

COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE TENSIONES EN PROBETAS CON ESTRICCIÓN

Claudio Careglio^{a,b}, Carlos García Garino^{a,b} y Anibal Mirasso^a

^a*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Parque General San Martín, 5500 Mendoza, Argentina, ccareglio@uncu.edu.ar, cgarcia@itu.uncu.edu.ar, aemirasso@uncu.edu.ar*

^b*Instituto para las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (ITIC) - UNCuyo, 5500 Mendoza, Argentina*

Palabras Clave: Ensayo de Tracción Simple, Grandes Deformaciones Elastoplásticas, Distribuciones de tensiones y presión.

Resumen. El ensayo de tracción simple habitualmente es utilizado para caracterizar las ecuaciones constitutivas de los materiales. En un régimen de grandes deformaciones plásticas esta caracterización consiste primordialmente en obtener la ley del comportamiento del material expresada como una relación no lineal entre las deformaciones plásticas efectivas y la tensión de fluencia uniaxial.

En una primera fase, en la cual los valores de carga aplicada son tales que no se manifiesta el fenómeno de estricción, es suficiente con obtener el cambio de longitud de la probeta y la tensión axial promedio que se calcula dividiendo la carga por el área transversal de la probeta. Dicha tensión coincide con la tensión uniaxial de fluencia para el caso de deformaciones plásticas.

En una segunda fase, las dos tensiones anteriores no coinciden, ya que se produce la localización de las deformaciones dando lugar a la aparición del cuello y a un estado triaxial de tensiones en el mismo. Para determinar la tensión de fluencia uniaxial, a partir de la tensión axial promedio medida en el ensayo, es necesario aplicar un factor de corrección que permita tener en cuenta los marcados cambios del diámetro en la sección transversal mínima de la probeta. Los dos factores de corrección de tensiones más empleados son los debidos a Bridgman y a Davidenkov-Spiridonova. Sin embargo dichas expresiones analíticas se derivan mediante ciertas simplificaciones. En general se basan en la medición del radio de curvatura del cuello de la probeta durante la realización del ensayo, lo cual presenta dificultades prácticas.

En el presente trabajo, que es una extensión de publicaciones anteriores del grupo de trabajo de los autores, se simula numéricamente el ensayo de tracción para probetas cilindro circulares con presencia de estricción, empleando para ello elementos finitos triangulares de seis nodos.

En particular, se analizan las distribuciones numéricas de tensión axial media, tensión efectiva y componentes del tensor de tensiones, no sólo en la sección transversal mínima de la probeta sino también en zonas transversales relativamente alejadas de ella, asociadas a los valores de corte máximo y de presión máxima. Dichas distribuciones numéricas se comparan posteriormente con las analíticas de Bridgman y Davidenkov-Spiridonova.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los ensayos más empleados en la práctica para determinar las propiedades mecánicas características de los metales, como así también calibrar modelos numéricos de ecuaciones constitutivas en régimen de grandes deformaciones, es el ensayo de tracción simple.

Este ensayo tiene la ventaja de que es relativamente sencillo de realizar en el rango de cargas anteriores al de la carga máxima, ya que durante la ejecución del mismo es suficiente con medir el cambio de longitud en la probeta y el valor de la carga aplicada.

En el mencionado rango de cargas, el campo de tensión es uniaxial y homogéneo, y coincide por ende con el valor de la tensión efectiva (Malvern, 1969).

Luego, una vez alcanzada la carga máxima, se manifiesta el denominado fenómeno de estricción durante el cual se produce una localización de grandes deformaciones elastoplásticas en la zona central de la probeta. En el resto de la mencionada probeta se presentan deformaciones elásticas.

En esa etapa, el campo de tensiones se vuelve heterogéneo, la tensión axial ya no coincide con la efectiva; y es necesario medir adicionalmente el diámetro en la sección mínima de la probeta, lo que posibilita determinar el campo de deformaciones en el cuello y la tensión axial media.

A partir de esta última tensión es posible inferir mediante relaciones analíticas (Bridgman, 1944, 1945, 1952; Davidenkov y Spiridonova, 1946; Dietrich et al., 1970; Jones et al., 1979; Dowling, 1993; Gromada et al., 2004; Gromada, 2006; Gromada et al., 2007a,b, 2010) o mediante resultados provistos en forma numérica (Mirone, 2004; Garino et al., 2004; Celentano et al., 2005; Garino et al., 2006) la tensión de fluencia, la cual permite posteriormente caracterizar ecuaciones constitutivas en régimen de grandes deformaciones.

Dichas expresiones analíticas son aproximaciones, que se derivan mediante ciertas simplificaciones o se obtienen en forma empírica a partir de experimentos. Además, en general se basan en la medición durante la realización del ensayo del radio de curvatura en el cuello de la probeta, lo cual presenta ciertas dificultades prácticas.

En el enfoque de tipo analítico los trabajos que quizás más han influido en el estado del arte, referido a la distribución de deformaciones y tensiones en probetas cilíndricas de metal y con presencia de estricción, son los debidos a Bridgman (1944, 1945, 1952) en primer lugar, y a Davidenkov y Spiridonova (1946) en segundo lugar. En el enfoque de tipo numérico pueden, citarse entre otros, los trabajos de Chen (1971); Needleman (1972); Norris et al. (1978); Goicolea (1985); Alves y Jones (1999); Mirone (2004).

En la investigación aquí presentada, extensión de publicaciones anteriores del grupo de trabajo de los autores (Garino et al., 2004, 2006; Stainier et al., 2006), se analiza la respuesta de una probeta cilíndrica traccionada y con estricción.

Para ello, se aborda el problema mediante simulaciones numéricas empleando dos tipos de elementos finitos, como lo son el elemento triangular de seis nodos (Hughes, 1987) y el conocido cuadrilátero Q1/P0 (Nagtegaal et al., 1974). Luego, los resultados son comparados, cuando es posible, con las aproximaciones analíticas de Bridgman (1944, 1945, 1952) y Davidenkov y Spiridonova (1946).

En particular, aquí se obtienen y analizan las distribuciones de deformaciones plásticas efectivas, tensión efectiva, tensión axial media, componentes del tensor de tensiones y presión. Dichos análisis se llevan a cabo no sólo en la sección transversal mínima de la probeta, en donde son válidas las fórmulas analíticas, sino también en zonas transversales relativamente alejadas a ella, asociadas al cambio de curvatura en el perfil del cuello y a los valores mínimos de presión.

2. EXPRESIONES ANALÍTICAS

2.1. Distribuciones de tensiones

Desde un punto de vista analítico [Davidenkov y Spiridonova \(1946\)](#) intentan obtener una teoría de distribución de tensiones lo más simple posible, que permita obtener el tensor de tensiones completo en el cuello. Para ello en forma empírica proponen que el perfil del cuello en la dirección longitudinal de la probeta puede ser aproximado a partir de la expresión:

$$\rho = \frac{DR}{2r} \quad (1)$$

siendo ρ el radio de curvatura de la línea isoestática correspondiente, r la coordenada radial de la misma, D el diámetro de la sección transversal mínima y R el radio de curvatura del perfil del cuello.

Considerando que en la sección mínima del cuello la relación entre tensiones radiales σ_{rr} y la tensión de fluencia Y puede ser expresada como ([Kachanov, 2004](#)):

$$\frac{\sigma_{rr}}{Y} = \int_r^{\frac{D}{2}} \frac{dr}{\rho} \quad (2)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior la (1) e integrando, se obtiene que:

$$\frac{\sigma_{rr}}{Y} = \frac{D^2 - 4r^2}{4DR} \quad (3)$$

Luego, en base al estado de deformaciones presentes en el cuello ([Hill, 1998](#)) se tiene que $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, con lo que:

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{Y} = \frac{D^2 - 4r^2}{4DR} \quad (4)$$

Con respecto a la relación entre las tensiones axiales σ_{zz} e Y esta puede ser expresada en función de $\frac{\sigma_{rr}}{Y}$ como ([Garino et al., 2004](#)):

$$\frac{\sigma_{zz}}{Y} = 1 + \frac{\sigma_{rr}}{Y} \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la (5) se tiene que:

$$\frac{\sigma_{zz}}{Y} = 1 + \frac{D^2 - 4r^2}{4DR} \quad (6)$$

La tensión axial promedio $\bar{\sigma}_{zz}$, que es la que se obtiene de un ensayo de tracción a partir de la medición de la carga aplicada P y el área A en la sección mínima del cuello para el correspondiente estado de carga, puede ser deducida en forma analítica mediante la integración de σ_{zz} , con lo que para este caso se obtiene que ([Hill, 1998](#)):

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = 1 + \frac{D}{8R} \quad (7)$$

Cabe destacar que la última expresión es conocida como factor de corrección para las tensiones, y es esencial para caracterizar ecuaciones constitutivas en régimen de grandes deformaciones.

