

REGULARIZACIÓN DE LA ENERGÍA DE FRACTURA PARA EL ANÁLISIS DE DAÑO ISOTRÓPICO MEDIANTE EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

Luis C. Pérez , Felipe H. Chacana y Juan L. Quelin

Departamento de Ingeniería Mecánica, Aula UTFSM-CIMNE, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile, <http://www.mec.utfsm.cl>

Palabras Clave: Métodos sin malla, daño isotrópico, energía de fractura, localización de deformaciones.

Resumen. La aplicación de la Teoría de Daño isotrópico en materiales continuos ha sido desarrollada ampliamente en el Método de Elementos Finitos (MEF), presentándose algunos problemas de dependencia del tamaño de la malla, lo cual ha conducido a la formulación de técnicas que regulen la energía de fractura y permitan estudiar la localización de las deformaciones. Esta problemática se presenta como un tema abierto en la mecánica de sólidos computacional, por tal motivo resulta interesante estudiarla desde la perspectiva de una técnica sin malla.

En este trabajo se utiliza el método sin malla de Puntos Finitos (MPF) para el estudio de la teoría de daño isotrópico con regularización de la energía de fractura mediante un proceso iterativo/incremental de Newton-Raphson para la resolución de la no-linealidad del problema. Se valida la metodología propuesta por medio de ejemplos numéricos obtenidos de la literatura relacionada.

1. INTRODUCCIÓN

El daño en un sólido continuo, en el sentido de la degradación de la rigidez, es una alteración de las propiedades mecánicas durante el proceso de aplicación de una carga consecuencia de una disminución del área efectiva resistente (Maugin, 1992). Tal pérdida del área efectiva es normalmente causada por el crecimiento de micro fisuras.

La teoría del daño continuo fue presentada por primera vez por Kachanov en el año 1958, siendo aceptada como alternativa válida para simular el comportamiento de diversos materiales. Dentro de las formulaciones posibles, en este trabajo se implementa un modelo de daño simple con una variable interna escalar que permite caracterizar el daño local. Este tipo de modelo permite simular el comportamiento de materiales en los que ocurre una degradación de la rigidez una vez que la carga impuesta supera el umbral de daño del material. En el marco de las técnicas numéricas que son capaces de simular este tipo de modelo, se encuentra el Método de Elementos Finitos MEF (Zienkiewicz y Taylor, 2000) el cual puede aproximar el fenómeno pero al mismo tiempo presenta fuerte dependencia con respecto a la densidad de la malla para obtener una respuesta relacionada con el fenómeno de localización de deformaciones y la energía de fractura parámetro vinculante entre la mecánica clásica y la mecánica de medios continuos (Bazant y Oh, 1983). En este marco se presenta el Método de Puntos Finitos MPF ((Oñate et al., 2001), (Perazzo, 2002), (Perazzo et al., 2006), (Pérez-Pozo et al., 2009)), técnica numérica sin malla que es capaz de aproximar los campos de desplazamientos y deformaciones, también se desarrollaran las correspondientes técnicas para poder representar adecuadamente el fenómeno de localización de deformaciones y regular la energía de fractura.

El trabajo contempla la introducción al MPF, descripción del modelo de daño isotrópico o escalar, desarrollo de técnica numérica del MPF, la regularización de la energía de fractura, se valida la metodología por medio de ejemplos numéricos obtenidos de la literatura relacionada.

2. METODO DE PUNTOS FINITOS

El MPF realiza la aproximación local de una función incógnita $u = u(x)$ para cada uno de los N nodos x_I de la discretización del dominio, tal que $1 \leq I \leq N$, usando como criterio la minimización de los errores cuadráticos ponderados (Oñate, 1996; Oñate et al., 1996a,b; Oñate et al., 2001; Pérez-Pozo et al., 2009).

Sea $\omega_I \subset [a, b]$ subintervalo de un dominio unidimensional $\Omega : \{x \mid a \leq x \leq b\}$ donde se realiza la aproximación local para $x_I \in \omega_I$.

