

## MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A FLUJO COMPRESIBLE CON GAS EN EQUILIBRIO

**Germán Weht, Juan P. Giovacchini, Carlos G. Sacco, Mario A. D'Errico**

*Dpto. Mec. Aer., Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico  
Av. Fuerza Aérea 6500 (X5010JMX) Córdoba, Argentina.  
e-mail: gweht@iua.edu.ar, página web: <http://www.iua.edu.ar>*

**Palabras clave:** Flujo compresible, Elementos Finitos, Equilibrio termoquímico.

**Resumen.** Se presenta un esquema explícito para simulación de flujos compresibles viscosos y no viscosos en dominios bidimensionales (2D) de fluidos newtonianos. El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se resuelve utilizando el método de los Elementos Finitos (MEF) para la discretización espacial. En cuanto a la discretización temporal se implementó un algoritmo basado en los métodos de Runge-Kutta que permite la elección del orden de precisión deseado. Para resolver los problemas de estabilidad de origen numérico se utilizó una variante de la formulación conocida como "Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin" (SUPG) de alto orden. Este método es acompañado por un término de captura de choque que provee estabilidad en las discontinuidades. El código fue validado resolviendo distintos problemas test que permitieron analizar la precisión de los resultados y la eficiencia del algoritmo. Además se muestran los resultados numéricos y desempeño computacional de varios ejemplos para flujos en régimen transónico, supersónico e hipersónico. En el caso de flujos hipersónicos se utilizan correlaciones termodinámicas de aire en equilibrio termoquímico.

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis en problemas de ingeniería que involucran la determinación del comportamiento del fluido en regímenes de flujo compresible abarca un amplio rango de aplicaciones, desde flujo interno en turbomáquinas hasta flujo externo en aplicaciones aeronáuticas o aeroespaciales en condiciones de vuelo transónica, supersónica e hipersónica. De los métodos utilizados en el análisis de problemas en flujo compresible, en las últimas décadas, con el crecimiento de la capacidad de cálculo de las computadoras, el método de elementos finitos se presenta como una alternativa interesante frente a los métodos tradicionales implementados con anterioridad. Entre las mayores ventajas, debido a su formulación puede notarse una versatilidad en aplicaciones a geometrías arbitrarias pudiendo imponer condiciones de borde sin problemas relevantes en casos generales.

El método de elementos finitos es ampliamente utilizado en problemas gobernados por sistemas de ecuaciones no lineales. Un problema importante dentro de este grupo, son las ecuaciones de la dinámica de fluidos utilizadas para modelar el movimiento de un flujo compresible viscoso, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) de la dinámica de los gases. De la naturaleza no lineal de las ecuaciones de NS se obtienen soluciones discontinuas caracterizadas por presencia de choques. Estas discontinuidades dan origen a inestabilidades numéricas creando oscilaciones en la solución, que en ocasiones provocan divergencia de la misma. Muchas formulaciones o métodos de estabilización se han propuesto desde los comienzos de la mecánica computacional con motivo de atenuar las oscilaciones y asegurar la convergencia a una solución que presente discontinuidades. Los primeros algoritmos de estabilización utilizados en el método de elementos finitos (aún utilizados en la actualidad), son en general extensiones de los métodos de estabilización desarrollados en diferencias finitas. La estabilización en problemas de flujos compresibles consta de dos términos, uno para estabilizar efectos de advección dominante, más un término de estabilización de discontinuidades o de choque.

En este trabajo se utiliza una técnica de estabilización SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) similar a la de alto orden presentada en (Soto, 2001). En este método se evalúa un parámetro de estabilización denominado tiempo intrínseco, el cual juega un rol fundamental en la estabilización.

El método de captura de discontinuidades que se utiliza, es un esquema similar al presentado por (Codina, 1993), donde se determina un parámetro escalar denominado “pressure switch” el cual se anula cuando no existe variación de la presión en el elemento, y toma valor unitario en zonas de discontinuidades.

La discretización temporal se realiza mediante un esquema de Runge-Kutta que de forma muy simple permite elegir el orden de la aproximación (Lohner, 2008).

A elevadas temperaturas el aire no puede ser considerado como gas ideal. Bajo estas condiciones la relación de calores específicos  $\gamma$  no es constante, por lo tanto la hipótesis de gas perfecto ya no es válida. Esta característica termodinámica refleja que las altas temperaturas pueden inducir la excitación de los modos vibracionales, la disociación y eventualmente la ionización de las especies químicas presentes en el gas, permitiendo que reacciones químicas tomen lugar dentro del fluido.

En estos casos, la hipótesis de equilibrio químico y termodinámico es adecuada para describir estos fenómenos, independientemente del proceso fluido dinámico, que hace que el gas adquiera la temperatura necesaria para producirlos. En una primera aproximación cuando el fluido de análisis sea aire, se implementa el modelo presentado por (Tannehill, 1974), debido al bajo costo computacional de este modelo. Con motivo de realizar un mejor ajuste de los valores obtenidos con el método anterior, se utiliza una subrutina basada en la minimización de la energía libre de Gibbs o energía libre de Helmholtz llamado CEA2 (Gordon, 1994) desarrollado por NASA Lewis Research Center, que analizan flujos con temperaturas suficientemente elevadas como para que tengan lugar los fenómenos físico-químicos.

## 2. ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Las ecuaciones de Navier Stokes de la dinámica de fluidos representan un sistema de leyes de conservación no lineal, expresando la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía definidos por

las siguientes ecuaciones expresadas en forma compacta como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{En } \Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es el dominio con contorno  $\Gamma$ , siendo  $U$  el vector de las variables de campo o variables conservativas,  $F_i$  es el vector de flujo advectivo y términos de presión y  $G_i$  el vector de flujo difusivo definidos de la siguiente manera:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{bmatrix}; F_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho H u_i \end{bmatrix}; G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ (\tau_{ij} \cdot u_j) + k \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{con } \tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

donde  $\rho, u, p, E$  y  $H = E + p/\rho$  son la densidad, velocidad, presión, energía total específica, y entalpía de estancamiento específica respectivamente. Considerando un gas ideal politrópico, se tiene la siguiente ecuación de estado, la cual brinda una relación adicional necesaria para que el sistema de ecuaciones quede determinado:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{|u|^2}{2} \right) \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos. Se adopta  $\gamma = 1,4$  para aire caloricamente perfecto.

