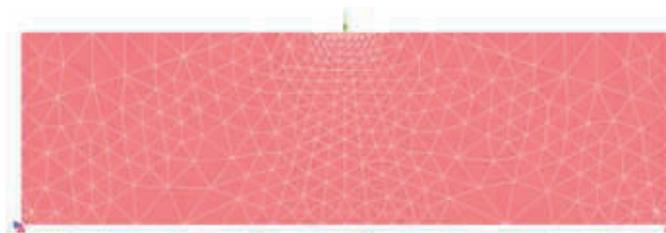
(a) Malha I - 150 elementos



(b) Malha II - 150 elementos



(c) Malha III - 184 elementos



(d) Malha IV - 622 elementos

Figura 8: Malhas de Elementos Finitos Planos usadas

6.1 Fissura com Trajetória Retilínea

Na Malha I, observa-se que a fissura iniciada no centro da viga, na parte inferior, propaga-se na direção vertical, em uma trajetória linear, até a metade inferior da viga. A partir daí, sua propagação sofre um desvio para o lado esquerdo até a parte superior, no final da propagação (Figura 9(a)). Um comportamento semelhante pode ser observado na propagação da fissura na Malha II, com a diferença de que a fissura sofre um desvio para o lado direito no trecho superior da viga (Figura 9(b)). Somente na Malha III a propagação ocorre de forma correta: a fissura percorre uma trajetória retilínea desde a base até o topo da seção central (Figura 9(c)).

O comportamento distinto apresentado pela propagação da fissura em cada uma das malhas pode ser entendido através de uma investigação do processo de enriquecimento dos nós da malha. O enriquecimento de um nó, no contexto do XFEM, consiste simplesmente no acréscimo de graus de liberdade ao nó, além daqueles que ele já possui. Esses graus de liberdade adicionais levam em conta os deslocamentos da superfície da fissura, tornando os nós responsáveis por

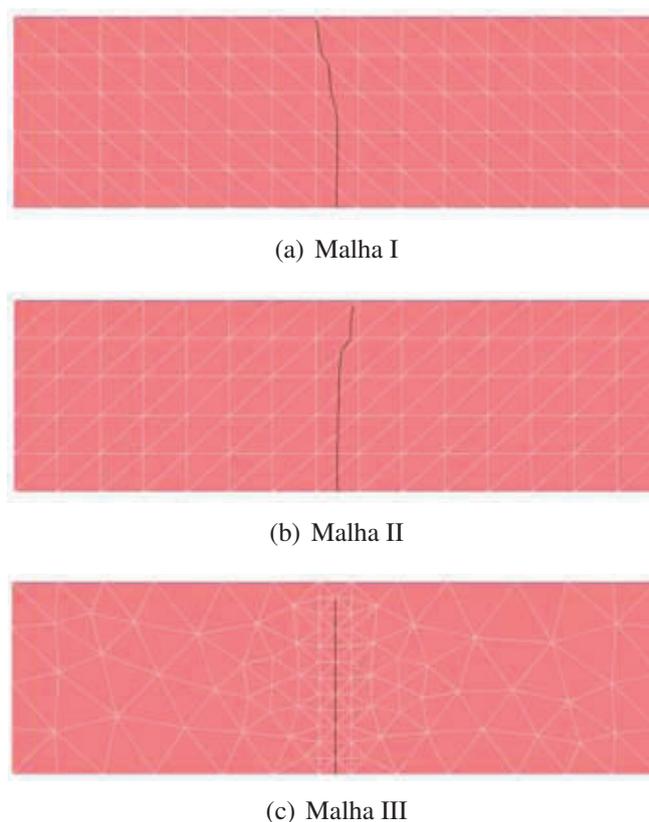


Figura 9: Resultados de propagação da fissura retínea para as malhas I, II e III

repassar para todos os demais elementos que o possuem o efeito do salto criado no campo de deslocamentos do elemento atravessado pela fissura.

