

## UN ALGORITMO DE RETORNO RADIAL MODIFICADO PARA ELASTOPLASTICIDAD USANDO ELEMENTOS CUADRILATEROS CON INTEGRACION EN LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS

José M. Pereiras<sup>a</sup>, Claudio Jouglard<sup>b</sup> y Mayra Chavez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, <http://www.frgp.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, <http://www.frba.utn.edu.ar>*

**Keywords:** Plasticidad, Elementos Finitos, Retorno Radial.

**Resumen.** Se presenta una variante del algoritmo de retorno radial para integración de las ecuaciones de elastoplasticidad usando elementos cuadriláteros bilineales con esquemas de integración numérica con puntos en los medios de los lados. Estos puntos de integración en principio son utilizados para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento, produciendo una economía en la cantidad de evaluaciones en comparación con las necesarias con los esquemas tradicionales de integración gaussiana.

En este trabajo se introduce además el uso de estos puntos en el algoritmo de plasticidad. Debido a que estos puntos se encuentran en los lados del elemento es posible predecir los avances del frente de plasticidad con mayor precisión que usando los puntos internos de integración de Gauss. Además de la ventaja anterior, la utilización de estos puntos permite la predicción de las variables plásticas con gran precisión, pues utilizando información de los elementos vecinos al lado es posible obtener estimativas superconvergentes de las tensiones y deformaciones en dichos puntos. Por otro lado en los contornos del dominio es posible imponer directamente los valores de contorno en dichos puntos de integración.

## 1 INTRODUCCION

En este trabajo se presenta un algoritmo de retorno radial modificado aplicado a cuadriláteros con integración en los puntos medios de los lados. La necesidad de utilizar plasticidad en este tipo de elemento de alta eficiencia llevó a un nuevo planteo del algoritmo plástico de retorno radial para ser compatible con la formulación elemental. Este algoritmo plástico se utilizará bajo condiciones de deformaciones infinitesimales, las cuales involucran la mayoría de los fenómenos elastoplásticos como ser en metales (aceros, aluminio y otras aleaciones). A continuación se dará una introducción a la formulación elastoplástica clásica para pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales.

### 1.1 Relaciones constitutivas fenomenológicas

Las relaciones constitutivas fenomenológicas son modelos descriptivos del comportamiento de los materiales ajustables mediante ensayos de laboratorio. En los análisis de respuesta inelástica, básicamente se encuentran tres condiciones cinemáticas:

1. Pequeños desplazamientos / rotaciones y pequeñas deformaciones.
2. Grandes desplazamientos / rotaciones, pero pequeñas deformaciones.
3. Grandes desplazamientos / rotaciones y grandes deformaciones.

Para modelar el comportamiento elasto-plástico de metales, y en particular aceros, generalmente se utiliza la ley de fluencia de von Mises con plasticidad asociada (Hill, 1950), (Malvern, 1969), (Mendelson, 1968).

En el caso de deformaciones infinitesimales se recurre a modelos clásicos basados en la descomposición aditiva de la velocidad de deformación. En el caso de deformaciones finitas se recurre a modelos basados en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones (Lee et al., 1967), (Lee, 1969).

### 1.2 Deformaciones Infinitesimales

Usando la descomposición aditiva de diferenciales de deformación:

$$de_{ij} = de^E_{ij} + de^P_{ij} \quad (1)$$

El incremento de tensión esta dado por la siguiente relación

$$d\sigma_{ij} = C^E_{ijrs} (de_{rs} - de^P_{rs}) \quad (2)$$

Donde:

- $C^E_{ijrs}$ : componentes del tensor constitutivo elástico
- $de_{ij}$ : componentes del tensor incremento de deformación total
- $de^E_{ij}$ : componentes del tensor incremento de deformación elástica
- $de^P_{ij}$ : componentes del tensor incremento de deformación plástica

Para calcular las deformaciones plásticas, en el caso de metales, se utilizan tres leyes para caracterizar el comportamiento del material:

1. Condición de fluencia de von Mises.
2. Una ley de flujo plástico asociada usando la función de fluencia de von Mises, que relaciona el incremento de deformación plástica con las tensiones.
3. Una ley de endurecimiento, bilineal o multilínea, isótropo o cinemático, la cual especifica cómo es modificada la función de fluencia durante el flujo plástico.