Siguiendo la metodología de (Toro, 1999), expresado como un sistema en forma cuasi-lineal se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (4)$$

donde los  $A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U}$  se denominan Jacobianos advectivos y  $K_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial U}$  los Jacobianos difusivos. Para el caso bidimensional se presentan en forma desarrollada en las ecuaciones (9) a (10) siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - u_1^2 & (3 - \gamma) u_1 & -\bar{\gamma} u_2 & \bar{\gamma} \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ (\bar{\gamma} \|u\|^2 - \gamma E) u_1 & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - \bar{\gamma} u_1^2 & -\bar{\gamma} u_1 u_2 & \gamma u_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - u_2^2 & -\bar{\gamma} u_1 & (3 - \gamma) u_2 & \bar{\gamma} \\ (\bar{\gamma} \|u\|^2 - \gamma E) u_2 & -\bar{\gamma} u_1 u_2 & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - \bar{\gamma} u_2^2 & \gamma u_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

con  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ .

$$K_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} \mu u_1 & \frac{4}{3} \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu u_2 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \frac{k}{c_v} \left( \frac{1}{2} \|u\|^2 - i \right) - \mu \|u\|^2 - \frac{\mu}{3} u_1 u_1 & \left( \frac{\mu}{3} + \bar{\mu} \right) u_1 & \bar{\mu} u_2 & \frac{k}{c_v} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{3}u_2 & 0 & -\frac{2\mu}{3} & 0 \\ -\mu u_1 & \mu & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3}u_1u_2 & \mu u_2 & -\frac{2\mu}{3}u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$K_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu u_2 & 0 & \mu & 0 \\ \frac{2\mu}{3}u_1 - \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{3}u_2u_1 & -\frac{2\mu}{3}u_2 & \mu u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$K_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu u_1 & \mu & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\mu u_2 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ \frac{k}{C_v} \left( \frac{1}{2} \|u\|^2 - i \right) - \mu \|u\|^2 - \frac{\mu}{3}u_2u_2 & \bar{\mu}u_1 & \left( \frac{\mu}{3} + \bar{\mu} \right) u_2 & \frac{k}{C_v} \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde por simplicidad se introdujo  $\bar{\mu} = \mu - \frac{k}{C_v}$ , y además  $i = C_v T = e - \frac{1}{2} \Sigma u_j^2$ . Con  $i$  energía interna,  $C_v$  calor específico a volumen constante,  $k$  conductividad térmica y  $T$  la temperatura.

Luego, el problema queda definido adicionando a la ecuación (4) las condiciones iniciales y las condiciones de borde adecuadas al problema analizado. Considerando la ecuación (4) junto con el esquema de estabilización y captura de discontinuidades se discretiza el problema para obtener la formulación en elementos finitos en el dominio de análisis.

### 3. ESQUEMA DE ESTABILIZACIÓN Y CAPTURA DE DISCONTINUIDADES.

#### 3.1. Algoritmo de estabilización

Con motivo de estabilizar los términos convectivos en forma consistente (4), en los últimos años se han desarrollado numerosas técnicas. Una de las más utilizadas es la formulación SUPG propuesta inicialmente por (Tezduyar, 1982) con ampliación en (Tezduyar, 2004) y (Tezduyar, 2005), la cual garantiza que las oscilaciones espurias existentes en las zonas de elevados gradientes, oscilaciones intrínsecas del algoritmo numérico utilizado, no se propaguen a todo el dominio computacional. Básicamente, el método de SUPG consiste en adicionar un término a la ecuación (4) que contemple una contribución elemento a elemento dependiendo del residuo local de la ecuación diferencial. La idea de adicionar este término puede identificarse con la adición de viscosidad artificial para simular los efectos de la viscosidad física sobre la discontinuidad, atenuando su efecto en el resto del dominio de análisis donde los gradientes son despreciables.

En este trabajo se utiliza una formulación SUPG de alto orden basada en el trabajo presentado por (Soto, 2001) para flujo incompresible. En esta formulación, a los términos del SUPG, se le añade la proyección de los términos advectivos en el espacio de las funciones de forma de elemento finito. Finalmente la estabilización queda:

$$\tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) \quad (11)$$

donde  $\vartheta$  es un vector que surge de la formulación utilizada añadido al SUPG, mientras que  $\tau$  son los parámetros de estabilización denominados matriz de tiempo intrínseco y juegan un rol fundamental en la técnica de estabilización. Las expresiones que definen a  $\tau$  se obtienen de (Tezduyar, 2004, 2005, 1984).

### 3.2. Algoritmo de captura de discontinuidades

Como se mencionó en la sección anterior, el método SUPG es ampliamente utilizado debido que los resultados obtenidos son precisos y libre de oscilaciones en gran parte del dominio computacional, salvo en regiones donde se presentan discontinuidades, apareciendo oscilaciones espúreas (overshooting y undershooting) localizadas en las regiones cercanas a las mismas. Estas oscilaciones son de origen numérico, usualmente de pequeña magnitud pero inaceptables en muchas aplicaciones.

Los algoritmos de captura de discontinuidades son utilizados para disminuir las oscilaciones numéricas producidas en zonas cercanas a las discontinuidades en la solución, las cuales en ocasiones se dispersan en todo el dominio de análisis. La idea principal del tratamiento numérico de ondas de choque o discontinuidades, es la introducción de un término de viscosidad artificial adicional en las ecuaciones de conservación. Uno de los primeros métodos en utilizar técnicas de captura de discontinuidades en las ecuaciones de Euler, fue el método de presión pseudo-viscosa introducido en (Neumann, 1950).

El problema básico de todos estos métodos es encontrar la cantidad apropiada de difusión la cual provea las menores oscilaciones (difusión artificial no demasiado pequeña) con una precisión suficientemente elevada (difusión artificial no demasiado grande).

El término de captura de discontinuidades utilizado en este trabajo es similar al desarrollado en (Codina, 1993) donde se adiciona viscosidad de manera anisotrópica utilizando expresiones de los residuos. El término de captura de discontinuidades es:

$$\mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \quad (12)$$

donde  $\mu_a$  es un coeficiente de difusión artificial que debe elegirse de manera adecuada. Surgen diferentes formas de obtener este parámetro de una manera adecuada, tal que el efecto del término adicional de difusión solo tenga efecto en la zona de discontinuidades sin introducir perturbaciones en el resto del dominio de análisis. La expresión utilizada para determinar el término de viscosidad adicional es:

$$\mu_a = \alpha_\mu h (|u| + c) S_e I \quad (13)$$

donde  $\alpha_\mu$  es un coeficiente adimensional.  $S_e$  es un parámetro denominado “*pressure switch*”, el cual se obtiene de promediar sobre el elemento en cuestión los valores nodales  $S_i$  obtenidos de la siguiente ecuación:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|} \quad (14)$$

Puede verificarse de la ecuación anterior que  $S_i = 1$  cuando la presión tiene un máximo (o mínimo) local en el nodo  $n_i$ , y  $S_i = 0$  cuando la presión en el nodo es el promedio del valor de la presión en todos los nodos  $n_k$  adyacentes.

