

REGULARIZACIÓN DE LOCALIZACIÓN POR MEDIO DE GRADIENTES DE DEFORMACIÓN PLÁSTICA NO LOCAL Y EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

Luis C. Pérez y Andy H. Campos

Departamento de Ingeniería Mecánica, Aula UTFSM-CIMNE, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile, <http://www.mec.utfsm.cl>

Palabras Clave: Métodos sin malla, localización, ablandamiento, gradiente de deformaciones, deformación no local.

Resumen. En este trabajo se presenta la implementación de una técnica de regularización por medio de gradientes de deformaciones, a fin de replicar de forma objetiva el fenómeno de localización en una simulación numérico-computacional utilizando el modelo de ablandamiento isotrópico en la teoría plástica de Von Mises (J_2) con un enfoque no local para la deformación plástica.

Usualmente el fenómeno de la localización de las deformaciones ha sido enfrentado desde el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) por medio de las técnicas de regularización de la energía de fractura, o por enriquecimiento de las ecuaciones constitutivas con gradientes de deformaciones de alto orden, con funciones de forma diferentes y con mayor orden de diferenciabilidad que las utilizadas para obtener el campo de desplazamientos.

La formulación del Método de Puntos Finitos (MPF) permite usar funciones de forma de mayor orden de diferenciabilidad de modo que, respecto al MEF, presenta la oportunidad de utilizar dichas funciones tanto para aproximar el campo de desplazamientos como las deformaciones en un contexto de gradientes no locales.

1. INTRODUCCIÓN

La pérdida de elipticidad de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema inelástico de ablandamiento isotrópico deriva en una respuesta deficiente del fenómeno de la localización (Bažant y Lin, 1988). La deformación se concentra en zonas delgadas dependientes de la discretización empleada, que en caso de elementos finitos (MEF) corresponde al ancho del elemento de la zona localizada. A medida que la malla es refinada la localización se concentra en zonas cada vez más reducidas.

La regularización de la energía de fractura ha sido tradicionalmente la técnica empleada para tratar la localización en los problemas que involucren daño mecánico (Oller, 2001; Rodríguez-Ferran et al., 2005) o ablandamiento. Por otro lado, el enfoque de gradientes de deformación (Fleck y Hutchinson, 1997; Comi y Perego, 1996; Etse y Vrech, 2001; Vrech y Etse, 2004) es una alternativa a la técnica de regularización de la energía de fractura, que consiste en enriquecer las relaciones constitutivas con gradientes o derivadas de la deformación. Los gradientes utilizados en este trabajo, corresponden a los de la variable de endurecimiento no local $\bar{\kappa}$.

El MEF (Zienkiewicz y Taylor, 2000) utiliza funciones de forma de clase C1 para el desplazamiento que no son suficientes para aproximar gradientes de deformación, recurriendo necesariamente a una base de funciones de forma diferente para estos. El Método de Puntos Finitos (MPF) (Oñate et al., 2001; Perazzo et al., 2006; Pérez-Pozo y Perazzo, 2007; Pérez-Pozo et al., 2009) requiere de funciones de forma de clase C2 para resolver la ecuación de equilibrio, por lo que se utiliza la misma para aproximar la deformación y sus gradientes.

Para enriquecer las ecuaciones con gradientes de alto orden se recurre al enfoque no local de las deformaciones plásticas (De Borst y Mühlhaus, 1992) a través de una variable interna de endurecimiento. Estos gradientes de deformación no local agregan una longitud característica que considera el alcance de la no localidad respecto al punto material y que actúa como regularizador de la localización con independencia de la discretización empleada.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan los aspectos básicos de la formulación del MPF. La sección 3 introduce la formulación no local de una variable general y el enfoque de gradientes a partir de ella. En la sección 4 se describen las relaciones constitutivas y de consistencia del problema elastoplástico con ablandamiento isotrópico y su formulación en el MPF. Finalmente, en la sección 5 se estudian los resultados validando el procedimiento utilizado con la literatura existente.

2. MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

El MPF realiza la aproximación local de una función incógnita $u = u(x)$ para cada uno de los N nodos x_I de la discretización del dominio, tal que $1 \leq I \leq N$, usando como criterio la minimización de los errores cuadráticos ponderados (Oñate, 1996; Oñate et al., 1996a,b; Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002; Pérez-Pozo et al., 2009).

Sea $\omega_I \subset [a, b]$ subintervalo de un dominio unidimensional $\Omega : \{x \mid a \leq x \leq b\}$ donde se realiza la aproximación local para $x_I \in \omega_I$.

Se define al conjunto $\{x_{I,1}, \dots, x_{I,n_I}\}$ como *nube* asociada al nodo x_I , formada por los n_I nodos de la discretización contenidos en ω_I ; x_I recibe el nombre de *nodo estrella* de la *nube* I -ésima y $x_{I,k}$, $1 \leq k \leq n_I$ corresponde al nodo k -ésimo de la *nube* I -ésima, donde se cumple necesariamente que para cada I existe un único k de modo que $x_I = x_{I,k}$.

Considérese la base $\langle p_{I,1}(x), \dots, p_{I,m_I}(x) \rangle$ de funciones linealmente independientes en cada subintervalo ω_I para la definición de la forma de la función de aproximación, cuya dimensión m_I es la misma para todos los N subintervalos. En este trabajo se consideran $m_I = 3$ con

$p_{I,1}(x) = 1$, $p_{I,2}(x) = x$, $p_{I,3}(x) = x^2$. Para la correcta implementación del MPF, se debe cumplir la condición $n_I > m_I = 3$.