Una alternativa a la ecuación (1) es aproximar el radio de curvatura de la línea isoestática mediante un arco de círculo (Bridgman, 1944):

$$\rho = \frac{1}{2r} \left(\frac{D^2}{4} + DR - r^2 \right) \quad (8)$$

Luego, en forma análoga a como se hace para las expresiones de Davidenkov y Spiridonova (1946), pero empleando la ecuación (8), es posible obtener las relaciones $\frac{\sigma_{rr}}{Y}$, $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{Y}$, $\frac{\sigma_{zz}}{Y}$ y $\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y}$ siendo estas:

$$\frac{\sigma_{rr}}{Y} = \ln \left(1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{Y} = \ln \left(1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{Y} = 1 + \ln \left(1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = \left(1 + \frac{4R}{D} \right) \ln \left(1 + \frac{D}{4R} \right) \quad (12)$$

La ecuación (12) es conocida como “factor de corrección de Bridgman” para las tensiones.

Por último, dada la dificultad práctica para medir R durante la realización del ensayo de tracción, Bridgman (1952) propone la siguiente expresión, obtenida en forma experimental y válida para valores de $\varepsilon_{zz} > 0, 1$:

$$\frac{D}{R} = 2\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1} \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (9), (10), (11) y (12) se obtienen respectivamente las componentes del tensor de tensiones y $\bar{\sigma}_{zz}$ en la sección mínima del cuello:

$$\frac{\sigma_{rr}}{Y} = \ln \left[1 + \sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1} \left(\frac{1}{2} - 2\frac{r^2}{D^2} \right) \right] \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{Y} = \ln \left[1 + \sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1} \left(\frac{1}{2} - 2\frac{r^2}{D^2} \right) \right] \quad (15)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{Y} = 1 + \ln \left[1 + \sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1} \left(\frac{1}{2} - 2\frac{r^2}{D^2} \right) \right] \quad (16)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1}} \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0,1}}{2} \right) \quad (17)$$

2.2. Distribución de presión

Con el fin de profundizar en el estudio de las distribuciones de tensiones presentes en la probeta, y en base a ideas originalmente propuestas por Gabaldón (1999), se presenta aquí la relación entre la presión y la tensión de fluencia en la sección transversal mínima.

La presión puede ser definida como (Malvern, 1969):

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3} \quad (18)$$

Para el estado de tensiones presentes en el cuello (Bridgman, 1945), la presión en un punto del sólido puede ser expresada como:

$$p = \frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3} \quad (19)$$

Si se tiene en cuenta que el criterio de fluencia tipo $J2$ para metales en la sección del cuello se puede expresar como:

$$\sigma_z - \sigma_r = Y \quad (20)$$

Reemplazando luego la (20) en la (19) se tiene que:

$$p = \frac{1}{3} (3\sigma_z - 2Y) \quad (21a)$$

$$= \sigma_z - \frac{2}{3}Y \quad (21b)$$

y sustituyendo en esta última la (11) se tiene que para Bridgman la relación de presión y tensión de fluencia será:

$$\frac{p}{Y} = \frac{1}{3} + \ln \left(1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (22)$$

mientras que si se reemplaza (16) se obtiene:

$$\frac{p}{Y} = \frac{1}{3} + \ln \left[1 + \sqrt{\epsilon_z - 0,1} \left(\frac{D^2 - 4r^2}{2D^2} \right) \right] \quad (23)$$

Si en la lugar de reemplazar la (11) en la (21a) se sustituye la (6), se obtiene que la relación $\frac{p}{Y}$ para Davidenkov-Spiridonova será:

$$\frac{p}{Y} = \frac{1}{3} + \frac{D^2 - 4r^2}{4DR} \quad (24)$$

Cabe mencionar que, hasta el conocimiento de los autores de este trabajo, el uso de la expresión anterior no registra antecedentes en la literatura para analizar las distribuciones de presiones en la probeta.

3. MATERIAL Y MODELO NUMÉRICO DEL ENSAYO

El material empleado en las simulaciones aquí presentadas, para estudiar la distribución de tensiones asociadas al fenómeno de estricción en probetas cilindro circulares, es aluminio HE30; del cual existe amplia referencia en la literatura (Goicolea, 1985; Garino et al., 1996, 2004, 2006). Dicho material presenta un módulo de Young $E=67000$ MPa y de Poisson $\nu=0,3$;

mientras que su endurecimiento puede ser representado por una ley de endurecimiento de tipo potencia, la cual puede ser expresada como:

$$Y(\bar{\epsilon}^p) = A (b + \bar{\epsilon}^p)^n \quad (25)$$

siendo $\bar{\epsilon}^p$ la deformación plástica efectiva, mientras que A y n son constantes del material. El parámetro b se obtiene imponiendo a la ecuación (25) un límite elástico inicial $Y_0=50\text{MPa}$.

Respecto a las dimensiones de la probeta, ésta tiene una longitud de 75 mm y un diámetro para la geometría perfecta de 16,2 mm. Se modela sólo un cuarto de la misma al considerar condiciones de simetría axial y se impone una imperfección geométrica. Dicha imperfección permite localizar la estricción en la zona central y tiene forma de una variación lineal, con una reducción máxima del diámetro nominal de 1,8518 % en la sección media de la probeta.

Para llevar adelante las simulaciones numéricas se han empleado en primer lugar el elemento mixto de presión constante Q1/P0 (Nagtegaal et al., 1974) y en segundo lugar el elemento triangular de seis nodos T2 (Hughes, 1987). Las mallas empleadas para los dos tipos de elementos se muestran en la Figura 1, siendo las mismas de tipo estructurada y refinándose en ambos casos en la zona donde ocurre la estricción. En el caso de los triángulos se emplean 206 elementos y 465 nodos, mientras que para los cuadriláteros se utilizan 360 elementos y 412 nodos; con lo cual las mallas presentan un número similar de grados de libertad.

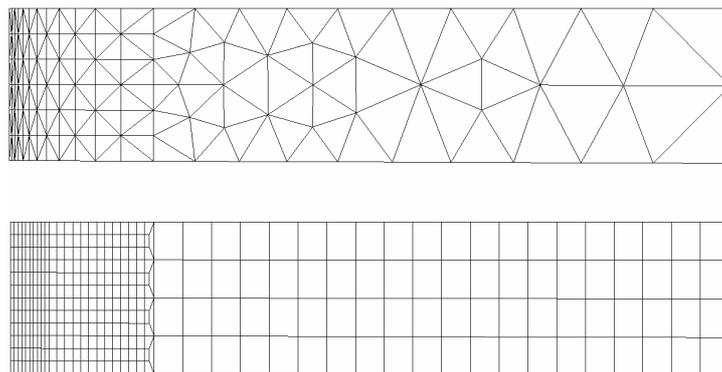


Figura 1: Mallas de elementos finitos.

Así mismo, para simular la tracción de la barra se imponen desplazamientos en el extremo libre de la misma y en dirección longitudinal hasta alcanzar un valor de 10mm.

Las simulaciones numéricas abordadas en el presente trabajo se han realizado empleando el código de elementos finitos SOGDE, el cual tiene capacidad de simular problemas elastoplásticos en presencia de grandes deformaciones para lo cual emplea una formulación constitutiva basada en hiperelasticidad y en cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación. El mencionado código fue desarrollado originalmente por Garino (1993) para su empleo con elementos cuadriláteros y ha sido extendido en un trabajo anterior (Stainier et al., 2006) para su uso con elementos triangulares de seis nodos.