### 3.3. Cálculo de las propiedades de equilibrio termoquímico

En orden de obtener las propiedades termodinámicas de un gas a altas temperaturas en equilibrio termoquímico (Anderson, 1989) se utilizan dos métodos. El primero está basado en aproximaciones polinómicas de las propiedades termodinámicas de aire a altas temperaturas. Estas correlaciones fueron obtenidas por (Tannehill, 1974) y permiten obtener una rápida aproximación del campo fluido con un bajo costo computacional. El segundo método está basado en la subrutina desarrollada por NASA Lewis

Research Center llamada CEA2, la cual brinda información de las propiedades termodinámicas, de transporte, ionización, electrones libres, disociación de gases, etc. de las especies químicas presentes en el gas. Esta última es utilizada a través de una subrutina llamada SET (Subrutina de Equilibrio Termoquímico) generada por (Scarpin, 2006), Dicha subrutina sirve de interface de cálculo entre CEA2 y el código implementado.

En ambos casos (correlaciones o CEA2), la hipótesis de equilibrio químico y termodinámico es adecuada para describir estos fenómenos, independientemente del proceso fluido dinámico que hace que el gas adquiera la temperatura necesaria para producirlos.

En ambos casos la forma en que se calculan las incógnitas del campo fluido se especifican a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} \rho - \text{Densidad} \\ \mathbf{V} - \text{Velocidad} \\ e - \text{energía} \end{array} \right\} \text{ Variables obtenidas de la resolución simultanea de la ecuación de} \\ \text{continuidad, momento y energía}$$

$$\left. \begin{array}{l} T = T(\rho, e) \\ p = p(\rho, e) \end{array} \right\} \text{ Obtenidas de las propiedades termodinámicas de aire a altas temperaturas.}$$

De lo anterior notamos que dos propiedades termodinámicas ( $\rho, e$ ) son obtenidas de las ecuaciones de conservación (4), y las restantes propiedades termodinámicas pueden ser calculadas conociendo  $\rho$  y  $e$ . En general para aire en equilibrio, con solo dos propiedades termodinámicas podemos definir el estado termodinámico del gas.

En todos los cálculos que involucren equilibrio termoquímico presentados en este trabajo, primeramente se utilizaron las correlaciones de Tannehill y Mugge (Tannehill, 1974), por su eficiencia computacional y finalmente se hace uso de CEA2 (Gordon, 1994) para obtener la solución final.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

De las ecuaciones de la dinámica de fluidos en forma conservativa (4), considerando los términos asociados a la formulación de estabilidad (11) y captura de discontinuidades (12), se obtiene la siguiente ecuación resultado de la formulación adoptada:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) - \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (15)$$

Dada la ecuación (15) anterior, aplicando el método de residuos ponderados de Galerkin y debilitando la ecuación resultante, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N^T A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \tau A_i \left( A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \mu_a \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} K_{ij} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \quad (16)$$

donde,

$$\int_{\Omega} N^T \vartheta d\Omega = \int_{\Omega} N^T A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} d\Omega$$

las matrices  $\tau$ ,  $\mu_a$ ,  $A_i$  y  $K_{ij}$  son la matriz de estabilización advectiva, la matriz de términos de captura de choque, los términos advectivos y los términos difusivos respectivamente.  $N$  es una matriz conteniendo las funciones de forma adoptadas.

## 5. ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN TEMPORAL

De los métodos de discretización temporal en los esquemas explícitos depende la precisión y estabilidad de la solución del problema a resolver. Por tal motivo se llevó a cabo la implementación de diferentes métodos para evaluar su comportamiento. Trabajar con esquemas explícitos permite una elección arbitraria del orden de precisión temporal. Utilizando esta ventaja, se implementó el método de Euler explícito o forward Euler, y un método de Runge-Kutta propuesto en (Lohner, 2008), el cual permite variar el orden de aproximación adoptando los coeficientes de manera sistemática.

## 6. RESULTADOS

### 6.1. TUBO DE CHOQUE

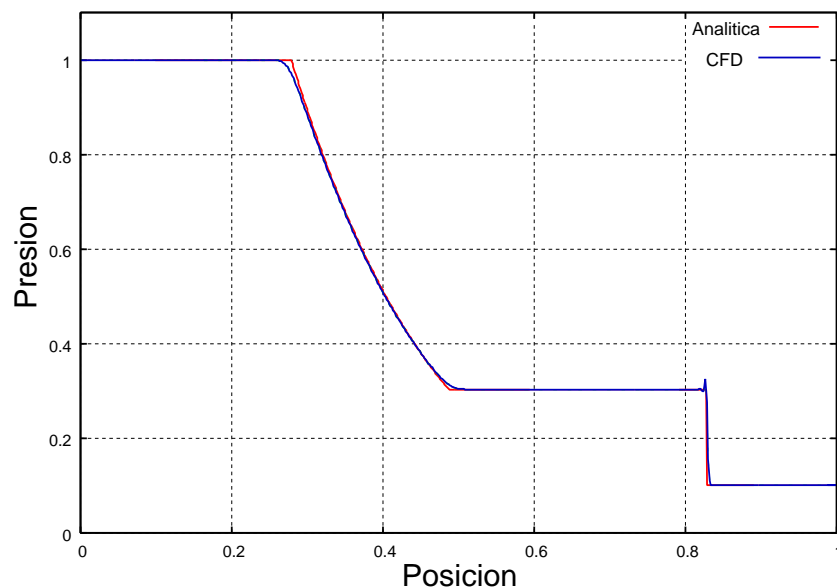
El problema del tubo de choque, un problema básico de Riemann es ampliamente utilizado para comparar resultados obtenidos mediante esquemas numéricos aplicados a problemas en mecánica de fluidos compresibles. Este problema, caracterizado por variaciones unidimensionales, presenta solución analítica. Un tubo de choque es básicamente un problema donde el dominio de análisis es dividido mediante una membrana ideal, que hace de interface entre parámetros físicos y/o químicos diferentes. La solución del problema consiste en determinar la evolución de las condiciones del fluido en el dominio de análisis al quitar la membrana permitiendo interacción entre ambas partes del dominio.

Las condiciones iniciales a izquierda y derecha de la discontinuidad se presentan en el cuadro (1):

$\rho_l$	$u_l$	$p_l$	$\rho_r$	$u_r$	$p_r$
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

Tabla 1: Condiciones iniciales de análisis a izquierda y derecha de la discontinuidad, “Sod test problem” (Toro, 1999).

La solución consiste en una expansión del lado izquierdo, una onda de choque a la derecha separadas por una discontinuidad de contacto. En el procedimiento de cálculo se realizaron 800 pasos de tiempo. Los resultados obtenidos se contrastan con la solución analítica en la figura (1).