Assim, quando os nós de um elemento fissurado são enriquecidos, o campo de deslocamentos desse elemento é modificado, tornando-se descontínuo, enquanto o campo de deslocamentos dos demais elementos que possuem os mesmos nós enriquecidos permanecem contínuos, mas recebem o efeito dos graus de liberdade adicionais. A partir de um campo de deslocamentos descontínuo, um elemento fissurado adquire a capacidade de se deslocar de forma completamente independente de um lado e de outro da fissura. De um ponto de vista cinemático, pode-se dizer que os nós de um lado da fissura estão desacoplados dos nós que estão do outro lado. Assim, um elemento fissurado, cujos nós foram enriquecidos, pode possuir valores de deslocamentos nodais completamente diferentes e independentes de um lado e do outro da fissura. Consequentemente, os campos de deformação e de tensão vão reproduzir o mesmo efeito a partir dos valores dos deslocamentos nodais.

De acordo com o modelo adotado neste trabalho, a fissura propaga-se elemento a elemento, atravessando completamente um elemento de cada vez. A partir dessa definição, quando uma fissura atravessa um novo elemento, todos os nós desse elemento são enriquecidos, excluindo-se os nós que se encontram na face que contém a ponta da fissura recém-formada. Este procedimento é necessário para que se garanta que os valores de abertura de fissura permaneçam nulos na ponta da fissura e o critério de continuidade seja atendido na interface entre o elemento fissurado e o elemento seguinte, que ainda não está fissurado. Porém, quando a fissura atravessa para o elemento seguinte, então esses nós da interface anterior podem ser enriquecidos. Este processo está descrito na seção 5.

Logo, o processo de enriquecimento dos nós de um elemento atravessado por uma fissura se

dá basicamente em duas etapas: inicialmente, somente alguns nós são enriquecidos quando a fissura atravessa o elemento e posteriormente os demais nós são enriquecidos quando a fissura atravessa o próximo elemento à frente da ponta da fissura. Nesse processo, uma etapa e outra podem estar separadas por um ou mais passos incrementais dentro da análise numérica. A depender do estágio da análise, podem ser necessários vários passos para que a fissura atravessa o próximo elemento. Assim, se o elemento à frente da ponta da fissura está sujeito a esforços de compressão, por exemplo, podem ser necessários vários passos incrementais para efetuar a transição do estado comprimido para o tracionado. Durante esses passos de transição, entre uma etapa e outra do enriquecimento dos nós, têm-se alguns nós enriquecidos dentro do elemento e outros não. O fato de que, devido ao enriquecimento dos nós, os deslocamentos de um lado e do outro da fissura estão desacoplados, somado ao fato de que alguns nós estão enriquecidos e outros não, pode produzir valores de deslocamentos, deformações e tensões muito diferentes entre si, de um e do outro lado da fissura, próximo à ponta da mesma, durante a transição das etapas de enriquecimento.

A Figuras 10 mostra alguns estágios no processo de enriquecimento dos nós da Malha I. Os nós enriquecidos são destacados para que se perceba o processo de enriquecimento de um estágio para o outro.