4. COMPARACIÓN ENTRE ELEMENTOS T2 Y Q1/P0

Con el propósito de analizar la respuesta de la probeta sometida a tracción y con presencia de estricción, se analizan a continuación los resultados numéricos, mediante la utilización de contornos, para las dos tecnologías de elementos finitos empleadas.

4.1. Contornos de distribuciones de deformaciones, tensiones y presión:

En la Figura 2 se comparan los contornos de distribución de deformaciones plásticas efectivas. Los mencionados contornos se han representado en la configuración deformada para un desplazamiento impuesto de 10mm o una deformación ingenieril del 26,67 %, definida esta última como la relación entre la variación de la longitud total de la probeta Δl y la longitud inicial de la misma l_0 .

Puede apreciarse que los contornos son muy similares en los dos casos, aunque los valores máximos son ligeramente distintos. Dichos valores máximos se presentan en la zona central de la probeta, teniendo un valor de 1,6329 para los elementos triangulares y de 1,57 para los cuadriláteros, es decir aproximadamente un 4 % de diferencia.

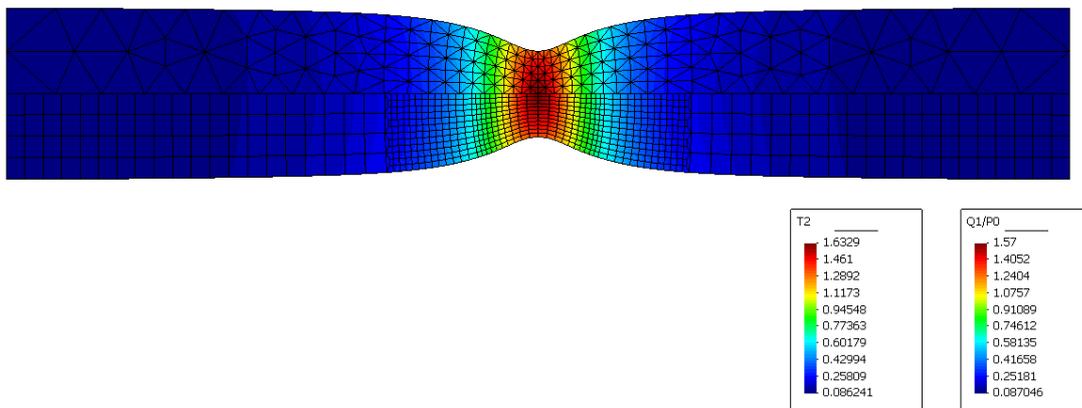


Figura 2: Contornos de deformación plástica efectiva para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

En la Figura 3 se comparan los contornos de distribución de tensiones efectivas con los dos tipos de elementos para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$. Al igual que ocurre en los contornos de deformación plástica efectiva los elementos triangulares alcanzan un valor máximo un poco superior que para los cuadriláteros. En particular, para el primer tipo de elemento se alcanza un valor de 196,44 y 195,22 respectivamente.

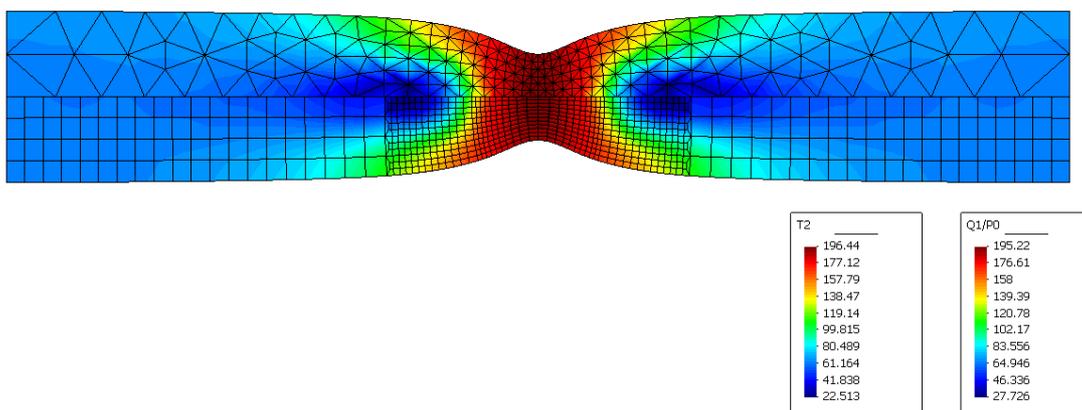


Figura 3: Contornos de tensión efectiva para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

En la Figura 4 se muestran en la mitad superior los contornos de distribuciones de tensio-

nes axiales correspondientes al uso de una malla con elementos triangulares, mientras que en la mitad inferior se observan los contornos asociados a la respuesta obtenida con elementos cuadriláteros. Para el caso de los cuadriláteros se presentan contornos más suaves, mientras que los triángulos muestran transiciones entre contornos más notorias, aunque en parte esto posiblemente se deba a un efecto de postprocesamiento.

Los valores máximos son muy similares entre ambas situaciones, alcanzando 328,45 para triángulos y 328,82 para cuadriláteros.

Es de destacar que para las dos mallas existen zonas en las que se presenta compresión, si bien la probeta está sometida a tracción, como fue señalado oportunamente por Norris et al. (1978) quién empleó elementos cuadriláteros. Las tensiones de compresión en Figura 4 presentan un valor máximo de -105,92 para los elementos triangulares y -79,229 para los cuadriláteros.

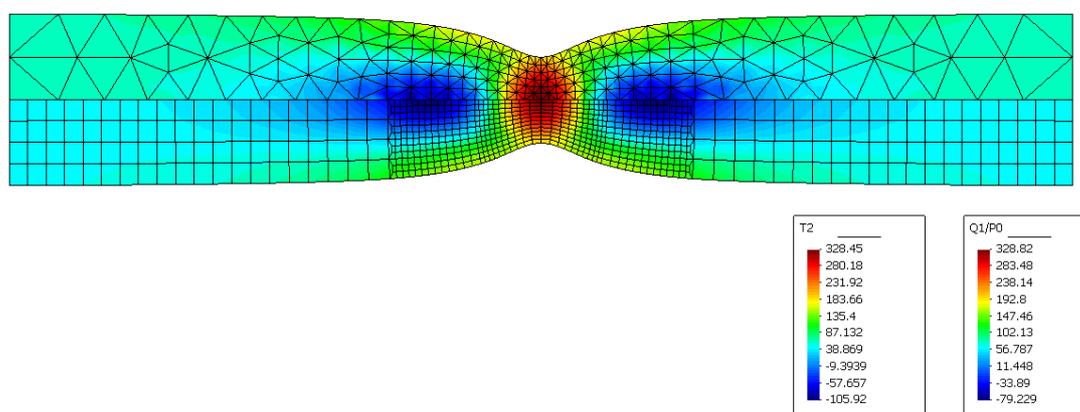


Figura 4: Contornos de tensión σ_{zz} para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

En forma similar a lo que ocurre con las tensiones axiales, los contornos de distribuciones de tensiones radiales presentan una transición entre contornos más suave para cuadriláteros que en triángulos, lo cual se muestra en la Figura 5. Para el elemento triangular el valor máximo de tensión radial es de 132,45, mientras que para el cuadrilátero alcanza a 133,59, es decir una diferencia de sólo el 0.85 %.

Al igual que en las tensiones axiales, se observa un núcleo de compresión cercano al eje axial de simetría de la probeta, presentando una transición hacia valores de tracción a medida que aumenta el radio. Los valores máximos alcanzados en la zona de compresión son de -155,44 y -127,45 para triángulos y cuadriláteros respectivamente.

En la Figura 6 se presentan los contornos de tensiones circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$ para el mismo nivel de carga que en los contornos anteriores. Si bien en términos generales las distribuciones de $\sigma_{\theta\theta}$, para ambas tecnologías de elementos finitos, son similares entre sí puede apreciarse en la malla de triángulos un área mayor del contorno correspondiente a 35,576MPa. Adicionalmente, y en forma similar a lo que ocurre para los contornos de σ_{rr} , puede observarse que si bien los valores máximos de tracción son similares para ambos tipos de elementos, existen diferencias para los valores máximos de tensiones de compresión.