Tomando $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,m_I}$, la aproximación $\tilde{u}(x)$ de $u(x)$ en I_I es de la forma

$$\tilde{u}_I(x) = \alpha_{I,1}1 + \alpha_{I,2}x + \alpha_{I,3}x^2 \tag{1}$$

Para w_I , se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,3}$ tal que se minimice el valor

$$J_I = \sum_{k=1}^{n_I} w(x_{I,k})(u_I^h(x_{I,k}) - \tilde{u}_I(x_{I,k}))^2 \tag{2}$$

Donde la función $w(x_I) = w_I$ recibe el nombre de *función peso*.

Sea $h_{I,k}$ distancia entre el nodo $x_{I,k}$ con el nodo estrella. Para dar un carácter local en la aproximación por el MPF la función de peso usualmente utilizada es la que sigue:

$$w_I(x_{I,k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(h_{I,k}/\lambda_I)} - e^{-(r_I/\lambda_I)}}{1 - e^{-(r_I/\lambda_I)}} & \text{si } h_{I,k} \leq r_I \\ 0 & \text{si } h_{I,k} > r_I \end{cases} \tag{3}$$

siendo $r_I = q \cdot h_{\text{máx}}$, con $h_{\text{máx}} = \max\{h_{I,1}, \dots, h_{I,n_I}\}$, y $\lambda = \beta \cdot r_I$, donde q y β son parámetros positivos escogidos según algún criterio. En adelante se utiliza $q = 1,1$ y $\beta = 0,25$ (Oñate et al., 2001; Pérez-Pozo et al., 2009).

Para problemas de tipo unidimensionales, el criterio de selección de nodos corresponde ser los $n_I - 1$ nodos más cercanos a x_I . En este trabajo se utiliza $n_I = 5$.

Sean

$$\mathbf{p}_I(x) = [p_{I,1}(x) \dots p_{I,3}(x)] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \begin{pmatrix} \alpha_{I,1} \\ \vdots \\ \alpha_{I,3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_I^h = \begin{pmatrix} u(x_{I,1}) \\ \vdots \\ u(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_I(x_{I,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_I(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Considerando $J_I = J_I(\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I})$ función definida desde la ecuación (2). El valor mínimo de J_I se alcanza en su punto crítico, por lo que para cada nube I se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I}$ tal que $\nabla J_I = \mathbf{0}$, obteniéndose:

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I^h \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I \mathbf{P}_I \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I$$

siendo \mathbf{A}_I la matriz de momentos y \mathbf{W}_I la matriz diagonal de orden $n_I \times n_I$ con término $(\mathbf{W}_I)_{k,k} = w_I(x_{I,k})$. De este modo, reemplazando (6) en (1) se obtiene

$$\tilde{u}_I(x) = \boldsymbol{\varphi}_I(x) \mathbf{u}_I^h \tag{7}$$

con

$$\boldsymbol{\varphi}_I(x) = \mathbf{p}_I(x) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \tag{8}$$

La aproximación de las derivadas de $\mathbf{u}(x)$, se realiza por la derivación directa de la relación (7), la que afecta únicamente a las funciones de la base de interpolación del vector $\mathbf{p}_I(x)$ definidos en (4) dentro de la ecuación (8).

Para controlar el condicionamiento de la matriz de momentos, la base de interpolación es centrada y adimensionalizada (Pérez-Pozo et al., 2009):

$$p_{I,1}(x) = 1, \quad p_{I,2}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right), \quad p_{I,3}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right)^2$$

3. GRADIENTES DE DEFORMACIÓN PLÁSTICA NO LOCAL

Las teorías clásicas no son suficientes para evaluar y conocer el estado de esfuerzo local en un punto debido a la estructura heterogénea del material (Chen et al., 2000; Rolshoven y Jirásek, 2002; Jirásek y Rolshoven, 2003). Se define por esto el enfoque no local $\bar{f}(x)$ como el promedio ponderado de $f(x)$ por la función de peso α sobre el dominio \mathcal{L} :

$$\bar{f}(x) = \int_{\mathcal{L}} \alpha(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (9)$$

La función de peso α , debe ser tal que introduzca una longitud característica l relacionada con la microestructura del material y que permita agregar información de la vecindad al punto material cumpliendo además la condición de normalidad:

$$\int_{\mathcal{L}} \alpha(x, \xi) d\xi = 1 \quad \forall x \in \mathcal{L}$$

3.1. Plasticidad No Local

En los problemas elastoplásticos incrementales donde se simula el fenómeno de ablandamiento bajo el enfoque tradicional clásico las ecuaciones diferenciales quedan mal planteadas, que en términos empíricos implica la posibilidad de infinitas soluciones admisibles. La deformación se localiza en zonas de amplitud arbitrariamente pequeñas sin disipación de energía (Chen et al., 2000) lo que físicamente es incorrecto.

En este trabajo, se aplica el concepto de variable no local definido en (9) a la deformación plástica por medio del invariante κ definido mas adelante, junto a la función de peso α definida como:

$$\alpha(x, \xi) = \frac{1}{\mathcal{L}} \quad (10)$$

Para el caso unidimensional la deformación plástica no local en una longitud característica $\mathcal{L} = 2l$, está definida como:

$$\bar{\varepsilon}^p(x) = \int_{-l}^l \frac{1}{2l} \varepsilon^p(x + \delta) d\delta \quad (11)$$

aproximando $\varepsilon^p(x + \delta)$ en serie de Taylor en torno a δ y truncando hasta los términos de segundo orden se tiene:

$$\varepsilon^p(x + \delta) \approx \varepsilon^p(x) + \frac{d\varepsilon^p(x)}{dx} \delta + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon^p(x)}{dx^2} \delta^2 \quad (12)$$

reemplazando (12) en (11) y evaluando la integral se obtiene:

$$\bar{\varepsilon}^p(x) \approx \varepsilon^p(x) + \frac{l^2}{6} \varepsilon^{p''}(x) \quad (13)$$

que por simplicidad es redefinida como:

$$\bar{\varepsilon}^p(x) = \varepsilon^p(x) + c \nabla^2 \varepsilon^p(x) \quad (14)$$