### 1.3 Condición de fluencia de von Mises

Se define la tensión hidrostática en el instante de tiempo  $t$  como:

$${}^t\sigma_m = \frac{1}{3} {}^t\sigma_{kl} \delta_{kl} \quad (3)$$

donde  $\delta_{kl}$  es el delta de Kronecker:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (1 \leq k, l \leq 3) \quad (4)$$

Se pueden expresar las componentes del tensor de tensiones como:

$${}^t\sigma_{ij} = {}^tS_{ij} + {}^t\sigma_m \delta_{ij} \quad (5)$$

Siendo:

- $S_{ij}$ : componentes del tensor de tensiones desviadoras
- $\sigma_m \delta_{ij}$ : componentes del tensor de tensiones hidrostáticas

Despejando se obtiene la expresión de las componentes del tensor de tensiones desviadoras,

$${}^tS_{ij} = {}^t\sigma_{ij} - {}^t\sigma_m \delta_{ij} \quad (6)$$

Se define una función de fluencia  $f_y$ , en la cual los estados tensionales de inicio de plastificación son aquellos que verifican

$${}^t f_y = {}^t f_y ({}^t \sigma_{ij}, {}^t e^P_{ij}) = 0 \quad (7)$$

Para  ${}^t f_y < 0$  los puntos se encuentran en estado elástico. Aquellos puntos que se encuentran sobre la superficie de fluencia ( ${}^t f_y = 0$ ) indican flujo plástico.

La condición de fluencia de von Mises se escribe como:

$${}^t f_y = \frac{1}{2} ({}^t \underline{s} - {}^t \underline{\alpha}) : ({}^t \underline{s} - {}^t \underline{\alpha}) - \frac{1}{3} ({}^t \sigma_y)^2 = 0 \quad (8)$$

donde:

- ${}^t \underline{s}$  es el tensor de tensiones desviadoras al instante t
- ${}^t \underline{\alpha}$  representa el corrimiento del centro de la superficie de fluencia (“back stress tensor”) en el instante t
- ${}^l \underline{\sigma}$  tensión de fluencia en el instante de tiempo t=l

La deformación plástica efectiva se escribe como,

$${}^t e^{-P} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} d\underline{e}^P \cdot d\underline{e}^P} \quad (9)$$

donde  $d\underline{e}^P$  es el tensor de incrementos de deformación plástica diferencial y sus componentes quedan definidas por la ecuación de la ley de flujo plástico.

#### 1.4 Ley de flujo plástico

Para este tipo de materiales (metales) la ley de flujo plástico es asociada y por lo tanto (Hill, 1950), (Malvern, 1969), (Mendelson, 1968):

$$de_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial {}^t f_y}{\partial {}^t \sigma_{ij}} = d\lambda ({}^t s_{ij} - {}^t \alpha_{ij}) \quad (10)$$

Siendo  $d\lambda$  un parámetro plástico.

#### 1.5 Leyes de endurecimiento por deformación plástica

La función de fluencia para el caso de endurecimiento isótropo se reduce a,

$${}^t f_y = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{{}^t s}} : \underline{\underline{{}^t s}} \right) - \frac{1}{3} \left( {}^t \sigma_y \right)^2 = 0 \quad (11)$$

Esta última función de ley de fluencia define un cilindro en el espacio de las tensiones principales cuyo eje de simetría (línea hidrostática) forma un ángulo de  $45^\circ$  con cada uno de los ejes coordenados de las tensiones principales. En otras palabras, la superficie de fluencia de von Mises en el instante de tiempo  $t$  está representada por la superficie de un cilindro circular de radio  $R = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^t \sigma_y$ , cuyo eje de revolución coincide con la recta de estados de tensión hidrostática donde las tensiones principales son iguales entre sí.