Los resultados obtenidos para las distribuciones de tensiones de corte σ_{rz} se muestran en la Figura 7. En la misma se observa que los contornos con valores máximos de σ_{rz} se encuentran en zonas cercanas a la sección mínima del cuello. Resultados similares para otros metales pueden encontrarse en la literatura (Cabezas y Celentano, 2004; Celentano et al., 2004)

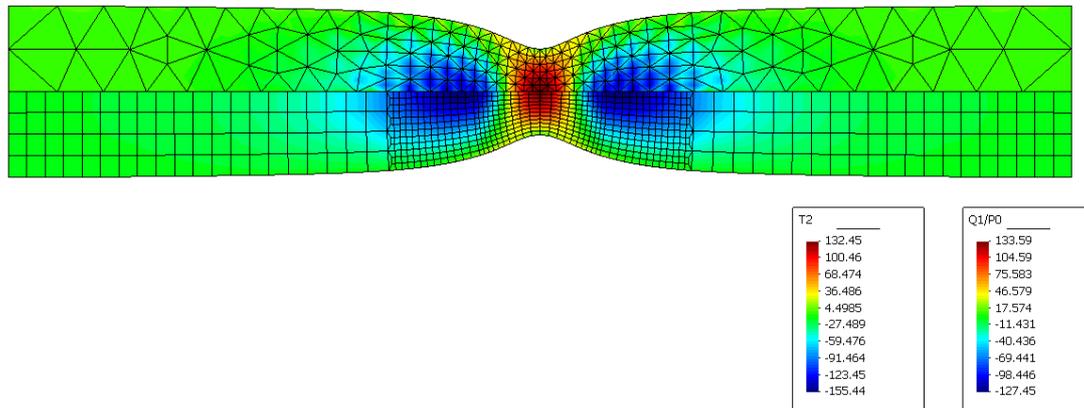


Figura 5: Contornos de tensión σ_{rr} para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

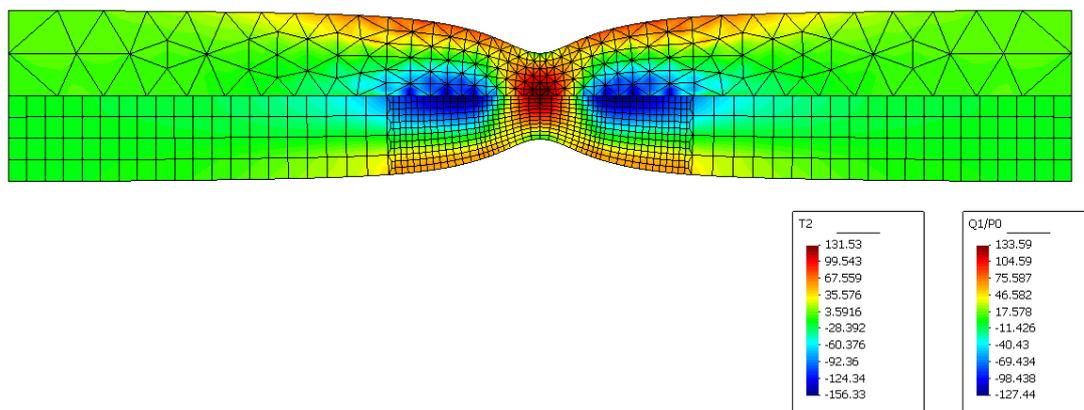


Figura 6: Contornos de tensión $\sigma_{\theta\theta}$ para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

Además, puede mencionarse que para ambos tipos de elementos el cambio en la curvatura del perfil del cuello se halla en el contorno correspondiente a las máximas tensiones de corte $\sigma_{rz \max}$.

Lo anterior, sugiere que el cambio de curvatura en el perfil y la $\sigma_{rz \max}$ podrían estar asociadas entre sí.

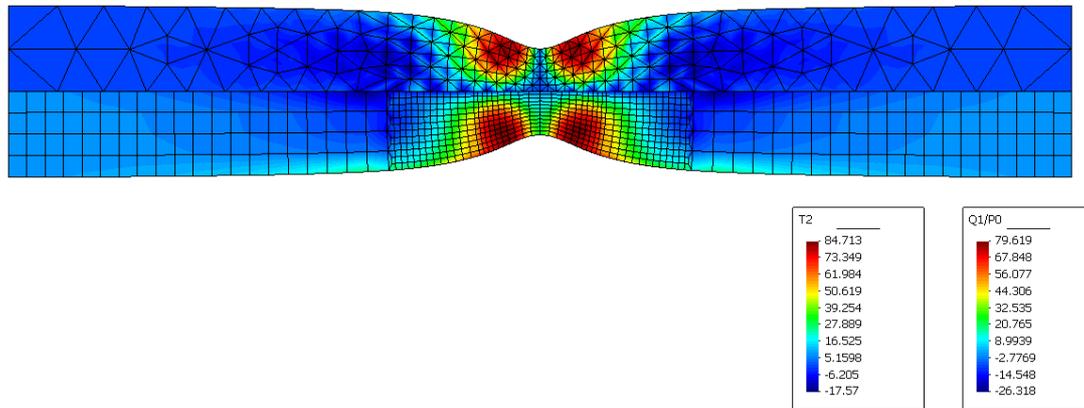


Figura 7: Contornos de tensión σ_{rz} para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

Por último, en la Figura 8 se muestran las distribuciones de presión, las cuales se grafican en la configuración deformada y para el mismo valor de deformación ingenieril que en los contornos que anteceden.

En dicha figura se aprecia que la respuesta es similar en los dos tipos de elementos, siendo sus valores máximos muy cercanos entre sí. Sin embargo, las diferencias aumentan a medida que se produce la transición desde los valores máximos a mínimos de presión.

Además de lo anterior, cabe mencionar que los valores de presión máximos se encuentran en el área central de la sección transversal mínima, mientras que los valores mínimos se hallan en una zona relativamente alejada de la misma. La ubicación de esta última zona coincide, como era de esperar, con la de las tensiones normales máximas de compresión.

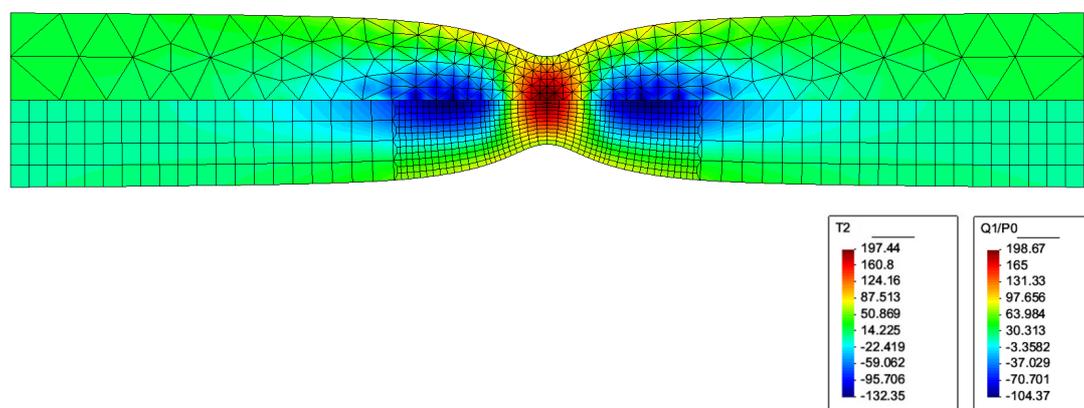


Figura 8: Contornos de presión para triángulos y cuadriláteros para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

5. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS Y ANALÍTICAS

Con el objeto de estudiar con mayor profundidad las variables abordadas anteriormente es que aquí se hace la comparación entre resultados analíticos y de elementos finitos. En particular, los análisis se focalizan en cuatro niveles característicos correspondientes a valores ubicados en la sección mínima del cuello (z_0), en puntos de Gauss cercanos a dicha sección (z_1), en puntos de Gauss correspondientes a la zona donde se produce el cambio de curvatura (z_2) y en puntos de Gauss donde se presentan los valores mínimos de presión (z_3). Para una mejor comprensión se muestra en la Figura 9 una vista ampliada de la malla de elementos finitos triangulares en la configuración original junto con la ubicación de los cuatro niveles de interés.