La deformación plástica local es descrita en términos de deformación no local según lo realizado en [Peerlings et al. \(1996\)](#) como:

$$\varepsilon^p(x) = \bar{\varepsilon}^p(x) - c\nabla^2\bar{\varepsilon}^p(x) \quad (15)$$

Para resolver esta ecuación diferencial es necesario implementar la condición de contorno $\nabla\varepsilon^p(x) = 0$ que permita una solución objetiva. En la literatura no existe consenso respecto a la interpretación física que tienen tales restricciones a la ecuación (15), sin embargo, en algunos trabajos ([Polizzotto, 2003](#); [Rodríguez-Ferran et al., 2005](#)) se mencionan aspectos termodinámicos relacionados con la energía residual no local.

3.2. Gradientes de Deformación Plástica

En este trabajo se usa el modelo isotrópico de plasticidad asociada de Von Mises. La evolución de deformación plástica $\dot{\varepsilon}^p(x)$ y de la variable interna de endurecimiento $\dot{\kappa}(x)$ están relacionadas ([Neto et al., 2008](#)) por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (16)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \quad (17)$$

Para problemas de plasticidad asociada y sometidos a esfuerzos de tracción se cumple que $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 1$, lo que permite realizar la igualdad y aplicando el enfoque no local:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\bar{\kappa}} \quad (18)$$

Tomando en cuenta (15) y aplicando lo obtenido en (18), la formulación local de κ es considerada como función de la misma variable pero con enfoque no local $\bar{\kappa}$ y su gradiente de segundo orden $\nabla^2\bar{\kappa}$:

$$\kappa = \bar{\kappa} - c\nabla^2\bar{\kappa} \quad (19)$$

4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El problema elastoplástico general ([Neto et al., 2008](#); [Owen y Hinton, 1980](#)) con implementación de gradientes de deformación no local, es gobernado por las siguientes relaciones:

$$\nabla\dot{\sigma} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\mathbf{n}) \quad (21)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^T) \quad (22)$$

donde $\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\lambda}$ y $\dot{\mathbf{u}}$ corresponden a la evolución temporal del esfuerzo, deformación, multiplicador plástico y desplazamientos. Deben cumplirse también las condiciones de consistencia que establecen las condiciones de carga y descarga o restricciones para los esfuerzos admisibles dentro del régimen elástico o plástico según corresponda:

$$f(\sigma, \bar{\kappa}, \nabla^2\bar{\kappa}) \leq 0 \quad (23)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (24)$$

$$\dot{f}(\sigma, \bar{\kappa}, \nabla^2\bar{\kappa}) \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (25)$$

Cuando el régimen plástico ha comenzado a desarrollarse, $\dot{\lambda} > 0$ por lo que de (25), debe necesariamente ocurrir:

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\kappa}, \nabla^2 \bar{\kappa}) = 0 \quad (26)$$

Utilizando el concepto tradicional de función de fluencia independiente de gradientes de deformación ésta toma la forma:

$$f(\sigma, \kappa) = \sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}_y(\kappa) \quad (27)$$

donde $\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{VM} = \sqrt{3J_2}$ esfuerzo de Von Mises con J_2 el segundo invariante del tensor desviador de tensiones y $\bar{\sigma}_y(\kappa)$ es el esfuerzo de fluencia dependiente de un invariante de la deformación plástica o variable de endurecimiento κ .

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, la función de fluencia (27) puede extenderse para un enfoque de gradientes (De Borst y Mühlhaus, 1992; Comi y Perego, 1996; Etse y Vrech, 2001) que como se indica en la sección 3.2 se relaciona con el enfoque no local de deformaciones plásticas:

$$f(\sigma, \bar{\kappa}, \nabla^2 \bar{\kappa}) = \sigma_{VM} - \bar{\sigma}_y(\bar{\kappa}, \nabla^2 \bar{\kappa}) \quad (28)$$

Diferenciando la función de fluencia dependiente del gradiente (28) se obtiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}} + \frac{\partial f}{\partial \nabla^2} \nabla^2 \dot{\bar{\kappa}} = 0 \quad (29)$$

Se define:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \quad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\kappa}} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_g}{\partial \bar{\kappa}} = -h \quad (31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla^2 \bar{\kappa}} = \bar{c} \quad (32)$$

donde h es el módulo de endurecimiento lineal.

Como se ha indicado, este trabajo fue desarrollado sobre la teoría de plasticidad isotrópica asociada de Von Mises, razón por lo que se cumple que:

$$\dot{\bar{\kappa}} = \dot{\lambda} \quad (33)$$

por lo que reemplazando (30), (31), (32) y (33) en (29), se obtiene para el caso unidimensional ($\mathbf{n}=1$):

$$\dot{\sigma} - h\dot{\bar{\kappa}} + \bar{c}\nabla^2 \dot{\bar{\kappa}} = 0 \quad (34)$$

4.1. Formulación Incremental Fuerte con el MPF

El MPF tiene como característica una formulación fuerte (Perazzo et al., 2006; Pérez-Pozo y Perazzo, 2007; Pérez-Pozo et al., 2009) que permite implementar un esquema incremental directamente a partir de las relaciones constitutivas diferenciales en (20) y (34) en un estado cuasiestático.