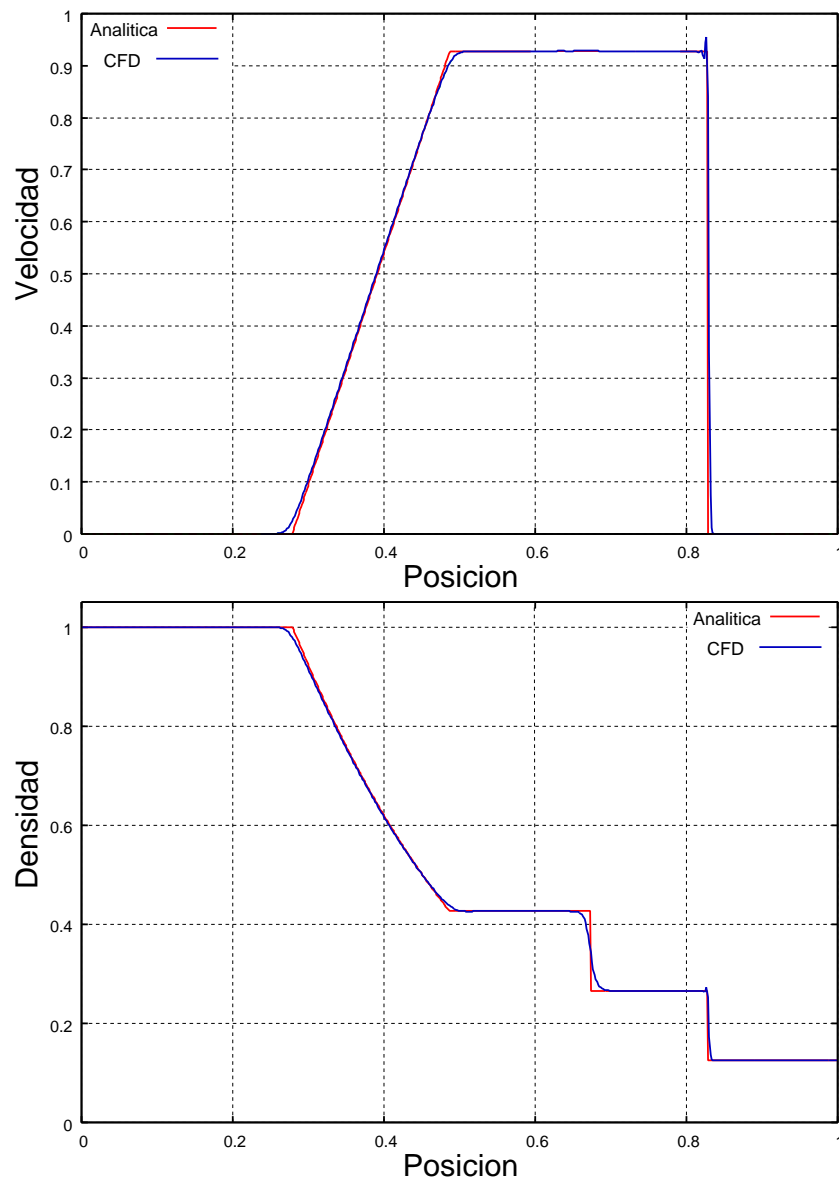


Figura 1: Comparación de resultados obtenidos con la solución analítica del problema de Riemann, condiciones iniciales presentadas en cuadro (1). Las gráficas muestran Presión, Velocidad y Densidad para 0,187 unidades de tiempo. Líneas de puntos corresponde a la solución analítica, líneas llenas es la solución con CFD.

Como se puede observar en las gráficas anteriores, los resultados obtenidos presentan una correlación aceptable respecto a la solución analítica, encontrando algunas incongruencias en las zonas donde ocurren discontinuidades. En estas zonas se observa undershoot y overshoot en el comportamiento de la solución. Esto se atribuye al algoritmo de captura de discontinuidades el cual no es suficiente para atenuar las oscilaciones en las zonas de choque.

## 6.2. FLUJO INVISCIDO SOBRE RAMPA DOBLE

El problema de la rampa doble (bidimensional), un caso de ondas de choque oblicuas, es de utilidad para comparar resultados, ya que el mismo tiene solución analítica. Este problema permite evaluar la interacción entre ondas de choque y la discontinuidad tangencial generada por la intersección de las mismas. Las condiciones iniciales de análisis en este caso corresponden a  $M_\infty = 3$ ,  $T_\infty = 288,3 K$ ,  $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$  aplicadas en la entrada del dominio, con condiciones de contorno como se especifican en la



figura (2). La geometría de la rampa doble se puede observar en la figura (2), donde la misma se compone de una rampa a 15° grados, y otra sucesiva a 30° respecto de la horizontal.

Se divide el dominio de análisis en tres zonas según se muestra en la figura (2), con motivo de presentar los resultados con mayor claridad. Los resultados obtenidos, comparados con la solución analítica se muestran en el cuadro (2) a continuación:

Zona	Solución	$M_1$	$\beta$ [°]	$P_2$ $\frac{Kg}{m^2}$	$T_2$ [K]	$\rho$ $\frac{Kg}{m^3}$	$M_2$
1	Analítica	3	32.25	2.858	400	2.49	2.25
	CFD	3	32.5	2.856	401	2.48	2.24
2	Analítica	2.25	40.42	6.621	517.2	4.46	1.67
	CFD	2.24	40.2	6.645	519.2	4.46	1.66
3	Analítica	3	52	6.439	578.5	3.88	1.41
	CFD	3	53.1	6.548	579.5	3.93	1.4

Tabla 2: Comparativa de resultados obtenidos con CFD y las soluciones analíticas del problema de la rampa doble.