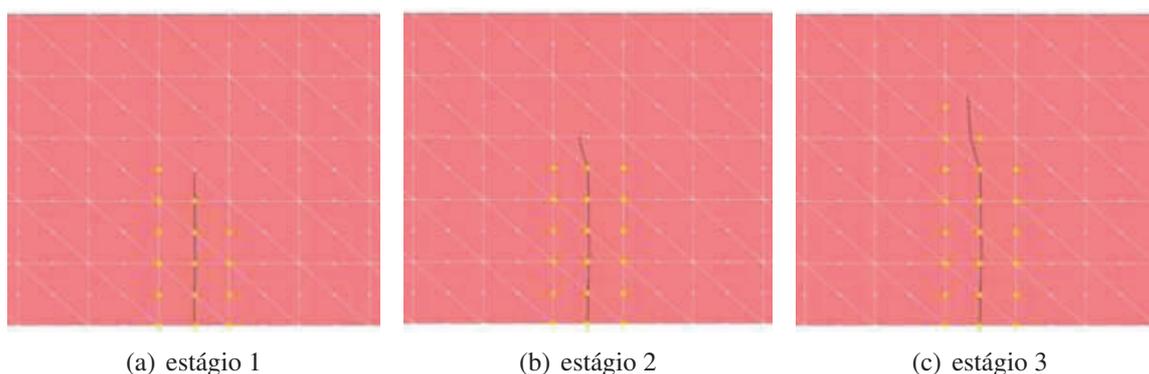


Figura 10: Processo de enriquecimento dos nós par a a malha I

Nota-se uma assimetria no enriquecimento dos nós em relação à linha de fissuração, tanto no estágio 1 (Figura 10(a)) quanto no estágio 3 (Figura 10(c)). Foi observado que os valores das tensões nos pontos de Gauss localizados simetricamente de um lado e do outro da ponta da fissura, durante os passos incrementais de transição entre o estágio 1 e o estágio 2 de enriquecimento, apresentam valores muito diferentes entre si. Assim, enquanto as tensões σ_{xx} do lado direito apresentam valores positivos, as tensões σ_{xx} do lado esquerdo apresentam valores negativos. Esperava-se encontrar valores simétricos de tensões, no entanto, foram encontrados valores muito diferentes em módulo e sinal.

Percebe-se a influência dessas disparidades dos valores das tensões na direção do trecho da fissura que atravessa o elemento no estágio 2 (Figura 10(b)), que inclina-se para a esquerda. Como no estágio 2 o enriquecimento dos nós torna-se simétrico, a disparidade entre as tensões de um lado e de outro da ponta da fissura, na transição do estágio 2 para o estágio 3, diminui. Assim, a inclinação do novo trecho da fissura que aparece no estágio 3 é amenizada. Porém, novamente aparece a assimetria no enriquecimento dos nós no estágio 3, e o próximo trecho da fissura sofrerá uma inclinação mais acentuada à esquerda. Uma vez que a direção de propagação de cada trecho da fissura é calculada por uma média ponderada das tensões próximas à ponta

da mesma, os valores distorcidos de tensões nessa região provocam direções de propagação distorcidas.

A alteração da direção correta da propagação da fissura em cada trecho de enriquecimento assimétrico, aliada ao fato de que cada novo trecho da fissura começa no final do último trecho, produz um resultado de propagação impreciso na parte superior da Malha I, conforme pode ser visto da Figura 9(a).

Um comportamento análogo pode ser observado na Malha II, onde a fissura se propaga seguindo uma direção inclinada para a direita na parte superior da viga (Figura 9(b)). De maneira semelhante à Malha I, os estágios de enriquecimento de alguns nós são mostrados na Figura 11. A mesma assimetria no processo de enriquecimento dos nós da Malha II pode ser observada. Analisando-se os valores das tensões em pontos de Gauss simetricamente posicionados em relação à linha da fissura e localizados à sua frente, foram encontradas as mesmas disparidades nos tensores de tensão. A diferença agora é que a fissura é desviada para o lado direito em relação à sua trajetória central.

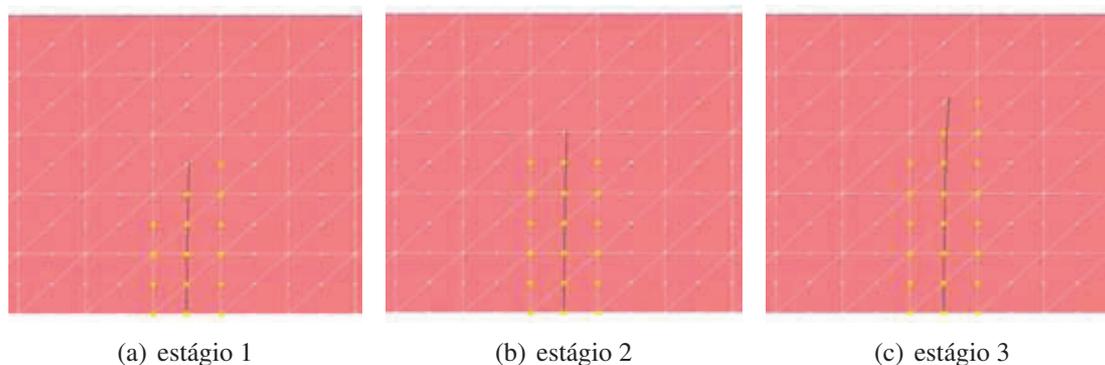


Figura 11: Processo de enriquecimento dos nós para a malha II

Em seguida, observa-se a trajetória da fissura seguindo seu caminho corretamente na Malha III (Figura 9(c)). Uma inspeção da Figura 12 mostra que, nesse caso, o processo de enriquecimento dos nós acontece de forma simétrica em relação à linha de fissuração. Assim, apesar de os nós dentro de um elemento fissurado continuarem a ser enriquecidos em dois estágios, a cada estágio, ao longo de todo o processo de propagação, o enriquecimento mantém-se simétrico. Como resultado, os tensores de tensão avaliados próximos à ponta de cada trecho da fissura também apresentam-se simétricos em relação à linha da fissura e, conseqüentemente, os valores calculados da direção da fissura em cada trecho são corretos.