Para el caso de ley de endurecimiento cinemático,

$${}^t f_y = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{{}^t s - {}^t \alpha}} \right) : \left( \underline{\underline{{}^t s - {}^t \alpha}} \right) - \frac{1}{3} \left( {}^0 \sigma_y \right)^2 = 0 \quad (12)$$

Hasta aquí se han presentado las ecuaciones que describen la plasticidad infinitesimal. Respecto al algoritmo, básicamente consiste en estimar las tensiones predictoras elásticas y corregirlas, en caso de ser necesario, para que cumplan con las condiciones de la superficie de fluencia. A continuación se muestra un esquema grafico del algoritmo,

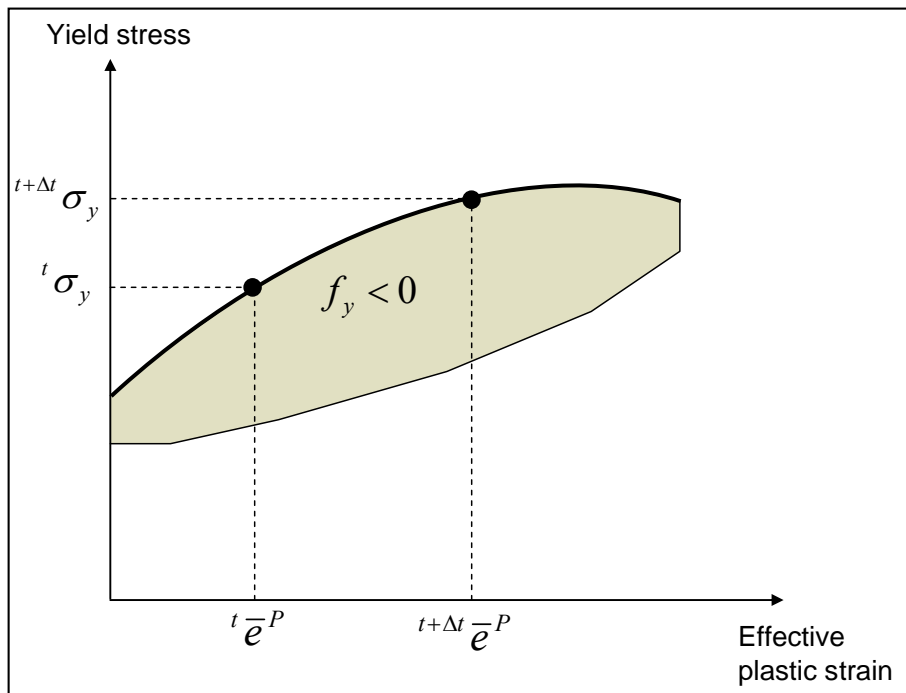


Figura 1: Curva de tensión de fluencia en función de la deformación plástica efectiva