Se define al conjunto $\{x_{I,1}, \dots, x_{I,n_I}\}$ como *nube* asociada al nodo x_I , formada por los n_I nodos de la discretización contenidos en ω_I ; x_I recibe el nombre de *nodo estrella* de la *nube* I -ésima y $x_{I,k}$, $1 \leq k \leq n_I$ corresponde al nodo k -ésimo de la *nube* I -ésima, donde se cumple necesariamente que para cada I existe un único k de modo que $x_I = x_{I,k}$.

Considérese la base $\langle p_{I,1}(x), \dots, p_{I,m_I}(x) \rangle$ de funciones linealmente independientes en cada subintervalo ω_I para la definición de la forma de la función de aproximación, cuya dimensión m_I es la misma para todos los N subintervalos. En este trabajo se consideran $m_I = 3$ con $p_{I,1}(x) = 1$, $p_{I,2}(x) = x$, $p_{I,3}(x) = x^2$. Para la correcta implementación del MPF, se debe cumplir la condición $n_I > m_I = 3$.

Tomando $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,m_I}$, la aproximación $\tilde{u}(x)$ de $u(x)$ en I_I es de la forma

$$\tilde{u}_I(x) = \alpha_{I,1}1 + \alpha_{I,2}x + \alpha_{I,3}x^2 \quad (1)$$

Para w_I , se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,3}$ tal que se minimice el valor

$$J_I = \sum_{k=1}^{n_I} w(x_{I,k}) (u_I^h(x_{I,k}) - \tilde{u}_I(x_{I,k}))^2 \quad (2)$$

Donde la función $w(x_I) = w_I$ recibe el nombre de *función peso*.

Sea $h_{I,k}$ distancia entre el nodo $x_{I,k}$ con el nodo estrella. Para dar un carácter local en la aproximación por el MPF la función de peso usualmente utilizada es la que sigue:

$$w_I(x_{I,k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(h_{I,k}/\lambda_I)} - e^{-(r_I/\lambda_I)}}{1 - e^{-(r_I/\lambda_I)}} & \text{si } h_{I,k} \leq r_I \\ 0 & \text{si } h_{I,k} > r_I \end{cases} \quad (3)$$

siendo $r_I = q \cdot h_{\text{máx}}$, con $h_{\text{máx}} = \text{máx}\{h_{I,1}, \dots, h_{I,n_I}\}$, y $\lambda = \beta \cdot r_I$, donde q y β son parámetros positivos escogidos según algún criterio. En adelante se utiliza $q = 1,1$ y $\beta = 0,25$ (Pérez-Pozo et al., 2009).

Para problemas de tipo unidimensionales, el criterio de selección de nodos corresponde ser los $n_I - 1$ nodos más cercanos a x_I . En este trabajo se utiliza $n_I = 5$.

Sean

$$\mathbf{p}_I(x) = [p_{I,1}(x) \dots p_{I,3}(x)] \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \begin{pmatrix} \alpha_{I,1} \\ \vdots \\ \alpha_{I,3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_I^h = \begin{pmatrix} u(x_{I,1}) \\ \vdots \\ u(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_I(x_{I,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_I(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Considerando $J_I = J_I(\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I})$ función definida desde la ecuación (2). El valor mínimo de J_I se alcanza en su punto crítico, por lo que para cada nube I se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I}$ tal que $\nabla J_I = \mathbf{0}$, obteniéndose:

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I^h \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I \mathbf{P}_I \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I$$

siendo \mathbf{A}_I la matriz de momentos y \mathbf{W}_I la matriz diagonal de orden $n_I \times n_I$ con término $(\mathbf{W}_I)_{k,k} = w_I(x_{I,k})$. De este modo, reemplazando (6) en (1) se obtiene

$$\tilde{u}_I(x) = \boldsymbol{\varphi}_I(x) \mathbf{u}_I^h \quad (7)$$

con

$$\boldsymbol{\varphi}_I(x) = \mathbf{p}_I(x) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad (8)$$

La aproximación de las derivadas de $\mathbf{u}(x)$, se realiza por la derivación directa de la relación (7), la que afecta únicamente a las funciones de la base de interpolación del vector $\mathbf{p}_I(x)$ definidos en (4) dentro de la ecuación (8).