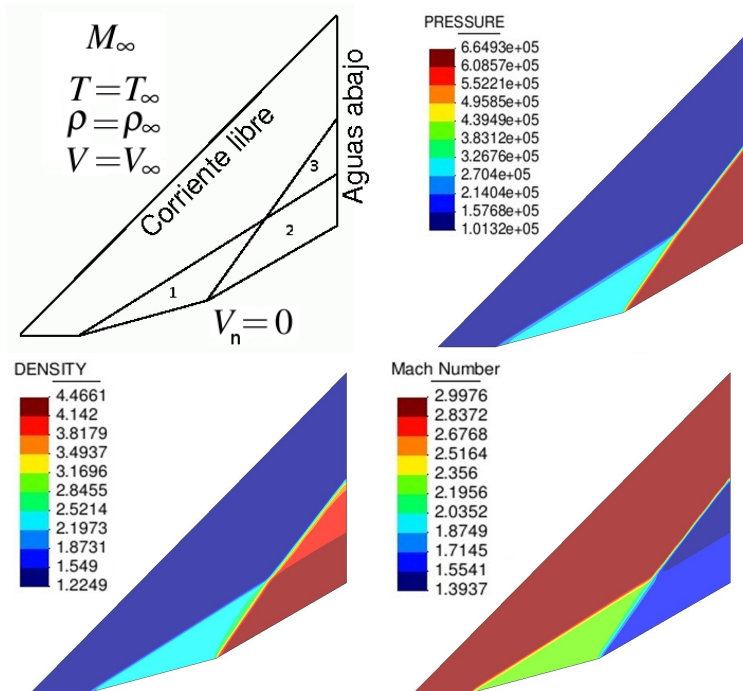


Figura 2: Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones iniciales  $M_\infty = 3$ ,  $T_\infty = 288,3 K$ ,  $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$ , se muestran valores de densidad, presión y número de Mach en el dominio de análisis. El esquema superior izquierdo numera las zonas a las que se hace referencia en la tabla (2).

Se puede observar de la figura (2) que las gráficas que muestran distribución de densidad y número de Mach en el dominio presentan una línea de discontinuidad entre las zonas 2 y 3; esta discontinuidad, denominada de contacto, presenta una discontinuidad de velocidad tangencial, densidad y número de Mach, y en consecuencia de la temperatura, respecto al límite que divide las dos zonas consideradas.

### 6.3. FLUJO INVISCIDO SOBRE CUÑA HIPERSÓNICA

En este caso se analizará la influencia de la alta velocidad en el flujo sobre cuñas. La solución del flujo sobre cuñas es exactamente la solución del flujo a través de una onda de choque oblicua. Se sabe que para un valor dado de ángulo de cuña  $\delta$  pueden existir teóricamente dos ángulos de onda  $\beta$  correspondientes a una de onda de choque fuerte ( $\beta$  relativamente grande) o a una onda de choque débil ( $\beta$  relativamente pequeño). Para el caso de cuñas moviéndose en vuelo atmosférico, la única solución posible es la onda de choque débil. Mediante las ecuaciones de conservación en 1 dimensión es posible encontrar, usando métodos iterativos, la solución analítica para aire calórico perfecto ( $\gamma = \text{cte}$ ) y en equilibrio.

Se presentan una comparación de los resultados obtenidos para aire calórico perfecto y en equilibrio, entre las ecuaciones de conservación 1D y el esquema en elementos finitos implementado.

Las condiciones de corriente libre son:  $\rho_\infty = 0,0039 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ ,  $T_\infty = 251,1 [K]$  y  $V_\infty = 10 \left[ \frac{Km}{S} \right]$  para una cuña de inclinación  $\delta = 40^\circ$ . Las condiciones de borde impuestas son:  $\rho = \rho_\infty$ ,  $V = V_\infty$ ,  $T = T_\infty$  a la entrada del dominio, velocidad normal nula ( $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ) sobre la base y aguas abajo las condiciones se dejan libres.

El número de Courant utilizado en este problema fue  $CFL = 0.1$

Descripción	Relación	Sol. Analítica $\gamma = 1,4$ cte.	Sol. Exacta Gas en Equilibrio	Sol. CFD Gas en Equilibrio
Ángulo de la onda	$\beta$	52.24	43.82	44.8
Relación de velocidades	$V_2/V_\infty$	0.62	0.72	0.72
Relación de presiones	$p_2/p_\infty$	722.5	619.9	595.4
Relación de densidades	$\rho_2/\rho_\infty$	5.95	14.38	13.3
Relación de temperatura	$T_2/T_\infty$	121.4	28.06	27.04
Relación de número de Mach	$M_2/M_\infty$	0.057	0.122	0.123

Tabla 3: Comparación entre los resultados obtenidos mediante la solución analítica y CFD para aire calórico perfecto ( $\gamma = 1.4 \text{ cte}$ ) y aire en equilibrio.

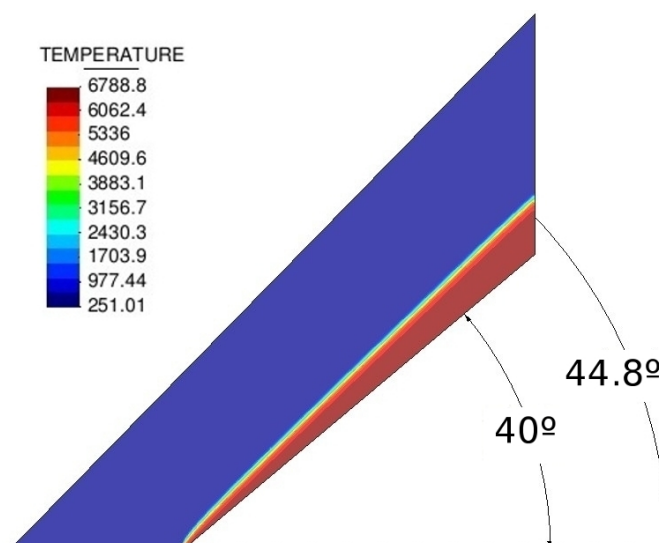


Figura 3: Contorno de temperatura obtenido mediante el esquema en elementos finitos (FEM) para aire en equilibrio termoquímico con condiciones iniciales:  $\rho_\infty = 0,0039 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ ,  $T_\infty = 251,1 [K]$  y  $V_\infty = 10 \left[ \frac{Km}{S} \right]$ .

De la tabla (3) observamos que los resultados obtenidos con el código implementado difieren en no más del 5% respecto a los calculados analíticamente. Esta diferencia se atribuye al exceso de difusión aportado por el término de captura de choque.

#### 6.4. BLUNT-BODY

Este ejemplo, tiene como propósito mostrar la aplicación a flujo hipersónico no viscoso del esquema en elementos finitos propuesto, con este problema ejemplo se evalúa un caso a elevados números de Mach pudiendo verificar el comportamiento del algoritmo de estabilización en estas condiciones.

La solución del flujo alrededor de un “blunt-body” mediante CFD permitirá cuantificar la gran diferencia que existe en considerar la hipótesis de gas ideal frente a la de gas en equilibrio.

Se presentan los resultados para aire calórico perfecto y aire en equilibrio. Las condiciones iniciales impuestas son:  $V = 10220 \frac{m}{s}$  ( $M_\infty = 36$ ),  $T_\infty = 200 K$ ,  $\rho_\infty = 0.08 \frac{kg}{m^3}$ . Las condiciones de contorno  $\rho = \rho_\infty$ ,  $V = V_\infty$ ,  $T = T_\infty$  a la entrada del dominio, velocidad normal nula ( $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ) sobre la base y el cuarto de círculo y libre la salida.