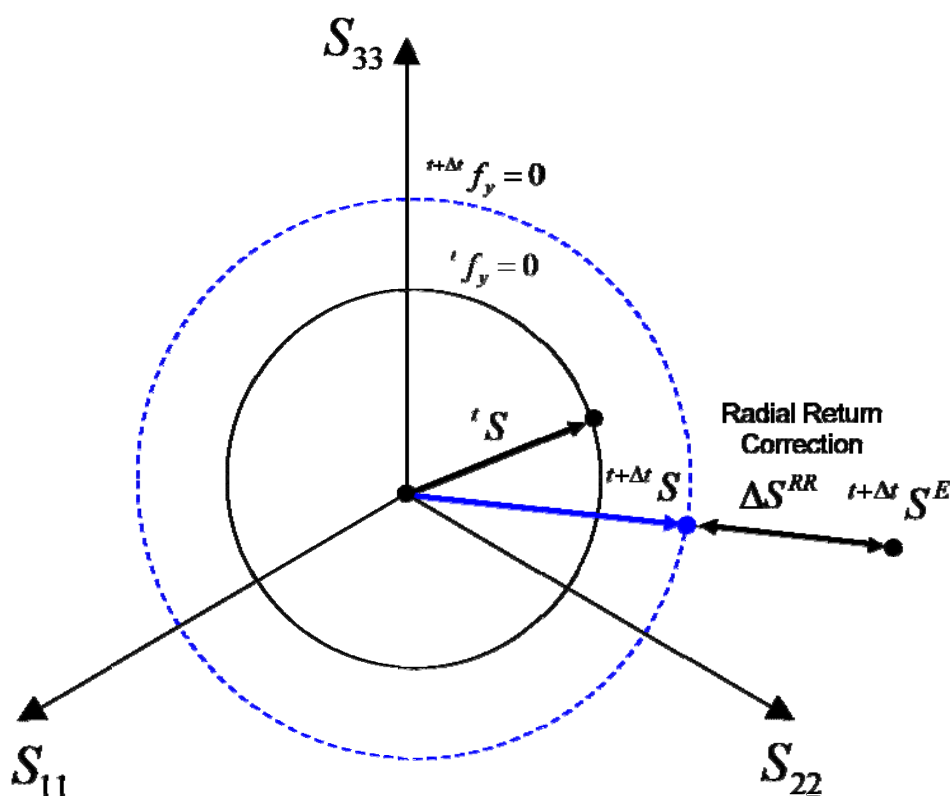


Figura 2: Esquema del algoritmo de retorno radial

El algoritmo de retorno radial clásico para cada uno de los puntos de integración de la matriz de rigidez elemental y del vector de fuerzas internas equivalentes puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Cálculo de las deformaciones totales
2. Cálculo de las tensiones predictoras elásticas
3. Cálculo de las tensiones desviadoras
4. Cálculo de los parámetros plásticos
5. Corrección de las tensiones (Retorno Radial)
6. Cálculo de las deformaciones plásticas
7. Cálculo de la matriz constitutiva elasto-plástica
8. Cálculo del aporte a la matriz de rigidez elemental
9. Adición del aporte a la matriz de rigidez elemental
10. Cálculo del aporte del vector de cargas internas equivalentes
11. Adición del aporte al vector de cargas internas equivalentes

## 2 ELEMENTO CUADRILATERO CON INTEGRACION EN LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS

El elemento cuadrilátero de 4 nodos con integración en los puntos medios de los lados (Pereiras and Jouglard, 2010) se esquematiza en la siguiente figura,

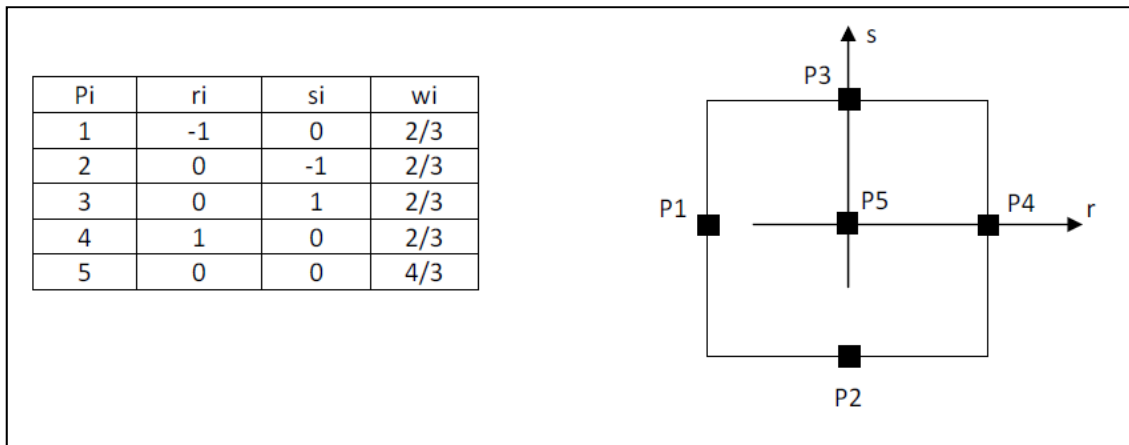


Figura 3: Elemento cuadrilátero de integración en los lados

Este elemento se caracteriza por poseer los puntos de integración en los puntos medios de los lados. Los pesos de integración se muestran en la Figura 3.

Experimentos numéricos muestran que para algunas clases de problemas los desplazamientos nodales son más precisos que en otros puntos de la malla, pudiendo incluso ser exactos. Esta propiedad suele designarse como *superconvergencia* nodal de los desplazamientos (Barlow, 1976). Usando expansiones en series de Taylor es posible encontrar puntos de superconvergencia para las tensiones en el interior ó en los contornos del elemento (Barlow, 1976), (Mackinnon et al., 1989)). Luego es posible obtener un campo superconvergente de tensiones mediante una interpolación de los valores en los puntos de superconvergencia.