É importante ressaltar que o processo de enriquecimento dos nós de um elemento em duas etapas distintas e as disparidades que podem existir entre os valores das tensões nas proximidades da ponta da fissura são características do modelo numérico escolhido e não são, em si mesmas, um defeito do modelo. Na verdade, é natural que dentro da análise numérica existam essas disparidades de tensões na região da ponta da fissura, uma vez que o processo é não linear e a solução vai sendo ajustada passo a passo. Assim, ao longo do processo de enriquecimento de um elemento para o outro, as disparidades vão sendo minimizadas à medida que os nós que ainda não tinham sido enriquecidos dentro do elemento passam a ser enriquecidos. Essas disparidades, que foram ressaltadas nesse exemplo, são localizadas em uma região definida, a ponta da fissura, e são automaticamente ajustadas durante o processo não linear. O problema aqui exposto está relacionado exclusivamente ao método usado para calcular a direção dos trechos da fissura, durante sua propagação, o qual lança mão justamente das tensões localizadas

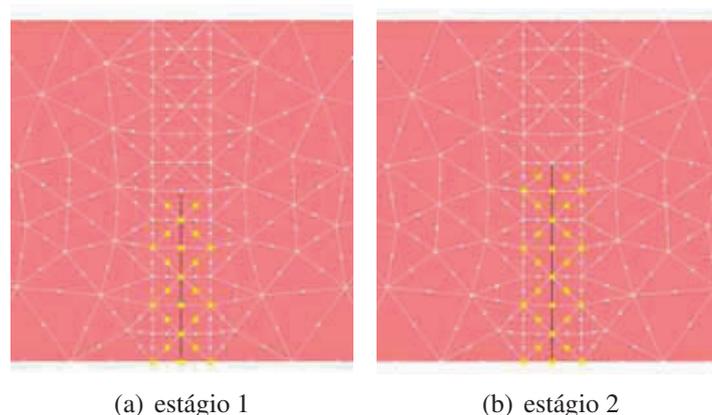


Figura 12: Processo de enriquecimento dos nós par a a malha III

na ponta da fissura e busca tais tensões exatamente no momento em que elas podem apresentar disparidades.

É por esse motivo que os métodos citados em [Meschke et al. \(2006\)](#) buscam sanar esses problemas no cálculo da direção da fissura, seja evitando o uso do efeito dos enriquecimentos nodais na hora do cálculo da direção da fissura, como é o caso do critério baseado na LEFM; seja através do uso de uma abordagem global, considerando as tensões em toda a malha, e não apenas na ponta da fissura, como faz o critério do algoritmo de rastreamento global; ou ainda minimizando a energia total do corpo em estudo para determinar a direção da fissura, como faz o critério global de energia.

Por outro lado, observa-se ainda, na análise das Malhas I, II e III, que, apesar dos problemas encontrados na direção de propagação da fissura a partir da metade superior da viga, a direção da propagação na parte inferior praticamente não foi afetada pelas disparidades de tensão nesse trecho. Na verdade, no início da propagação, pelo fato de a região inferior da viga já possuir predominantemente tensões de tração, não há a necessidade de uma transição do estado de tensões dos elementos dessa região, logo, a propagação depende muito pouco da ação da fissura nessa região. Já a parte superior da viga está inicialmente toda comprimida e depende totalmente da ação da fissura para que, gradativamente, passe do estado predominante de compressão para o de tração, à medida que a fissura se propaga. Logo, os valores dos deslocamentos associados aos graus de liberdade adicionais dos nós enriquecidos de elementos que estão localizados nessa região são muito elevados e, conseqüentemente, as disparidades nos valores das tensões associadas são bem maiores durante o processo de enriquecimento dos nós.