El CFL utilizado para este caso es  $CFL = 0.2$ .

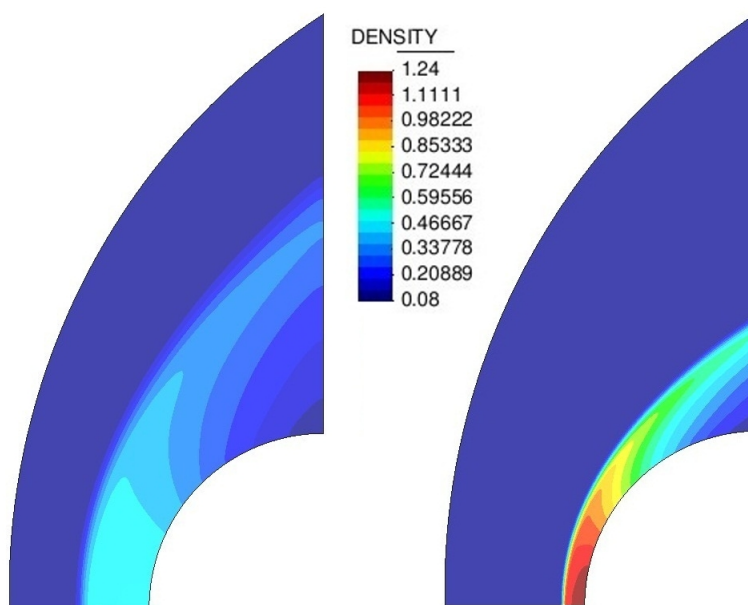


Figura 4: IZQUIERDA: aire calórico perfecto. DERECHA: aire en equilibrio termoquímico. Contorno de densidad.

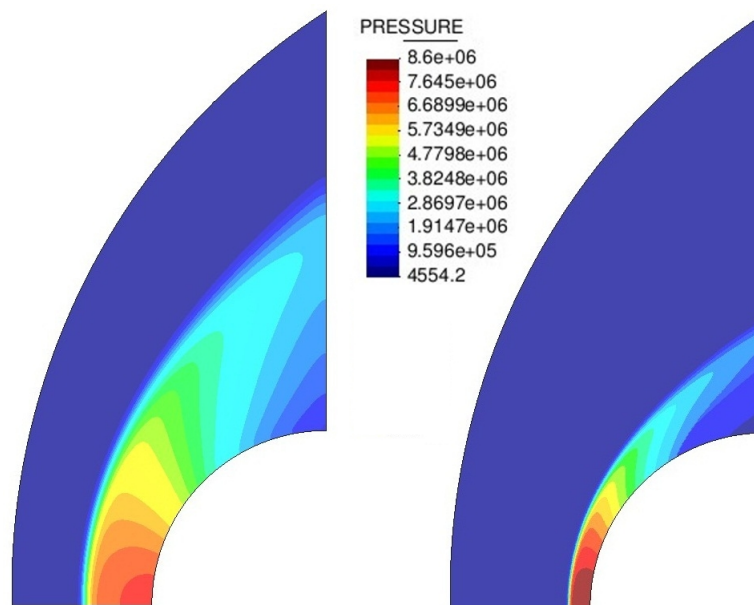


Figura 5: IZQUIERDA: aire calórico perfecto. DERECHA: aire en equilibrio termoquímico. Contorno de presión.

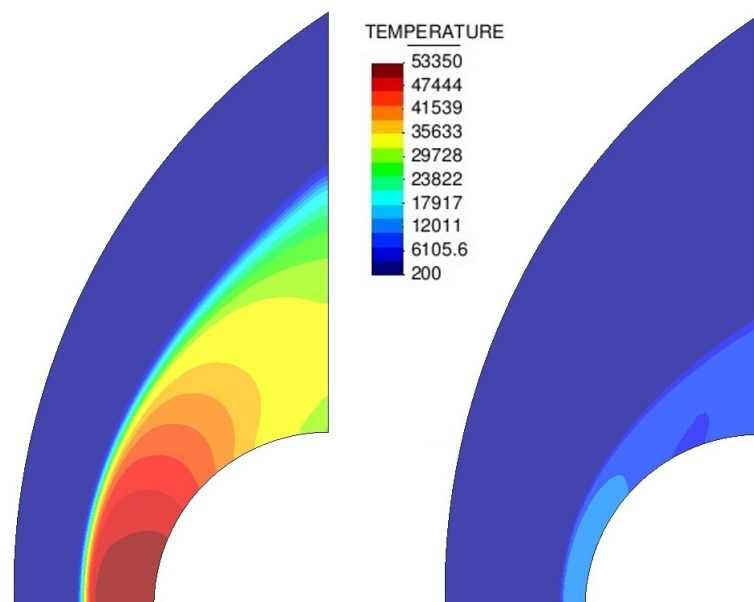


Figura 6: IZQUIERDA: aire calórico perfecto. DERECHA: aire en equilibrio termoquímico. Contorno de temperatura.

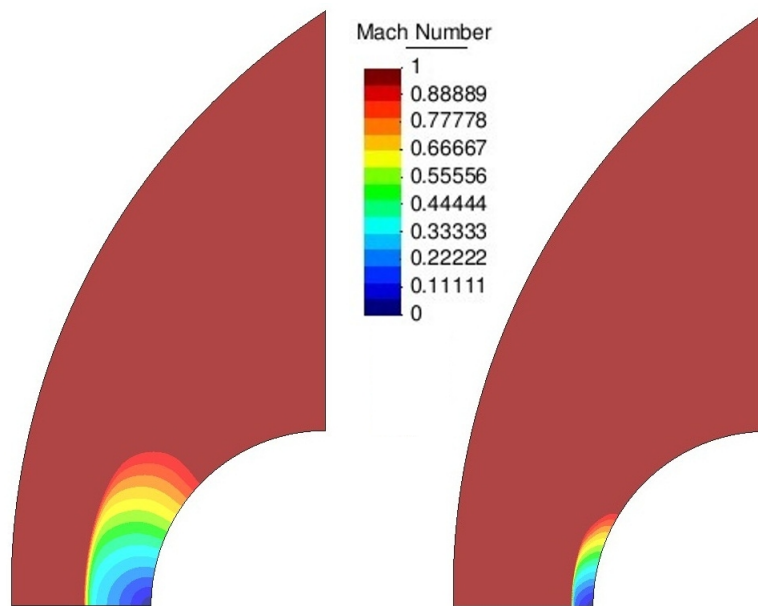


Figura 7: IZQUIERDA: aire calórico perfecto. DERECHA: aire en equilibrio termoquímico. Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones  $V_x = 10220 \frac{m}{s}$  ( $M_\infty = 36$ ),  $T_\infty = 200 K$ ,  $\rho_\infty = 0.08 \frac{kg}{m^3}$ . Detalle de la zona correspondiente a régimen de flujo subsónico ( $M \leq 1$ ).