Para dar un tratamiento numérico matricial compacto se define $\bar{E} = (E_1, E_2, \dots, E_j, \dots, E_N)^T$ con $1 \leq j \leq N$, arreglo que contiene el módulo de elasticidad E_j de cada uno de los N nodos de la discretización de la geometría completa. Con el mismo objetivo se redefine la forma de

(7) para las incógnitas de desplazamiento nodal $\mathbf{u}^h(x)$ y deformación plástica no local nodal $\bar{\kappa}^h(x)$ que incluye la información de los N nodos; el conjunto de las N funciones de forma φ_I de dimensión $n_I \times n_I$ es incluido en Φ de dimensión $N \times N$ de modo que $\Phi_{ij} = \varphi_{i,k}$ si y solo si el k -ésimo nodo de la nube i , corresponde ser el j -ésimo nodo de la discretización completa de N nodos.

Recurriendo a la notación indicial de ahora en adelante, se define para cada nodo estrella:

$$u(x_j) \approx \hat{u}_j = \Phi_{jk} u_k^h \quad (35)$$

$$\kappa(x_j) \approx \hat{\kappa}_j = \Phi_{jk} \bar{\kappa}_k^h \quad (36)$$

Para los nodos pertenecientes al interior del dominio, reemplazando (21) en (20), y considerando (22), (33), aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dx} = \frac{dE}{dx} \left(\frac{d\dot{u}}{dx} - \dot{\bar{\kappa}} \right) + E \left(\frac{d^2\dot{u}}{dx^2} - \frac{d\dot{\bar{\kappa}}}{dx} \right) = 0 \quad (37)$$

Mediante el MPF, las derivadas de $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\bar{\kappa}}$, se aproximan puntualmente para cada nodo estrella como sigue:

$$\left(\frac{d\dot{u}}{dx} \right)_j = (\dot{u}_x)_j \approx \Phi_{x,jk} \dot{u}_k^h \quad (38)$$

$$\left(\frac{d^2\dot{u}}{dx^2} \right)_j = (\dot{u}_{xx})_j \approx \Phi_{xx,jk} \dot{u}_k^h \quad (39)$$

$$\left(\frac{d\dot{\bar{\kappa}}}{dx} \right)_j = (\dot{\bar{\kappa}}_x)_j \approx \Phi_{x,jk} \dot{\bar{\kappa}}_k^h \quad (40)$$

donde los subíndices antes de la coma x y xx corresponden a la primera y segunda derivada de la cantidad respectiva.

Aplicando lo anterior al módulo de elasticidad:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_j = \Phi_{x,jk} \bar{E}_j \quad (41)$$

Reemplazando (38), (39), (40) y (41) dentro de (37) y usando además la variación temporal discreta en un tiempo Δt arbitrario en vez de la variación temporal infinitesimal, la ecuación de equilibrio (37) adquiere la forma:

$$\Phi_x \bar{E} (\Phi_x \Delta \mathbf{u}^h - \Phi \Delta \bar{\kappa}^h) + \bar{E} (\Phi_{xx} \Delta \mathbf{u}^h - \Phi_x \Delta \bar{\kappa}^h) = 0 \quad (42)$$

Aproximando por serie de Taylor la condición de consistencia (34) para un incremento de carga y truncando respecto a los términos lineales se tiene que:

$$f(\sigma, \bar{\kappa}, \nabla^2 \bar{\kappa}) + \Delta \sigma - h \Delta \bar{\kappa} + \bar{c} \nabla^2 (\Delta \bar{\kappa}) = 0 \quad (43)$$

Aplicando la implementación del MPF a la condición de consistencia (34) y reordenando se obtiene:

$$\bar{E} (\Phi_x \Delta \mathbf{u}^h - \Phi \Delta \bar{\kappa}^h) - H \Phi \Delta \bar{\kappa}^h + \bar{c} \Phi_{xx} \Delta \bar{\kappa}^h = -f(\sigma, \bar{\kappa}, \nabla^2 \bar{\kappa}) \quad (44)$$

donde el operador Laplaciano de la deformación plástica no local $\nabla^2(\Delta\bar{\kappa})$ ha sido reemplazado como $\Phi_{xx}\Delta\bar{\kappa}^h$. H es un módulo de endurecimiento artificial ($|H| \gg E$) que asegura evolución elástica a menos que la condición de fluencia (23) no se cumpla, donde H adquiere el valor de h en el nodo respectivo.

Para dar el carácter incremental al problema elastoplástico, se recurre al control de desplazamientos, usando las condiciones de contorno:

$$\dot{u}(x=0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (45)$$

$$\dot{u}(x=L, T) = \dot{u}_p \quad (46)$$

$$\frac{d\bar{\kappa}}{dx}(x=0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (47)$$

$$\frac{d\bar{\kappa}}{dx}(x=L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (48)$$

Al aplicar el MPF se obtiene para las condiciones de borde:

$$\Phi\Delta\mathbf{u}^h = 0 \quad (49)$$

$$\Phi\Delta\mathbf{u}^h = {}^t\Delta u_p \quad (50)$$

$$\Phi_x\Delta\bar{\kappa}^h = 0 \quad (51)$$

$$\Phi_x\Delta\bar{\kappa}^h = 0 \quad (52)$$

Al reordenar adecuadamente las expresiones (42) y (44) para los nodos dentro del dominio y las condiciones (49), (50), (51) y (52) para el contorno se obtiene la forma del esquema iterativo de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\bar{\kappa}} \\ \mathbf{K}_{\bar{\kappa}u} & \mathbf{K}_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}^h \\ \Delta\bar{\kappa}^h \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_{\bar{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (53)$$

con:

$$(\mathbf{K}_{uu})_{ij} = \begin{cases} \Phi_{x,ip}\bar{E}_p\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{x,rj} + \bar{E}_i\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{xx,rj} & \text{si } x_i \in \Theta - \Gamma \\ \Phi_{ij} & \text{si } x_i \in \Gamma \end{cases} \quad (54)$$