Nota-se, porém, que o uso de uma malha mais refinada nessas regiões onde a transição do estado de tensões é acentuada minimiza o problema das disparidades nos valores das tensões nas proximidades da ponta da fissura, resultando em uma aproximação um pouco melhor dos valores corretos da direção da fissura. Porém, mesmo diante do refinamento da malha, o critério de cálculo da direção da fissura baseado na média ponderada de tensões é pouco confiável para descrever corretamente a propagação, uma vez que depende de uma simetria perfeita no processo de enriquecimento dos nós, conforme mostrado na Malha III. Tal simetria foi induzida nesse exemplo para que a limitação desse critério de cálculo da direção da fissura fosse claramente exposta. Na prática, o uso de malhas não estruturadas ou de condições de contorno assimétricas tornam praticamente impossível a ocorrência de um enriquecimento de nós simétrico. Conseqüentemente, a direção correta da fissura não pode ser garantida com o uso do critério aqui adotado, mesmo diante do refinamento da malha.

Focando-se a atenção na malha III, na qual foi possível descrever corretamente a propagação da fissura de trajetória retilínea, ressaltam-se, a seguir, os resultados obtidos por essa discretização.

A Figura 13 mostra a relação entre o fator de carga global e o deslocamento na direção y do nó no qual foi aplicada a carga. Esse resultado pode ser comparado ao resultado obtido por Wells e Sluys (2001). Percebe-se que no trabalho desses autores foi usada uma malha bem mais refinada que a Malha III para a descrição da fissura vertical na seção central da viga. Mesmo assim, os resultados mostrados pela curva de *softening* das duas malhas são praticamente os mesmos. Isso mostra a capacidade do modelo de reproduzir resultados confiáveis de forma independente da discretização. Na Figura 14 mostra-se ainda o salto no campo de deslocamentos na direção x , provocado pela fissura.

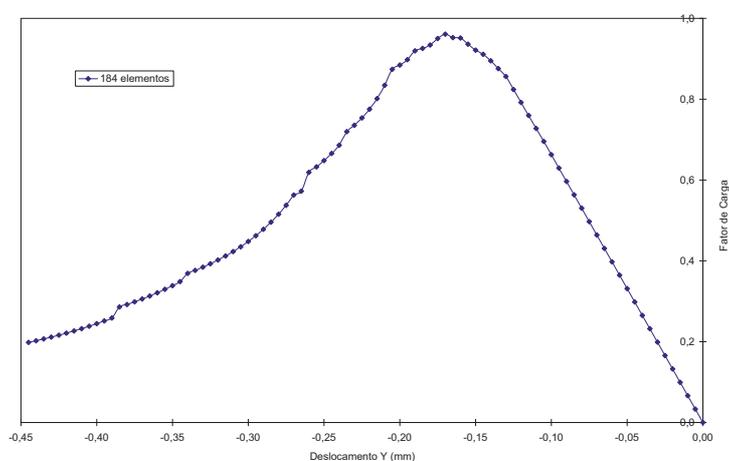


Figura 13: Relação Fator de Carga \times Deslocamento para a malha III.

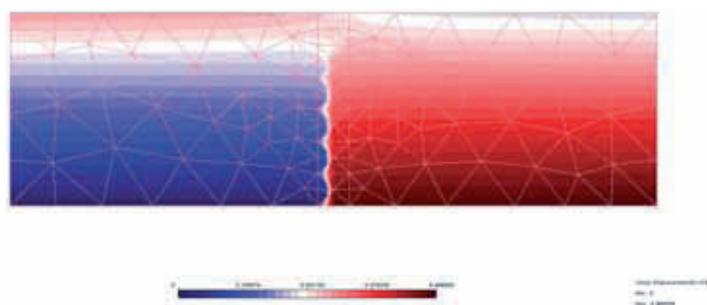


Figura 14: Deslocamentos na direção x para a malha 3.

6.2 Fissura com Trajetória Curvilínea

O problema de flexão em 3 pontos continua em questão, mas agora é apresentada a resposta das Malhas I, II e III, quando sujeitas a uma fissura que se inicia na parte inferior da viga, em um ponto deslocado de 0.7 mm para a direita a partir do eixo vertical no centro da mesma. Assim, o objetivo agora é mostrar que o modelo é capaz de descrever uma fissura curva que se propaga livremente, atravessando os elementos finitos de uma malha.