Al comparar los resultados obtenidos para aire en equilibrio respecto de un gas ideal con  $\gamma = 1.4$ , se observa una gran disminución de la temperatura cerca del cuerpo debido a la energía consumida en la disociación e ionización del aire. Esto también produce un aumento de densidad lo que hace que la distancia entre la onda de choque y el cuerpo disminuya notablemente.

### 6.5. PERFIL NACA 0012 A $M=0.85$ .

El perfil NACA 0012 es uno de los perfiles más estudiados y analizados, ya sea en ensayos experimentales en túnel de viento así como en aplicaciones en problemas de mecánica computacional. Se realiza el análisis del perfil en flujo no viscoso a  $\alpha = 0^\circ$  de ángulo de ataque y a  $M_\infty = 0,85$ . Las condiciones de borde impuestas son:  $\rho = \rho_\infty$ ,  $V = V_\infty$  a la entrada del dominio, velocidad normal nula ( $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ) sobre el perfil y aguas abajo  $P = P_\infty$ . El caso se evaluó a un  $CFL = 0.9$ .

Se muestran en la figura (8) los resultados obtenidos de densidad, presión y número de Mach, también se muestra una gráfica del coeficiente de presiones sobre el perfil.

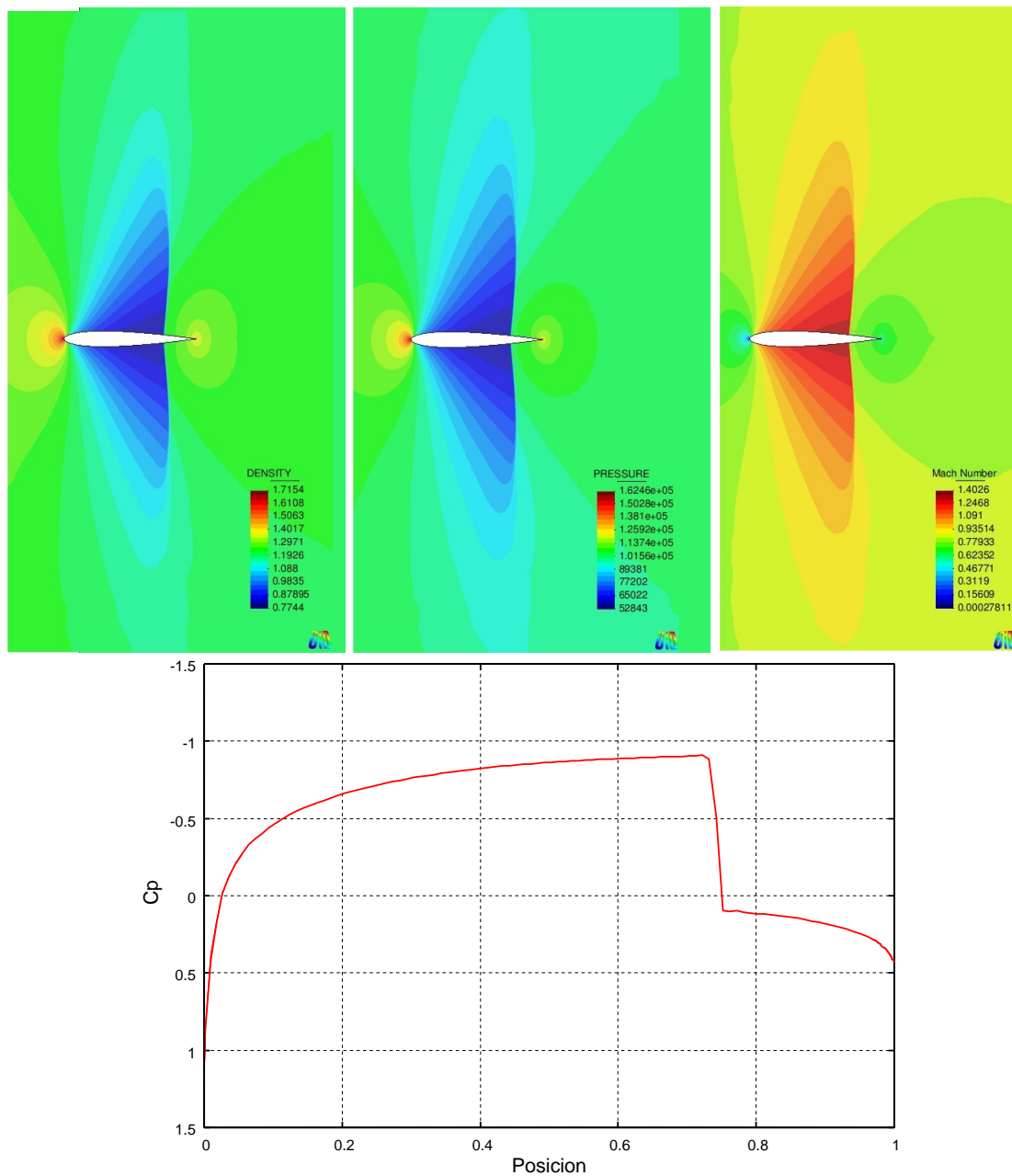


Figura 8: Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones  $M_\infty = 0,85$ . Se presentan distribución de densidad, presiones, número de Mach, y distribución de coeficientes de presiones sobre el perfil NACA 0012 a  $\alpha = 0^\circ$ .

### 6.6. FLUJO VISCOZO LAMINAR SOBRE PERFIL NACA0012 A $M=0.8$ , $\alpha = 10^\circ$ Y $RE=500$

Este caso corresponde al Test Case A2 propuesto en (Marcum, 1994). Es un caso donde encontramos flujo desprendido en la mayor parte del extrados.

Las condiciones de contorno impuestas son  $\rho = \rho_\infty$ ,  $V = V_\infty$  a la entrada,  $P = P_\infty$  a la salida y condición de pared sobre el perfil.

Se presenta el cálculo del coeficiente de fricción definido como  $\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho u^2}$  sobre la superficie del perfil.