$$(\mathbf{K}_{u\bar{\kappa}})_{ij} = \begin{cases} -\Phi_{x,ip}\bar{E}_p\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{rj} - \bar{E}_i\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{x,rj} & \text{si } x_i \in \Theta - \Gamma \\ 0 & \text{si } x_i \in \Gamma \end{cases} \quad (55)$$

$$(\mathbf{K}_{\bar{\kappa}u})_{ij} = \begin{cases} \bar{E}_i\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{x,rj} & \text{si } x_i \in \Theta - \Gamma \\ 0 & \text{si } x_i \in \Gamma \end{cases} \quad (56)$$

$$(\mathbf{K}_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}})_{ij} = \begin{cases} -(\bar{E}_i + H_i)\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{rj} + \bar{c}_i\hat{\mathbf{e}}_r\Phi_{xx,rj} & \text{si } x_i \in \Theta - \Gamma \\ \Phi_{x,ij} & \text{si } x_i \in \Gamma \end{cases} \quad (57)$$

donde Θ corresponde al dominio de una geometría de frontera Γ , $\hat{\mathbf{e}}_r$, es el r -ésimo vector de base del espacio \mathbb{R}^N . Las componentes del residuo \mathbf{R} , son \mathbf{R}_u para el desplazamiento y $\mathbf{R}_{\bar{\kappa}}$ para la deformación plástica no local corresponden a la evaluación de (42),(44), (49), (50), (51) y (52) en la iteración y paso de tiempo respectivo. El algoritmo utilizado para el problema unidimensional se muestra en la Tabla 1.

1. Lectura de parámetros y datos geométricos.
2. Obtención de funciones de forma y sus derivadas Φ, Φ_x, Φ_{xx} .
3. Para $t = 0$ hasta $Pasos - 1$
 - a) Establecer $H = E^4$, para prueba elastica, Actualizar $K_{\bar{\kappa}}$ y K .
 - b) Rescatar el desplazamiento prescrito ${}^{t+1}u_p$
 - c) Evaluación de fuerzas internas y externas para inicializar el residuo R .
 - d) hacer ${}^{t+1}\Delta u^h = {}^{t+1}\Delta \kappa^h = \vec{0}$
 - e) Mientras $k \leq Maxiter$
 - I. Resolver el sistema $K \delta u = -R$ y obtener δu^h y $\delta \kappa^h$

$${}^{t+1}\Delta u^h = {}^{t+1}\Delta u^h + \delta u^h$$

$${}^{t+1}\Delta \kappa^h = {}^{t+1}\Delta \kappa^h + \delta \kappa^h$$
 - II. Obtener $\Delta \sigma^{trial} = \bar{E} (\Phi_x({}^{t+1}\Delta u^h) - \Phi({}^{t+1}\Delta \kappa^h))$
 - III. Calcular $\sigma_{trial} = \Delta \sigma_{trial} + {}^t\sigma$

$${}^{t+1}f_{yield} = \sigma_{trial} - \sigma_{yield}$$
 - IV. Para cada nodo evaluar ${}^{t+1}f_{yield_I} \geq 0$

$$\text{Si, } H_I = h$$

$${}^{t+1}f_{yield_I} = 0$$
 - V. Obtención de las fuerzas internas para la evaluación de R
 - VI. Actualización de $K_{\bar{\kappa}}$ y K
 - VII. Evaluar convergencia. $\|R\| \leq tolerancia$

$$\text{Si, ir a } 3f$$

$$\text{No, } k = k + 1, \text{ volver a } 3e$$
 - f) Actualización de parámetros:
$${}^{t+1}u^h = {}^t u^h + {}^{t+1}\Delta u^h$$

$${}^{t+1}\kappa^h = {}^t \kappa^h + {}^{t+1}\Delta \kappa^h$$

$${}^{t+1}u, {}^{t+1}\epsilon, {}^{t+1}\sigma, {}^{t+1}\kappa$$
4. Fin

Tabla 1: Algoritmo para análisis incremental de problemas elastoplásticos con gradientes de deformación plástica no local.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

El problema a reproducir es obtenido desde la literatura (De Borst y Mühlhaus, 1992; Etse y Vrech, 2001). Consistente en una barra unidimensional de longitud $L = 100[mm]$ sometida a tracción simple determinada por el desplazamiento de uno de sus extremos en una magnitud de $u_p = 0,02[mm]$ (ver Fig. 1). El módulo de rigidez corresponde ser $E = 20000[N/mm^2]$ y un esfuerzo de fluencia inicial $\sigma_{yield_0} = 2[N/mm^2]$.

Para inducir la localización de las deformaciones, se trabaja sobre la consideración de una barra con dos materiales diferentes, donde en la parte central de la geometría se utiliza un ma-

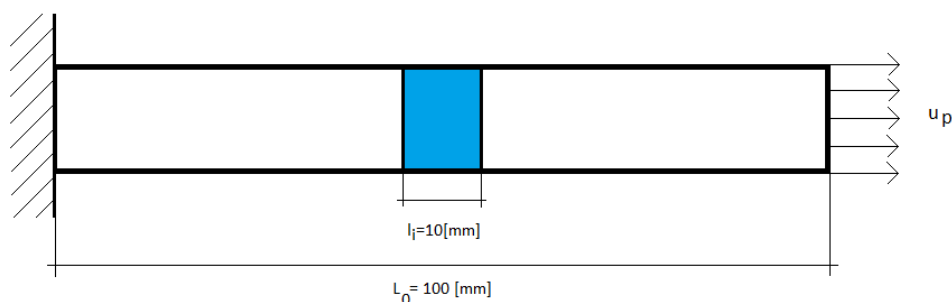


Figura 1: Problema unidimensional desarrollado.

material cuyas magnitudes se han reducido en un 10 % para el módulo de elasticidad E y esfuerzo de fluencia inicial σ_{yield_0} , a modo de ser entendido como una zona con imperfecciones respecto al material principal.