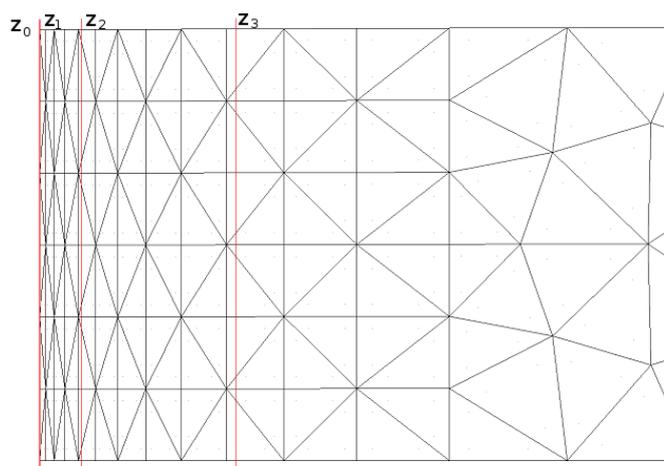


Figura 9: Ampliación de la malla de elementos triangulares y ubicación de los cuatro niveles característicos

Como ha sido señalado en los contornos correspondientes puede observarse que los valores máximos de deformación plástica efectiva ubicados en la sección mínima del cuello (z_0) son ligeramente distintos. En base a esto se compara, como se muestra en la Figura 10, las distribuciones de $\bar{\epsilon}^p$ en función de la coordenada r adimensionalizando esta última con el radio $\frac{D}{2}$ de la sección transversal mínima. Adicionalmente para los dos tipos de elementos empleados, y dado que la reducción del diámetro es levemente diferente, es que se grafican los valores teóricos de $\bar{\epsilon}^p$ tanto para cuadriláteros como para triángulos. El valor teórico de $\bar{\epsilon}^p$ para el caso de probetas cilíndricas puede ser calculados a partir de:

$$\bar{\epsilon}^p = -2 \ln \frac{D}{D_0} \quad (26)$$

Se puede observar que, si bien las curvas son similares a lo largo de toda la sección, los valores alcanzados son mayores para el caso de triángulos de seis nodos. Además, puede observarse que las distribuciones teóricas son constantes mientras que las numéricas varían desde un valor máximo en el centro a mínimo en el radio externo de la probeta.

Un comportamiento similar al anterior ocurre para las tensiones Y , mostradas tanto para el caso analítico como numérico en la Figura 11. Cabe aclarar que dichos valores analíticos pueden ser obtenidos a partir de la ecuación (25).

Las diferencias máximas encontradas en Y de los resultados numéricos relativos a los analíticos aparecen sobre el eje axial de simetría ($r=0$). Los mismos tienen valores de sólo 1,6 % y 2 % para los elementos Q1/P0 y T2 respectivamente.

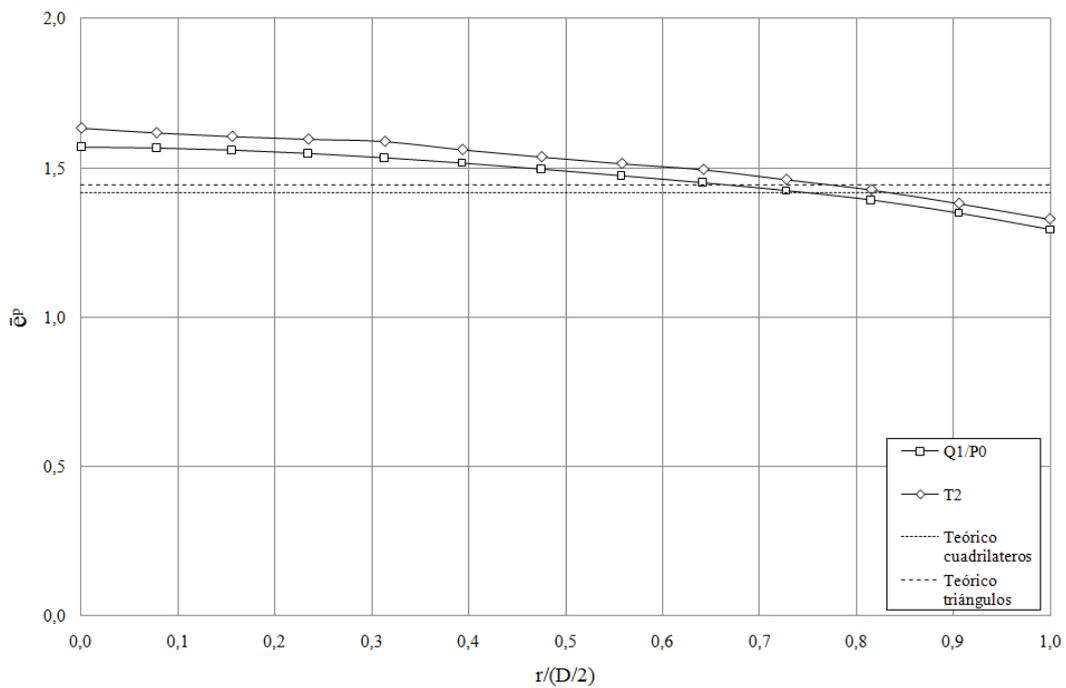


Figura 10: Distribuciones de deformaciones plásticas efectivas en z_0 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

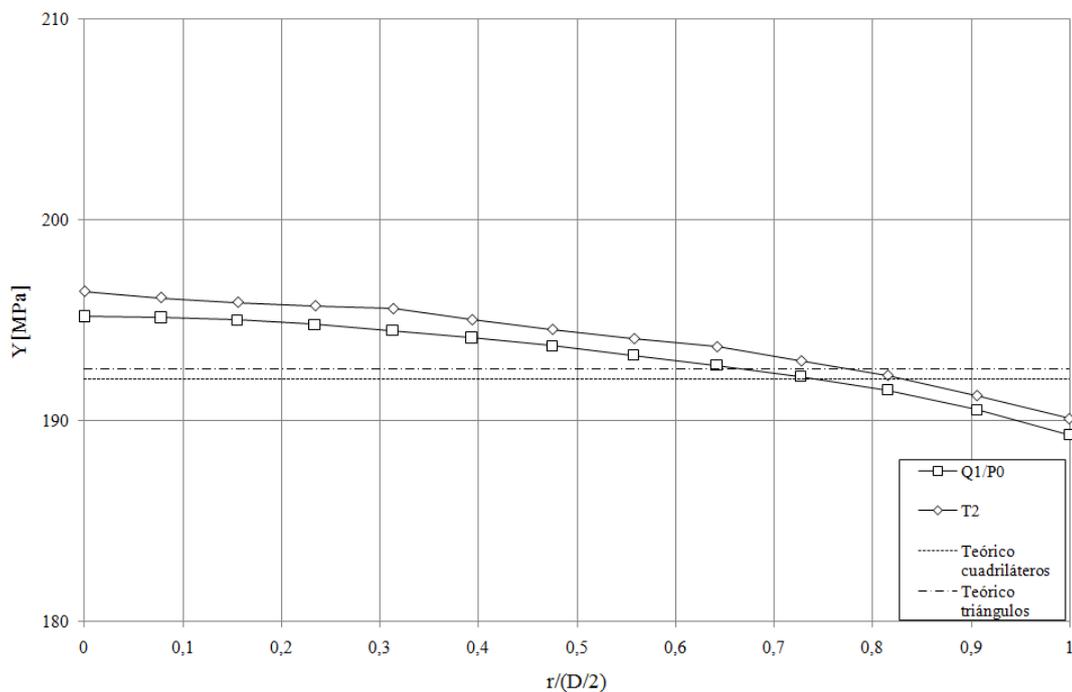


Figura 11: Distribuciones de tensiones efectivas en z_0 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67 \%$

Para comparar las componentes normales del tensor de tensiones obtenidas en forma numérica con los valores analíticos se recurre a las expresiones de la Sección 2. En primer lugar, en la Figura 12 se comparan en la sección mínima del cuello las tensiones en dirección axial

y el factor de corrección de las tensiones, normalizadas con la tensión Y . Para los resultados analíticos se emplean las ecuaciones (11) y (12) de la aproximación de Bridgman, las (16) y (17) para la otra aproximación empleada por dicho autor, mientras que las (6) y (7) se emplean para Davidenkov-Spiridonova. Cabe aclarar que para los resultados analíticos, graficados en la Figura 12 con líneas continuas, se emplea el término derecho de las ecuaciones anteriores; mientras que para los resultados numéricos, graficados en forma discreta, se utilizan los términos izquierdos.