Usando-se as mesmas discretizações anteriores, as Malhas I, II, e III foram processadas com a fissura inicial na nova posição, e o resultado da trajetória da fissura em cada uma delas está

indicado na Figura 15. Da inspeção dessa figura, percebe-se que, apesar das diferenças no traçado da fissura e dos desvios na direção da mesma na região superior da viga, todas as três malhas são capazes de descrever uma trajetória curva.

A causa das diferenças apresentadas em cada trajetória é a mesma já explicada na seção ???. Devido aos mesmos motivos já apresentados no caso da fissura de trajetória linear, a trajetória da fissura curva sofre desvios do seu traçado correto, principalmente na parte superior da malha, onde ocorre uma transição acentuada no estado de tensões dos elementos fissurados dessa região.

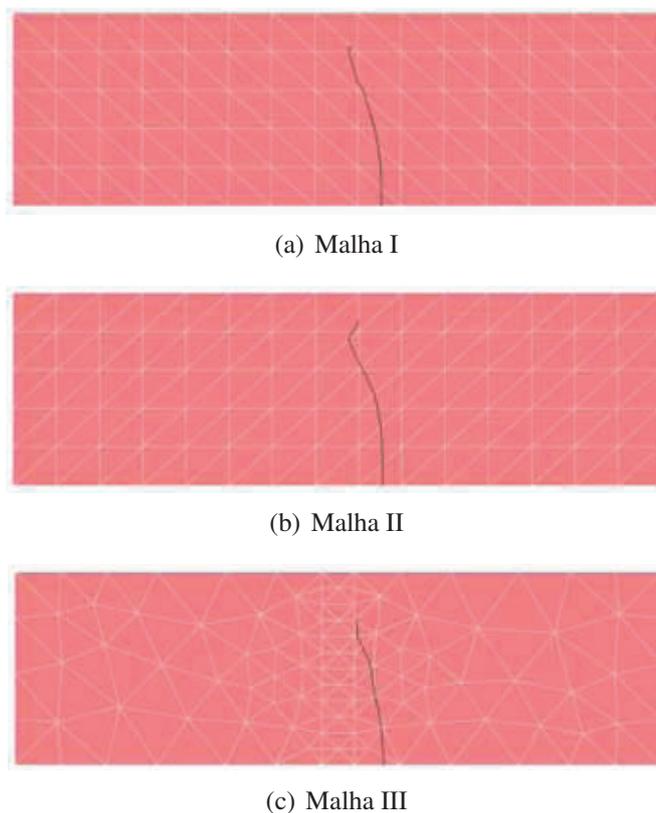


Figura 15: Resultados de propagação da fissura curva para as malhas I, II e III

Resultados melhores de propagação são obtidos com o uso de uma malha mais refinada na região superior da malha, exatamente onde os valores dos deslocamento associados aos graus de liberdade dos nós enriquecidos são maiores e têm maior influência na transição do estado de tensões dos elementos. Assim, usando-se a mesma geometria, as mesmas condições de contorno e os mesmos parâmetros do material das demais malhas, foi usada a Malha IV (Figura 8(d)) para a descrição da fissura de trajetória curva.

A propagação da fissura na Malha IV está indicada na Figura 16. Comparando-se a trajetória aqui mostrada com a trajetória da fissura encontrada por Wells e Sluys (2001), verifica-se que o caminho percorrido pela fissura na Malha IV é muito semelhante à trajetória da fissura lá indicada. Mais uma vez, constata-se a capacidade do modelo de descrever uma fissura de trajetória curva.

Ainda são mostrados outros resultados relativos à Malha IV. Na Figura 17, é mostrada a relação entre o fator de carga e o deslocamento vertical do nó de aplicação da carga e , e, na Figura 18, mostra-se o salto no campo de deslocamentos x , na qual percebe-se claramente o efeito da presença da fissura de trajetória curva na descontinuidade do campo de deslocamentos.