El módulo de ablandamiento usado es $h = -2000$, y el módulo artificial de magnitud $H = E^4$ (De Borst y Mühlhaus, 1992).

Las discretizaciones empleadas para el estudio son 21, 41, 81, 161, 321 y 641 nodos equiespaciados en la longitud del dominio unidimensional.

Se estudia el comportamiento para longitudes características de $l = 0,025L$, $l = 0,05L$ y $l = 0,1L$ (ver Fig. 2). Cuando se utiliza $l/L = 0,025$, la deformación es tal que el esfuerzo se vuelve negativo, razón por lo que el sistema iterativo es detenido en ese momento para un desplazamiento en el extremo de $u_p^* = 0,01425$ [mm]. Esto difiere al procedimiento usado en la literatura (De Borst y Mühlhaus, 1992; Jirásek y Rolshoven, 2003), donde se supone plasticidad perfecta $h^* = 0$ una vez que se alcanza el valor máximo permitido de $\bar{\kappa}_{max} = \sigma_{yield_0}/h$.

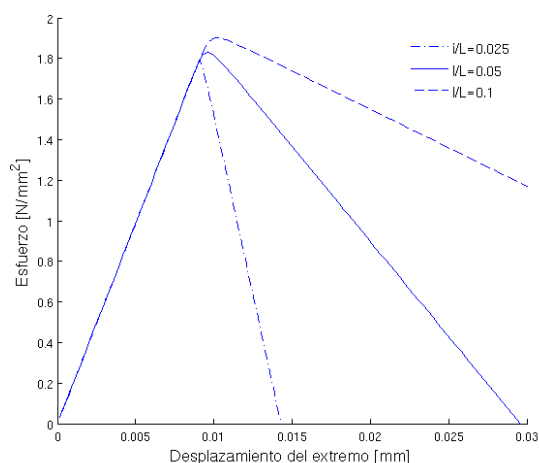


Figura 2: Curva de Esfuerzo-Deformación en una barra sometida a tracción con imperfecciones en función de diferentes relaciones l/L . Discretización de 641 nodos equiespaciados.

Por el contrario, cuando se estudia el comportamiento para una longitud característica adimensionalizada por la longitud inicial $l/L = 0,1$, el fenómeno de ablandamiento es extensivo más allá del desplazamiento prescrito $u_p = 0,02$ [mm] fijado en $u_p = 0,03$ [mm].

Para el estudio detallado se utiliza la longitud característica adimensionalizada $l/L = 0,05$ hasta un desplazamiento prescrito $u_p = 0,02$ [mm], pues entrega soluciones con pérdida de

sentido físico a partir de $u_p^{**} = 0,0297[mm]$ porque σ adquiere valores negativos.

Para la longitud característica de $l/L = 0,05$, se estudia la solución entregada por diferentes discretizaciones (ver Fig. 3). Se observa que la solución se vuelve independiente de la discretización empleada a partir de una discretización de 161 nodos.

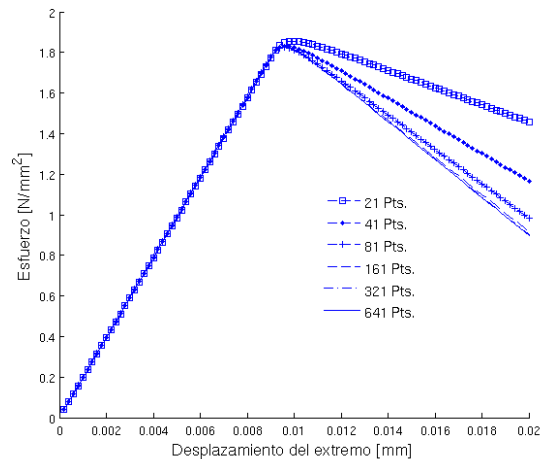


Figura 3: Curva de Esfuerzo-Desplazamiento en una barra con imperfección en el centro sometida a tracción para diferentes discretizaciones.

Al estudiar el perfil de deformación total (ver Fig. 5) y de la deformación plástica no local $\bar{\kappa}$ (ver Fig. 4) para las distintas discretizaciones empleadas (21, 41, 81, 161, 321 y 641 puntos), se comprueba también, en consistencia a lo descrito en el párrafo anterior que la solución es independiente de la malla a partir de la discretización de 161 puntos equiespaciados (ver Fig. 3).

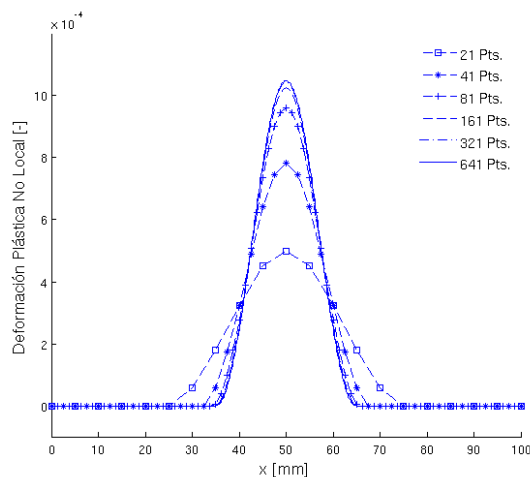


Figura 4: Distribución de la deformación plástica no local en una barra con imperfecciones en el centro sometida a tensión para diferentes discretizaciones.

Por análisis de la ecuación de equilibrio y función de fluencia (Eqs. (20) y (27)) una vez que el ablandamiento se desarrolla, el esfuerzo de fluencia en la zona debilitada disminuye en magnitud lo que provoca que el esfuerzo axial en tal zona disminuya para mantenerse en el borde de la superficie de fluencia y constante en toda la longitud de la barra, lo que se refleja en una descarga elástica de los puntos alejados de la zona debilitada.