En particular para elementos lineales las derivadas promediadas en los puntos medios de los lados a partir de los valores centroidales en los elementos adyacentes a ese lado son superconvergentes (Carey et al., 1985).

### 3 ALGORITMO DE RETORNO RADIAL MODIFICADO

Como ya se ha sugerido anteriormente, el algoritmo de retorno radial modificado tiene como objetivo la implementación de un algoritmo de plasticidad al elemento de integración en los puntos medios de los lados.

Debido a que el elemento empleado tiene un punto central y 4 en los puntos medios de los lados, que a su vez son compartidos con los elementos vecinos, la aplicación del algoritmo de retorno radial varía según el tipo de punto de integración, a saber:

- En caso del punto central se utilizará el algoritmo clásico.
- En caso de los puntos medios de lado se utilizara el algoritmo modificado.

Básicamente el algoritmo modificado se basa en la forma de calcular las deformaciones en dicho punto. A continuación se muestra el cálculo del tensor de deformación en el punto,

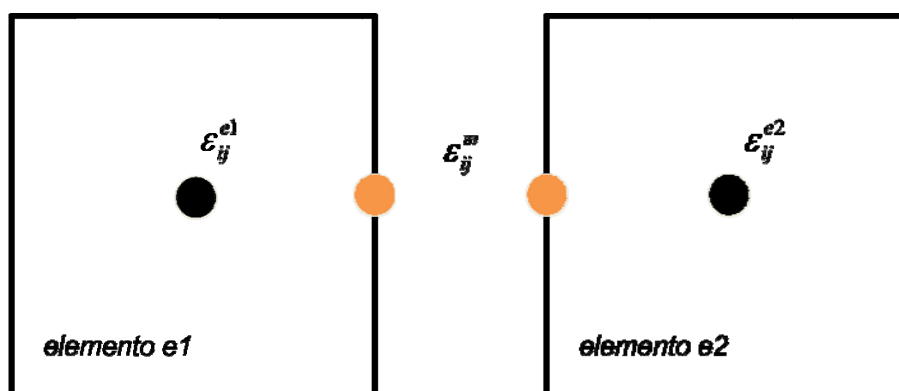


Figura 4: Cálculo de las deformaciones en el punto medio del lado

$$\varepsilon_{ij}^m = \frac{\varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{e2}}{2} \quad (13)$$

La ecuación anterior muestra que el tensor de deformaciones en el punto medio del lado se obtiene como el promedio de las deformaciones evaluadas en el centro de cada elemento adyacente al lado.

Como se mencionó previamente estos valores promediados son superconvergentes en estos puntos, por lo tanto es posible esperar una buena aproximación de las deformaciones mediante la interpolación de estos valores.

Una vez obtenidas las deformaciones se procede con los pasos 2 al 11 del procedimiento descrito anteriormente. Debe notarse que este punto compartido por sus dos elementos vecinos va a acumular sus correspondientes parámetros plásticos a lo largo de todo el proceso de carga.

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un algoritmo de retorno radial modificado aplicado a elementos cuadriláteros con puntos de integración en los medios de los lados.

Las ventajas de utilizar un elemento de este tipo son que se obtiene una mejor predicción del campo de deformaciones y por ende del avance del frente plástico.

#### REFERENCIAS

- Barlow, J., *Optimal Stress Locations in Finite Element Models*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 10, 1976, págs. 243-251.
- Carey, G. F., Chow, S. S. y Seager M. K., *Approximate boundary-flux calculations*, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 50, 1985, págs. 107-120.
- Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950.
- Lee, E.H. *Elastic plastic deformation at finite strain*, J Appl Mech, Vol.36, pp.1-6, 1969.
- Lee, E.H. and Liu, D.T., *Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis*, J Appl Phys Vol.38, pp.17-27, 1967.
- Mackinnon, R. J., y Carey, G. F., *Superconvergent Derivatives: A Taylor Series Analysis*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 28, 1989, págs. 489-509.
- Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.



- Mendelson, A., *Plasticity: Theory and application*, Macmillan Publishing Company, 1968.
- Pereiras J.M., Jouglaard C.E., *Comparisons of integration rules with midside points for quadrilaterals*, MECOM-CILAMCE 2010, XXXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Buenos Aires, 15-18 de Noviembre de 2010.