En dicha figura, puede observarse que las tensiones axiales obtenidas en forma numérica y en forma analítica presentan comportamientos similares, siendo dichas tensiones máximas en el centro de la probeta y mínimas en el radio exterior de la misma.

Las mayores diferencias entre los resultados analíticos y los numéricos, como así también entre los resultados con Bridgman y con Davidenkov-Spiridonova, se encuentran en la zona cercana a $r=0$; aunque los resultados numéricos se ubican entre los de ambas expresiones analíticas.

Respecto al factor de corrección de las tensiones puede apreciarse que los valores mayores corresponden a la relación de Davidenkov-Spiridonova y los inferiores a la relación aproximada de Bridgman. Por otro lado, los valores numéricos obtenidos con los elementos T2 y Q1/P0 prácticamente coinciden entre sí. Estos valores numéricos son muy próximos a los obtenidos con Bridgman en la zona cercana al eje axial de simetría ($r=0$), mientras que se acercan a los valores obtenidos con Davidenkov-Spiridonova en las cercanías del radio externo de la probeta.

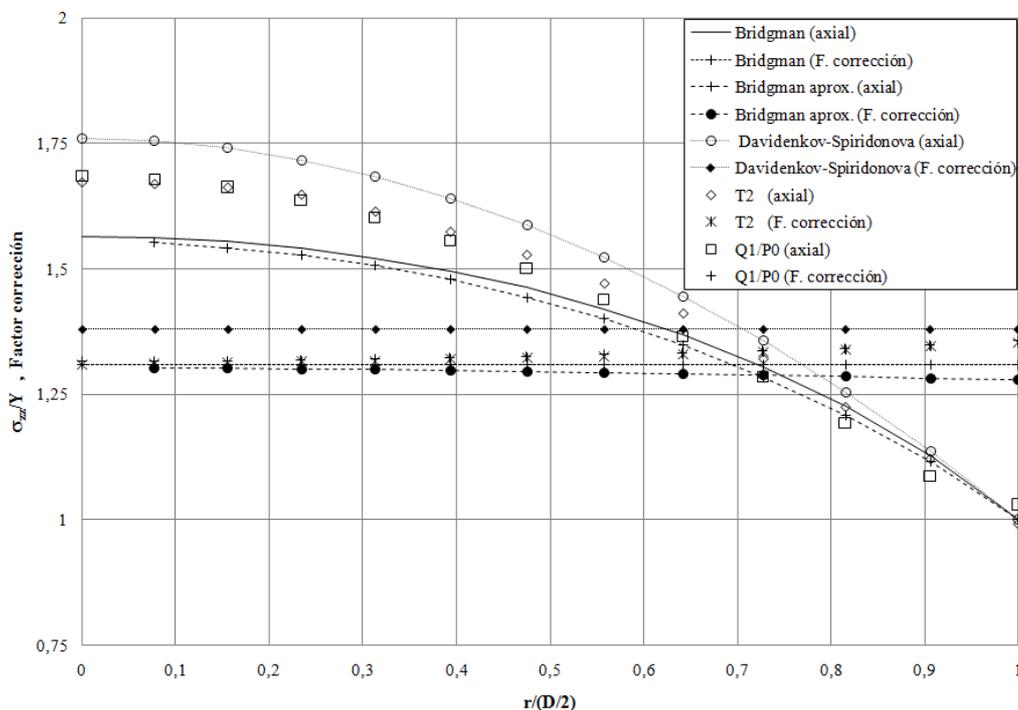


Figura 12: Distribuciones de tensiones axiales y factor de corrección en z_0 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

Para las diferentes secciones transversales de interés se grafica en la Figura 13 la $\frac{\sigma_{zz}}{Y}$ en función del radio r . En la misma los resultados corresponden a los obtenidos con los elementos T2.

Puede apreciarse que los resultados obtenidos en z_0 y z_1 prácticamente no presentan diferencias. Una vez que la sección transversal se aleja del área mínima, es decir para z_2 y z_3 , no es posible obtener las distribuciones de tensiones axiales por medio de las expresiones analíticas empleadas en este trabajo.

Adicionalmente, en la Figura 13 se aprecia que en los valores correspondientes a z_3 , que es la zona estudiada más alejada de la sección transversal mínima, existe en $r=0$ tensiones axiales de compresión y cuyo valor es considerable respecto a la tensión Y . Esta diferencia disminuye, cambiando adicionalmente a tensiones de tracción, a medida que r se acerca al radio externo de la probeta en z_3 .

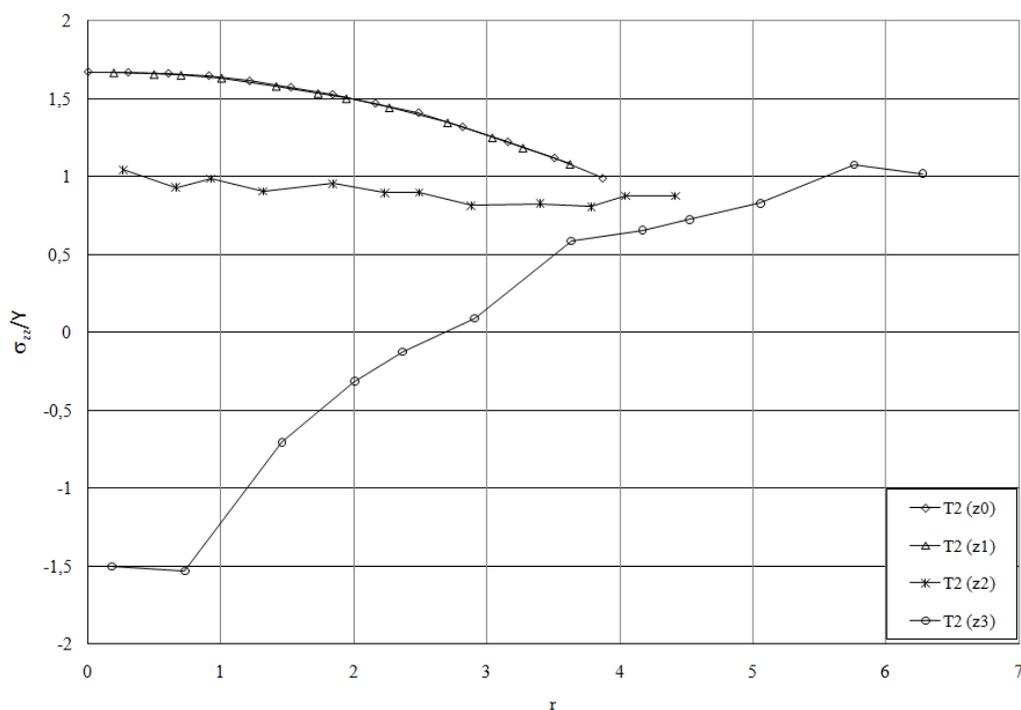


Figura 13: Distribuciones de tensiones axiales en la probeta en z_0 , z_1 , z_2 y z_3 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

Las tensiones radiales y circunferenciales en la sección del cuello se grafican en la Figura 14. En la misma se representan los valores obtenidos a partir de las expresiones analíticas y los obtenidos de los experimentos numéricos, hallándose comportamientos similares en todos los casos. Nuevamente, en las zonas cercanas a $r=0$ los valores superiores corresponden a Davidenkov-Spiridonova y los inferiores a la aproximación de Bridgman, mientras que los resultados numéricos se encuentran comprendidos entre los dos primeros. A medida que la coordenada r tiende al radio externo de la probeta aparecen diferencias entre los resultados obtenidos con los elementos T2 y Q1/P0, como así también entre las componentes σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ obtenidas con los mismos, aunque pueden considerarse cercanos a los valores analíticos.