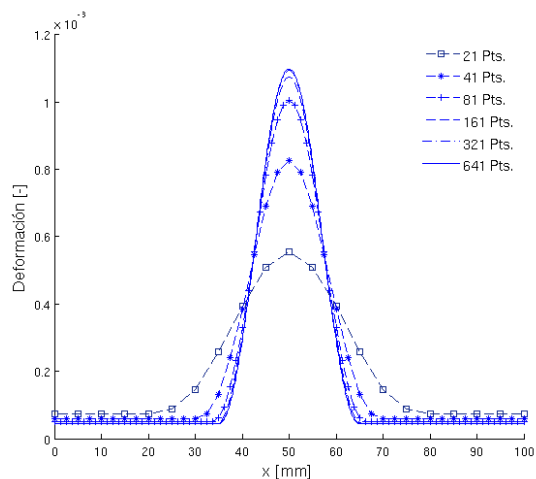


Figura 5: Distribución de la deformación total ε^P en una barra con imperfecciones en el centro sometida a tensión para diferentes discretizaciones.

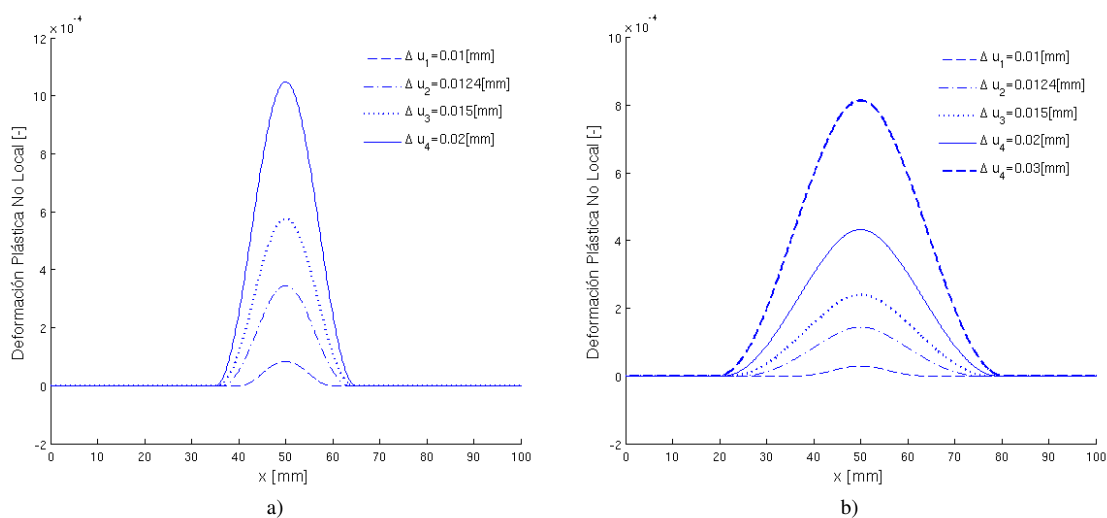


Figura 6: Evolución de la deformación plástica no local en la barra unidimensional. Discretización de 641 nodos equiespaciados. a) Previo a la localización de deformaciones. b) Posterior a la localización de deformaciones.

Al aumentar el desplazamiento prescrito en el extremo de la barra (ver Fig. 7.a), la pendiente de la curva aumenta también de manera homogénea para todos los puntos. Sin embargo, cuando el ablandamiento en la zona debilitada comienza a desarrollarse (ver Fig. 7.b), la localización de la deformaciones se hace manifiesta y los nodos en la zona de material no debilitada presentan descarga elástica disminuyendo la pendiente en la curva en estos.

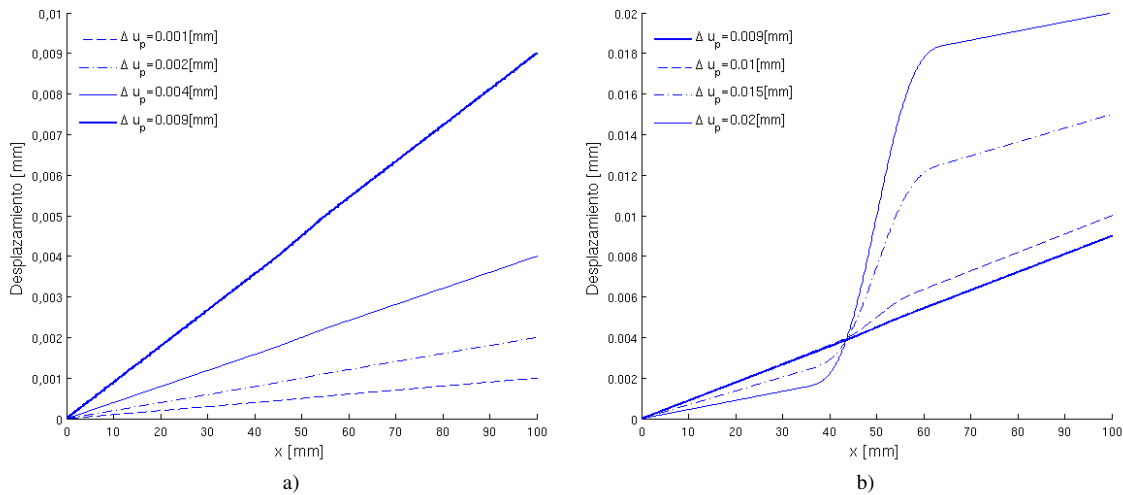


Figura 7: Evolución del desplazamientos en la barra unidimensional. Discretización de 641 nodos equiespaciados. a) Previo a la localización de deformaciones. b) Posterior a la localización de deformaciones.