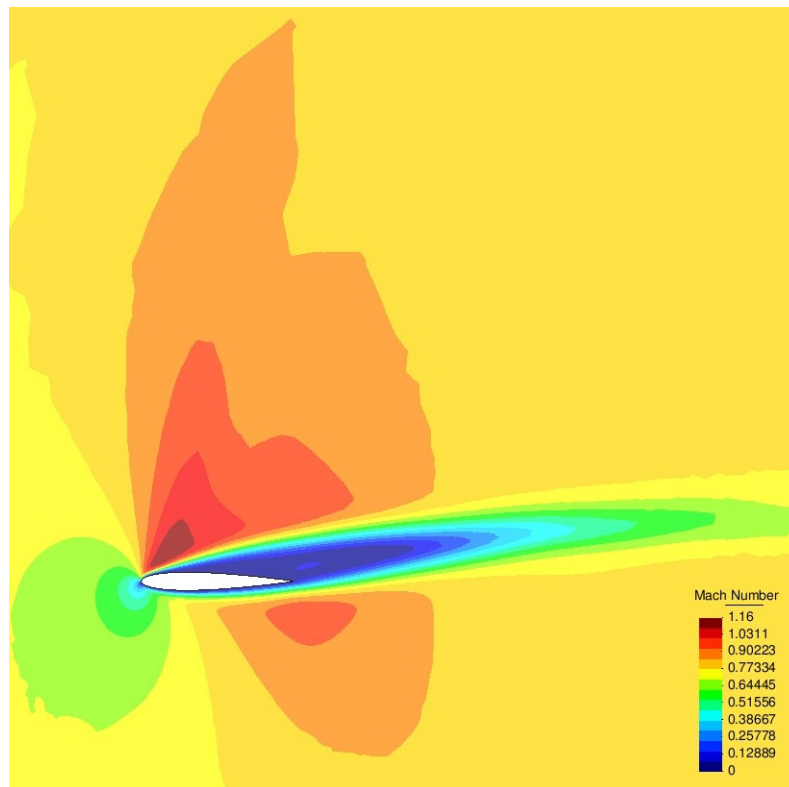
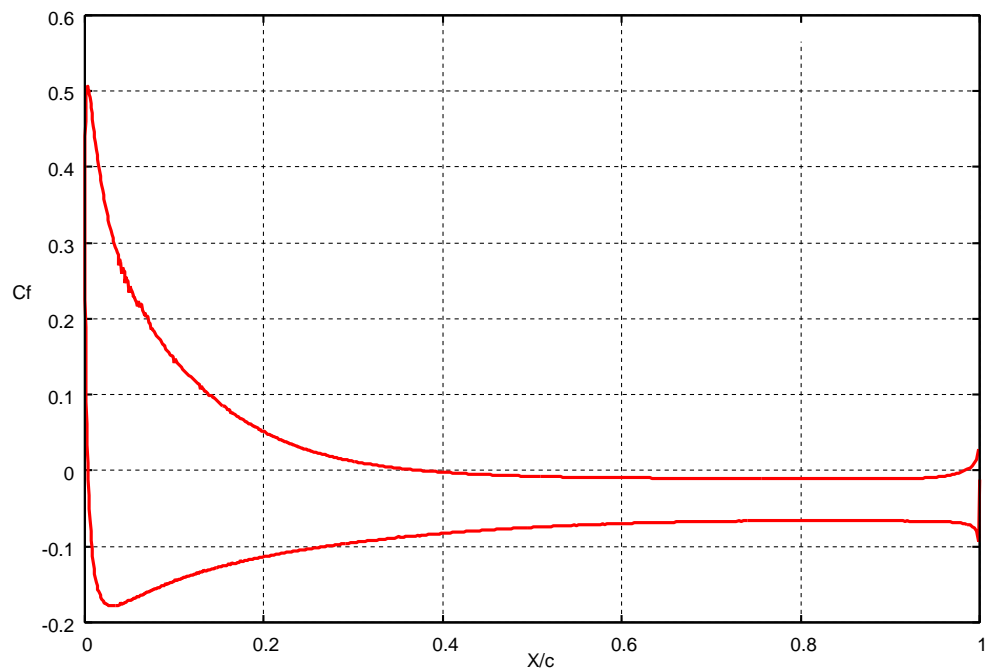


Figura 9: ARRIBA: Coeficiente de fricción del perfil NACA 0012. ABAJO: Contorno de número de Mach con condiciones iniciales  $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $Re = 500$ .

De la figura (9) se observa que el coeficiente de fricción calculado, se corresponde de forma aceptable al presentado en (Marcum, 1994).

## 7. CONCLUSIONES

Como puede apreciarse en la sección anterior, los resultados obtenidos utilizando el esquema en elementos finitos propuesto son aceptables respecto a los resultados de soluciones analíticas como lo son el caso del tubo de choque, la rampa doble y la cuña a alta velocidad involucrando altas temperaturas.

Respecto a la implementación de las rutinas de cálculo de las propiedades en equilibrio podemos decir que se ha logrado obtener un código en elementos finitos satisfactorio, para estimar flujos que involucren gases a altas temperaturas.

Entre las posibles mejoras futuras a implementar en el esquema, una de ellas es trabajar sobre el algoritmo de captura de discontinuidades; esto debido a que las soluciones obtenidas en las zonas donde ocurren discontinuidades presentan pequeñas oscilaciones o inestabilidades locales.

## 8. AGRADECIMIENTOS

Se agradecen los aportes del Ministerio de Defensa quién financia el proyecto “Desarrollo de un código de flujo compresible mediante el método de elementos finitos” en el marco de los proyectos de investigación y desarrollo para la defensa (PIDDEF).

## REFERENCIAS

- Anderson J.J. *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*. McGraw-Hill, 1989. ISBN 0-07-001671-2.
- Codina R. A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 110, 1993.
- Gordon S.y.M.B.J. Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. *NASA Reference Publication 1311*, 1-2, 1994.
- Lohner R. *Applied computational fluid dynamics techniques: An introduction based on finite element method*. John Wiley and Sons, 2008.
- Marcum D. Unstructured grid generation for viscous flow applications. *AIAA 33th Applied Aerodynamics Conference*, AIAA 95-0212, 1994.
- Neumann J. y Richtmyer R. A method for the numerical calculations of hydro-dynamical shocks. *Math. Phys.*, 21, 1950.
- Scarpin G.H. Cálculo de las propiedades de mezcla de gases en equilibrio termodinámico. *Msc. Dissertation*, Instituto Universitario Aeronáutico, 2006.
- Soto O. y Lohner R. A time-accurate implicit-monolithic finite element scheme for incompressible flow problems. *ECCOMAS*, 2001.
- Tannehill J.C. y Mugge P. Improved curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air suitable for numerical computation using time-dependent or shock- capturing methods. *NASA CR-2470*, 1974.
- Tezduyar T. E. y Masayoshi S. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195, 2005.
- Tezduyar T. E. y Hughes T. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 45, 1984.
- Tezduyar T.E. Determination of the stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *ECCOMAS*, 2004.
- Tezduyar T. E. y Hughes T.J.R. Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *NASA Tech. Rep. NASA-CR-204772*, 1982.
- Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 1999.