En la Figura 15 se realiza una comparación, para los elementos T2, de las tensiones $\frac{\sigma_{rr}}{Y}$ en función del radio r para diferentes secciones transversales al eje longitudinal de la probeta.

Puede observarse que en los valores de z_0 y z_1 los valores en tensión son muy cercanos entre sí. Sin embargo, para secciones alejadas de $z=0$ no es posible aproximar las distribuciones de tensiones presentes en la probeta por medio de las expresiones analíticas estudiadas en este trabajo.

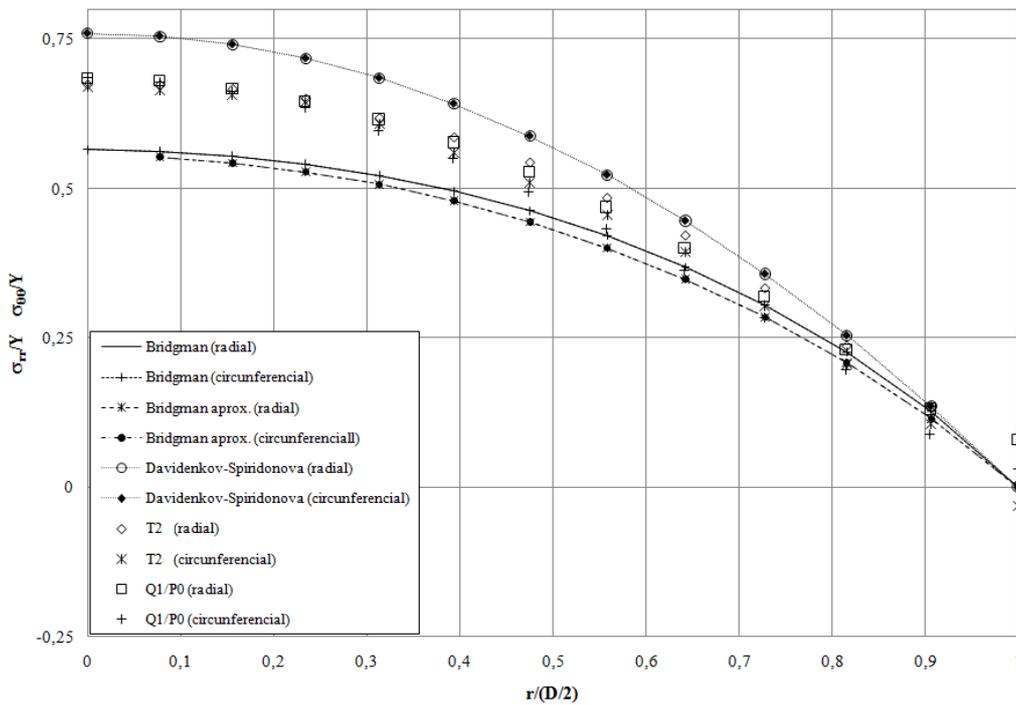


Figura 14: Distribuciones de tensiones radiales y circunferenciales en z_0 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

Así mismo, para $z = 3$ y en $r = 0$ las tensiones de compresión σ_{rr} presentan valores considerablemente mayores que los alcanzados por la tensión Y .

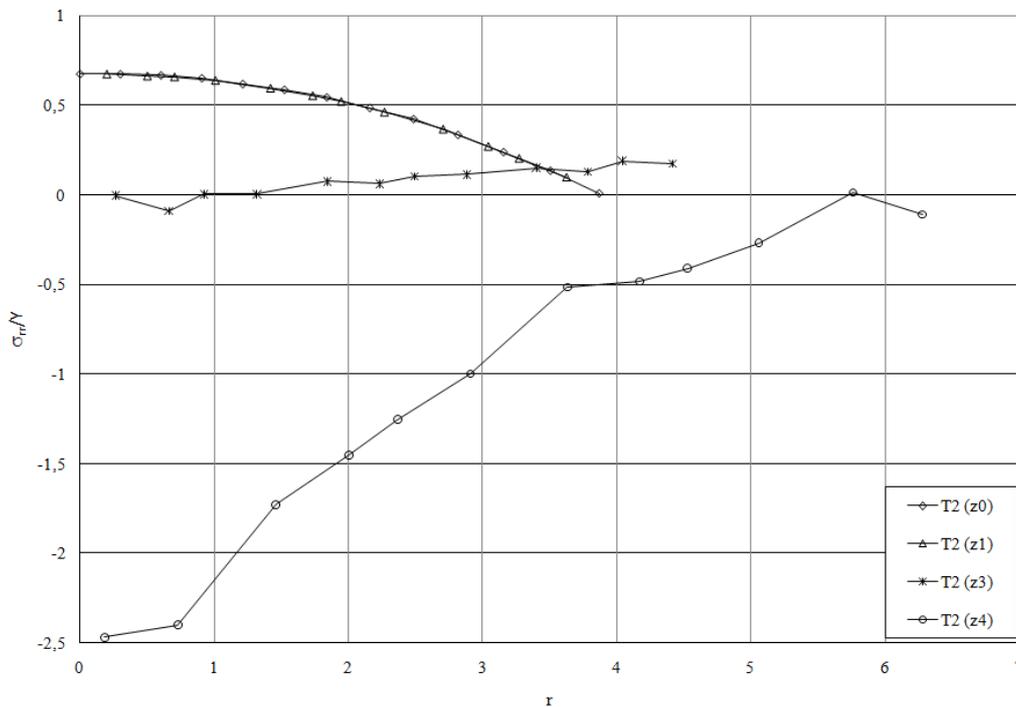


Figura 15: Distribuciones de tensiones radiales en la probeta en z_0, z_1, z_2 y z_3 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

Por último, en la Figura 16 se presentan las distribuciones de presiones en dirección transversal, en la sección ubicada en $z=0$. Puede apreciarse que en todos los casos, incluso los numéricos, la relación $\frac{p}{\sigma}$ disminuye a medida que r tiende a $\frac{D}{2}$. Además, los resultados numéricos en general se encuentran ubicados entre los valores obtenidos con Bridgman y con Davidenkov-Spiridonova

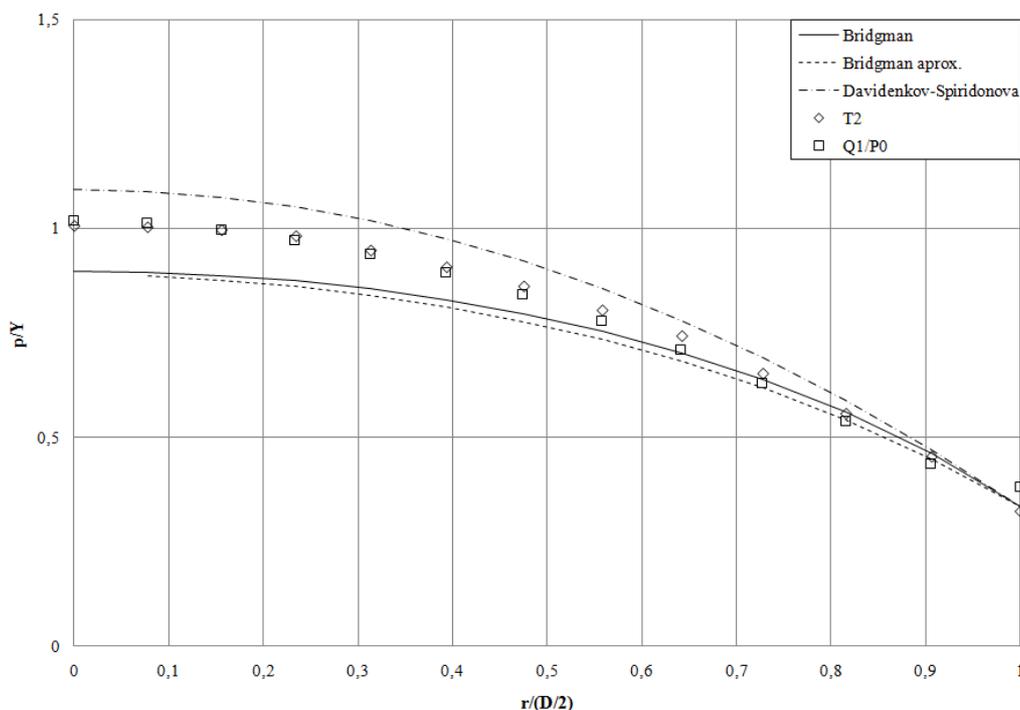


Figura 16: Distribuciones de presiones en z_0 para $\frac{\Delta l}{l_0} = 26,67\%$

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han analizado en probetas cilíndricas con estricción las distribuciones de deformaciones plásticas efectivas, tensión efectiva, componentes del tensor de tensiones y la presión, como así también el factor de corrección para las tensiones.