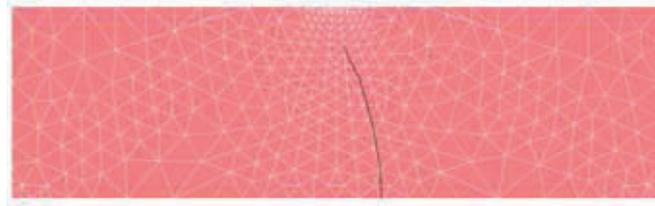


Figura 16: Propagação da fissura curva para a malha IV.

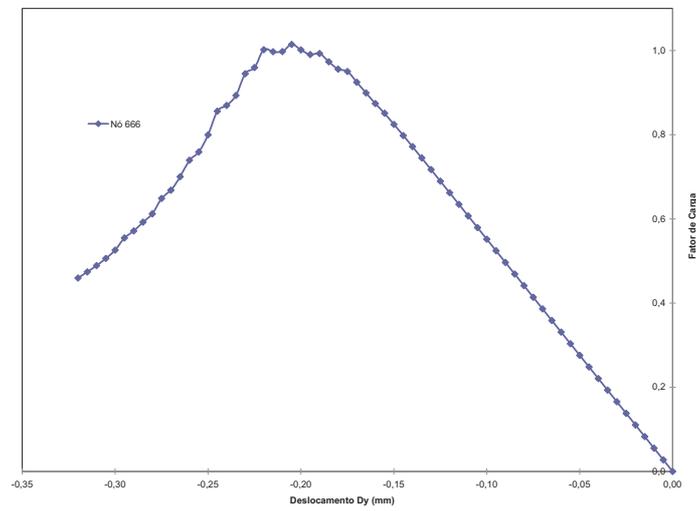


Figura 17: Relação Fator de Carga \times Deslocamento Dy para a Malha IV.

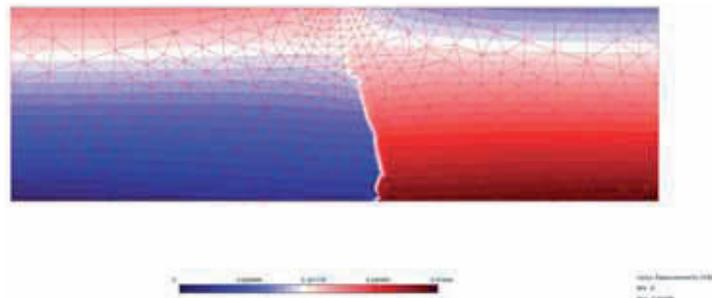


Figura 18: Deslocamentos na direção x para a Malha IV.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, um modelo para descrever a fissuração do concreto foi implementado no núcleo numérico do *INSANE*. O modelo físico baseou-se no conceito de fissura coesiva, e o modelo numérico conjuga este modelo físico com o Método dos Elementos Finitos Estendido, XFEM. O núcleo numérico do *INSANE* foi ajustado para permitir a inclusão de graus de liberdade adicionais aos nós de um elemento finito padrão. Assim, o *INSANE* passou a ter uma ferramenta adicional, que permitiu a aproximação numérica de problemas físicos caracterizados por acentuadas não regularidades em pequenas regiões, como é o caso das descontinuidades e singularidades inseridas em um meio contínuo.

O elemento finito triangular de 6 nós, já existente no código do *INSANE*, foi preparado para ser capaz de receber uma fissura coesiva. Assim, quando uma fissura atravessa um elemento finito padrão, seus nós são enriquecidos, recebendo graus de liberdade adicionais. Estes são usados para descrever os deslocamentos relativos das faces da fissura e, devido ao seu caráter nodal, permitem que uma descontinuidade seja inserida no campo de deslocamentos do elemento.

Os recursos implementados permitem uma aproximação com precisão razoável da resposta de fissuração do concreto, sendo capaz de modelar fissuras discretas que atravessam a malha de forma independente de sua geometria e topologia. A geometria da fissura, formada por segmentos lineares, permite a propagação de fissuras curvas ou retilíneas. Além disso, resultados satisfatórios são alcançados mesmo com o uso de malhas grosseiras.

Os resultados numéricos permitem concluir que o modelo aqui implementado apresenta características superiores em relação aos modelos de elementos de interface e fissuras distribuídas na representação numérica da fissuração do concreto, uma vez que a propagação não se limita às interfaces dos elementos, e o método não apresenta dependência de malha. Seu uso é apropriado para a descrição de microfissuras e, embora aqui tenha sido implementado de forma a permitir que apenas uma única fissura atravessasse um elemento, nada impede que seja usado para descrever múltiplas fissuras no material estudado (Budy et al., 2004).