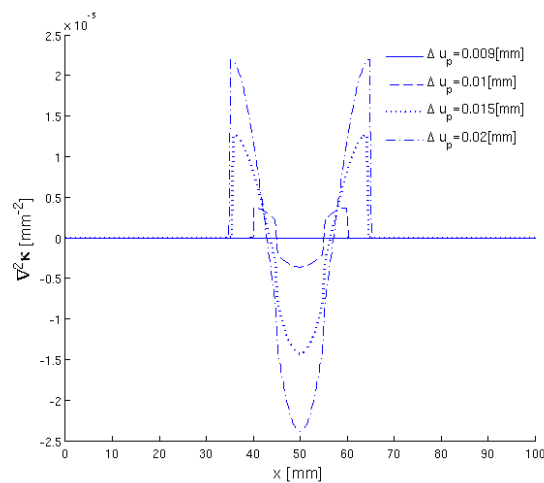


Figura 8: Evolución del laplaciano de la deformación plástica no local $\nabla^2 \bar{\kappa}$. Discretización de 641 nodos equiespaciados.

La influencia de los gradientes de la deformación plástica no local como técnica para la regularización de la solución del problema elastoplástico, se hace relevante y fundamental cuando la localización de la deformaciones a ocurrido (ver Fig. 8). Antes de la localización de deformaciones, cuando el material se encuentra en su rango de comportamiento elástico lineal, el segundo gradiente de deformación plástica no local es en términos prácticos nulo ($\nabla^2 \bar{\kappa} \sim 10^{-26} \approx 0$), el que aumenta rápidamente cuando el ablandamiento ha comenzado a desarrollarse actuando sobre la condición de consistencia y función de fluencia regularizando la solución.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado la implementación de gradientes de deformación plástica no local para tratar el fenómeno de ablandamiento isotrópico utilizando el método sin malla de Puntos Finitos. La naturaleza sin malla de la técnica numérica utilizada y la formación de la base de interpolación permite de manera conveniente utilizar las funciones de forma tanto para los campos de desplazamiento como los de deformación plástica no local.

La técnica de regularización de la solución al problema elastoplástico con ablandamiento por medio de los gradientes de deformación plástica no local entrega resultados objetivos y consistentes al problema físico y lo presentado en la literatura, es decir, aumento notorio en la zona debilitada de la deformación plástica bajo un comportamiento de ablandamiento y descarga elástica para los nodos pertenecientes a la zona no debilitada.

Los resultados numéricos comprueban la independencia de la solución respecto a la discretización utilizada a partir de una cantidad de puntos. Comparando los puntos de máxima deformación se determinó que el error entre la discretización de 641 y 321 puntos es menor a 0.1 %. La solución no es dependiente de la discretización, pero sí lo es de la longitud característica en torno a la cual se promedió la deformación en la definición no local de ésta. Debido a las características no locales de la deformación plástica el esfuerzo máximo pre-ablandamiento es levemente mayor a medida que la longitud característica es aumentada debido al aporte de la deformación de la vecindad a la zona ablandada.

En consideración a lo anterior las líneas de investigación futuras de los autores se extenderán a la aplicación de los gradientes de deformación no local por medio del MPF en problemas en 2 y 3 dimensiones con ablandamiento isotrópico, inducidas por la geometría e imperfecciones en el material.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el patrocinio otorgado para la realización de este trabajo científico a través del proyecto FONDECYT N° 11100253.

REFERENCIAS

- Bažant Z. y Lin F. Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1805–1823, 1988.
- Chen J., Wu C., y Belytschko T. Regularization of material instabilities by meshfree approximations with intrinsic length scales. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1303–1322, 2000.
- Comi C. y Perego U. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3731–3755, 1996.
- De Borst R. y Mühlhaus H. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:521–539, 1992.
- Etse G. y Vrech S. Teoría constitutiva de gradientes para modelos materiales elastoplásticos. *Mecánica Computacional*, 20:155–162, 2001.
- Fleck N.A. y Hutchinson J.W. *Advances in Applied Mechanics*, volumen 33. Academic Press, 1997.
- Jirásek M. y Rolshoven S. Comparison of integral-integral type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 41:1553–1602, 2003.

- Neto E., Perić D., y D. O. *Computational Methods for Plasticity. Theory and Applications*. Wiley, 2008.
- Oñate E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., Taylor R., y Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996a.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., y Taylor R. A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866, 1996b.
- Oñate E., Perazzo F., y J.Miquel. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Oller S. *Fractura Mecánica. Un enfoque global*. CIMNE, 2001.
- Owen D. y Hinton E. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, volumen II. Pineridge Press Limited, 1980.
- Peerlings R., De Borst R., Brekelmans W., y De Vree J. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391–3403, 1996.
- Perazzo F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona España, 2002. Tesis Doctoral.
- Perazzo F., Oller S., Miquel J., y Oñate E. Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Pérez-Pozo L. y Perazzo F. Non-linear material behaviour analysis using meshless finite point method. In *2nd ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, páginas 251–268. Porto, Portugal, 2007.
- Pérez-Pozo L., Perazzo F., y Angulo A. A meshless FPM model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Polizzotto C. Gradient elasticity and nonstandard boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 40:7399–7423, 2003.
- Rodríguez-Ferran A., Morata I., y Huerta A. A new damage model based on non-local displacements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29:473–493, 2005.
- Rolshoven S. y Jirásek M. Nonlocal formulations of softening plasticity. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- Vrech S. y Etse G. Análisis geométrico de localización para plasticidad regularizada mediante teoría de gradientes. *Mecánica Computacional*, 23, 2004.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *El método de los elementos finitos*, volumen 1. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona España, 2000.