Como instrumento de validación y comparación se han utilizado dos tecnologías diferentes de elementos finitos, y cuando ha sido posible se han comparado los resultados con tres aproximaciones analíticas. Cabe destacar que el uso de las expresiones de Davidenkov-Spiridonova se encuentra mucho menos difundido en la literatura específica que las de Bridgman.

Las correspondientes distribuciones se han estudiado en toda la probeta mediante el uso de contornos y luego se han centralizado las investigaciones en cuatro ubicaciones características en la longitud de la probeta.

Dichas ubicaciones se corresponden en primer lugar a la sección de simetría donde se produce la máxima estricción, y los valores máximos de deformación plástica efectiva, tensión efectiva y presión. Los parámetros del modelo de elementos finitos se evalúan en los nodos de dicha sección a partir de extrapolación de los valores en puntos de Gauss. Para esa sección están deducidas las aproximaciones analíticas de Bridgman y Davidenkov-Spiridonova.

En segundo lugar, se considera la sección transversal correspondiente a la ubicación de los puntos de Gauss más cercanos a la sección mínima, lo que permite evaluar los resultados sin la

extrapolación empleada para llevar los datos a valores nodales.

En tercer y cuarto lugar en puntos de Gauss correspondientes a la zona donde aparece el cambio de curvatura del perfil de la probeta y en donde se presentan los valores mínimos de presión respectivamente.

Los resultados obtenidos, tanto con los elementos triangulares cuadráticos como con los cuadriláteros concuerdan muy bien entre sí; aunque en algunos casos los valores son mayores con triángulos debido a una distorsión levemente mayor de los mismos. Esto último posiblemente ocurre por la utilización de un elemento cuadrático, el cual es más flexible que los elementos lineales, debido a la menor rigidez relativa de los nodos ubicados en los lados frente a los nodos de los vértices.

Cabe destacar que el uso de elementos finitos triangulares de seis nodos tiene pocos antecedentes en problemas de plasticidad con grandes deformaciones y menos aún en la simulación de probetas sometidas a tracción. Si bien este tipo de elemento presenta una mayor distorsión que los elementos Q1/P0, posee la ventaja de una relativa sencillez en su formulación e implementación en un código de elementos finitos.

Es importante destacar que en el presente trabajo se discuten las distribuciones de tensiones no sólo en la sección mínima del cuello, sino también en zonas distintas de la misma. La comprensión de estas distribuciones es de especial relevancia para la caracterización de ecuaciones constitutivas con grandes deformaciones.

De los resultados puede observarse que los valores de tensión radial, tensión circunferencial, tensión axial, presión y factor de corrección de las tensiones obtenidos en forma numérica se ubican, en general, entre medio de los obtenidos con las aproximaciones de Bridgman y de Davidenkov- Spiridonova.

Por último, se debe señalar que si bien la probeta está sometida a tracción aparecen zonas con valores importantes de compresión y que el cambio de la curvatura del perfil del cuello ocurre en el contorno correspondiente a la tensión de corte máxima. Esto puede ser observado tanto en elementos triangulares como en cuadriláteros.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Nacional de Cuyo por el apoyo brindado a través de los proyectos “06/B175 Calibración mediante elementos finitos de ecuaciones constitutivas en metales sometidos a grandes deformaciones elastoplásticas” y “06/B194 Simulación de problemas de mecánica de sólidos mediante herramientas de computación distribuida” otorgados por la SECTyP.

REFERENCIAS

- Alves M. y Jones N. Influence of hydrostatic stress on failure of axisymmetric notched specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(3):643–667, 1999.
- Bridgman P. The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, 32:553–574, 1944.
- Bridgman P. Effects of high hydrostatic pressure on the plastic properties of metals. *Reviews of Modern Physics*, 17(1):3, 1945.
- Bridgman P. *Studies in large plastic flow and fracture*. Metallurgy and Metallurgical Engineering. McGraw-Hill, 1952.
- Cabezas E. y Celentano D. Experimental and numerical analysis of the tensile test using sheet specimens. *fead*, 40:555 – 575, 2004.

- Celentano D., Cabezas E., y Garcia C. Analysis of the bridgman procedure to characterize the mechanical behavior of materials in the tensile test: experiments and simulation. *Journal of Applied Mechanics*, 72(1):149–152, 2005.
- Celentano D., Cabezas E., García C., y Monsalve A. Characterization of the mechanical behaviour of materials in the tensile test: experiments and simulation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(4):425–444, 2004.
- Chen W. Necking of a bar. *International Journal of Solids and Structures*, 7(7):685–717, 1971.
- Davidenkov N. y Spiridonova N. Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. *Proceedings of American Society of Testing Materials*, 46:1147–1158, 1946.
- Dietrich L., Miastkowski J., y Szczepiński W. Nośność graniczna elementów konstrukcji (in polish). 1970.
- Dowling N. *Mechanical behavior of materials*. Prentice-Hall, 1993.
- Gabaldón F. *Métodos de elementos finitos mixtos con deformaciones supuestas en elastoplasticidad*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid, 1999.
- Garino C.G. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD. Thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, 1993.
- Garino C.G., Gabaldón F., y Goicolea J. Finite element simulation of the simple tension test in metals. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:1187–1197, 2006.
- Garino C.G., Gabaldón F., Goicolea J., Mirasso A., y Raichman S. *Simulación computacional del ensayo de tracción simple con estricción*. Informe Técnico, Proyecto PICT 12-03268, FONCyT, ANPCyT, 2004.
- Garino C.G., Goicolea J., y Gabaldón F. Simulación numérica del ensayo de tracción simple. *Mecánica Computacional*, XVII:425–436, ISSN 1666–6070, AMCA, 1996.
- Goicolea J. *Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis*. PhD. Thesis, University of London, 1985.
- Gromada M. *Modelling of the plastic strain location in the tensile test (in Polish)*. PhD thesis, Politechnika Rzeszowska, Poland, 2006.
- Gromada M., Mishuris G., y Öchsner A. Critical analysis of the evaluation of plastic material properties obtained from standard round tensile specimens. 2004.
- Gromada M., Mishuris G., y Öchsner A. An attempt to improve the evaluation of mechanical material properties from the axisymmetric tensile test. *Israel Journal of Chemistry*, 47(3-4):329–335, 2007a.
- Gromada M., Mishuris G., y Öchsner A. Necking in the tensile test. correction formulae and related error estimation. *Archives of Metallurgy and Materials*, 52(2):231–238, 2007b.
- Gromada M., Mishuris G., y Öchsner A. On the evaluation of mechanical properties from the axisymmetric tensile test. *Archives of Metallurgy and Materials*, 55(1):325–330, 2010.
- Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, USA, 1998.
- Hughes T. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- Jones S., Gillis P., y Shalaby A. Stress distributions in the vicinity of a neck. *Journal of Applied Physics*, 50(5):3168–3173, 1979.
- Kachanov L. *Fundamentals of the theory of plasticity*. North-Holland, 2004.
- Malvern L. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, 1969.
- Mirone G. A new model for the elastoplastic characterization and the stress-strain determination on the necking section of a tensile specimen. *International Journal of Solids and Structures*, 41(13):3545–3564, 2004.

- Nagtegaal J., Parks D., y Rice J. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153–177, 1974.
- Needleman A. A numerical study of necking in circular cylindrical bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(2):111–127, 1972.
- Norris D., Moran B., Scudder J., y Quiñones D. A computer simulation of the tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(1):1–19, 1978.
- Stainier L., Careglio C., Garino C.G., y Mirasso A. Comparative study of constitutive and finite element formulations for large strain elastoplasticity. *Mecánica Computacional*, XXV:2033–2060, ISSN 1666–6070, AMCA, 2006.