Uma ressalva deve ser feita, porém, com respeito ao critério usado neste trabalho para o cálculo da direção de propagação da fissura. Tal critério baseia-se na média ponderada das tensões de pontos localizados nas proximidades da ponta da fissura e mostrou-se pouco confiável na correta predição da propagação em regiões com altos gradientes de tensão.

O Método dos Elementos Finitos Estendido tem sido alvo de muita pesquisa e desenvolvimento nos últimos anos. Vários avanços têm acontecido, e novas aplicações têm sido apresentadas com o uso do XFEM. Atualmente, o campo mais maduro de aplicação do XFEM é o de modelagem de fissuras estacionárias e sujeitas à propagação (Belytschko et al., 2009). Porém, devido ao aprimoramento da capacidade trazido ao Método dos Elementos Finitos pelo XFEM, a expectativa é de que ainda muitas aplicações do XFEM sejam feitas em problemas de interesse da Mecânica dos Materiais.

Algumas das aplicações que têm sido apresentadas com o uso do XFEM podem ser vistas na revisão feita por Yazid et al. (2009). Assim, o XFEM tem sido usado na análise de interface entre materiais, na descrição de fissuras coesivas, no estudo de superfícies sujeitas a fricção e na propagação dinâmica de fissuras, só para citar algumas aplicações.

Além disso, o XFEM pode ser usado junto com o Método de Conjunto de Níveis ou Planos (Level Set Method), para a descrição da geometria de interfaces ou descontinuidades complexas (ver Sukumar et al. (2001) e Bordas e Moran (2006)). Essa é uma técnica numérica que evita a parametrização de entidades geométricas, como superfícies ou curvas, em uma malha carte-

siana. Adicionalmente, ela permite a modelagem simplificada do movimento das superfícies de interface.

Portanto, de forma geral, muito há para se pesquisar, aperfeiçoar e aplicar no uso do XFEM para a aproximação de problemas físicos da Engenharia. Em resumo, o método aqui implementado para a descrição do processo de fissuração do concreto, apesar de já ter apresentado resultados satisfatórios, tem muito ainda para ser aperfeiçoado e ampliado. Além do mais, fora do escopo do estudo da propagação de fissuras no concreto, há um amplo conjunto de aplicações na Mecânica dos Materiais que está aberto pelo XFEM.

REFERÊNCIAS

- Belytschko T., Gracie R., e Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4):24, 2009.
- Bordas S. e Moran B. Enriched finite elements and level sets for damage tolerance assessment of complex structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 73:1176–1201, 2006.
- Bordas S., Nguyen P.V., Dunant C., Nguyen-Dang H., e Guidoum A. An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:1–33, 2006.
- Budyn E., Zi G., Moës N., e Belytschko T. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:1741–1770, 2004.
- Dumstorff P. e Meschke G. Crack propagation criteria in the framework of x-fem-based structural analyses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:239–259, 2007.
- Hillerborg A., Modeer M., e Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–782, 1976. (citado em Shah et al., 1995; RILEM, 1989).
- Melenk J.M. e Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, 1996.
- Meschke G., Dumstorff P., Fleming W., e Jox S. Computational failure analysis of concrete structures using the extended finite element method. In *Neue Bauweisen - Trends in Statik und Dynamik*, páginas 395–408. TU Dresden, 2006.
- Pitangueira R.L., Fonseca F.T., Fuina J.S., Camara L., Ferreira R.L., Moreira R.N., Penna S.S., Saliba S.S., e Fonsca M.T. Insane - versão 2.0. In U.F. de Alagoas, editor, *XXVII Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, páginas 1–20. Maceió, 2008.
- Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., e Belytschko T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190:6183–6200, 2001.
- Wells G.N. e Sluys L.J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2667–2682, 2001.
- Wolff K.P. *Implementação Computacional de um Modelo de Fissuração para o Concreto baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)*. Tesis de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2010.
- Yazid A., Abdelkader N., e Abdelmadjid H. A state-of-the-art review of the x-fem for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12):4269–4282, 2009.