Para controlar el condicionamiento de la matriz de momentos, la base de interpolación es centrada y adimensionalizada (Oñate et al., 2001):

$$p_{I,1}(x) = 1, \quad p_{I,2}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right), \quad p_{I,3}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right)^2$$

3. MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO

Este modelo de daño continuo ha sido utilizado comúnmente para simular el comportamiento de materiales que presentan una degradación de sus propiedades mecánicas debido a pequeñas fisuras que aparecen durante el proceso de carga (Kachanov, 1958). Para caracterizar esto se introduce el concepto de esfuerzo efectivo, $\bar{\sigma}$ (Ver Figura 1).

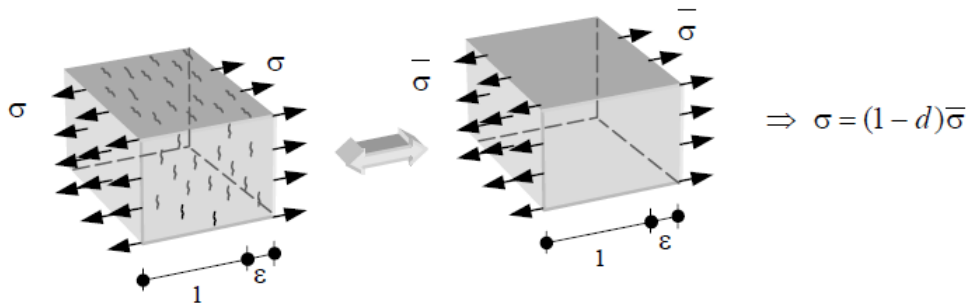


Figura 1: Concepto de Esfuerzo Efectivo

Para una dimensión se puede escribir (Ver Figura 2)

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (9)$$

Donde $\bar{\sigma}$ es el esfuerzo efectivo y d es el parámetro de daño con rango $0 \leq d \leq 1$.

El esfuerzo con la deformación efectiva ε pueden ser relacionados mediante la ley de Hooke:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (10)$$

Donde E es el modulo elástico del material, entonces sustituyendo (9) en (10) se obtiene:

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (11)$$

3.1. Ecuación Constitutiva

En el modelo de daño isotrópico se considera la función densidad de energía libre de Helmholtz ψ como:

$$\psi = (1 - d)\psi^e = (1 - d)\varepsilon : C^e : \varepsilon \quad (12)$$

Que para el caso elástico isotrópico C^e corresponde al tensor de cuarto orden construido en función de las constantes de Lamé.

De la ecuación (12) se puede obtener la ecuación constitutiva

$$\sigma = \frac{\partial \psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (13)$$

Donde $\bar{\sigma}$ es el esfuerzo efectivo definido como:

$$\bar{\sigma} = C^e : \varepsilon \quad (14)$$

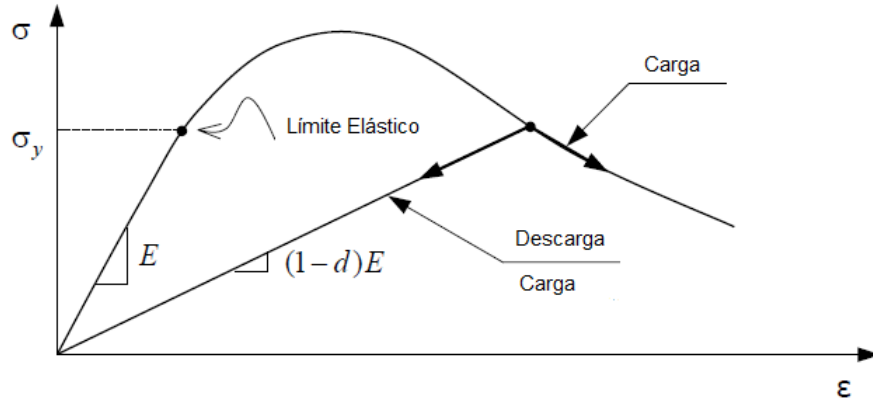


Figura 2: Gráfico esfuerzo deformación modelo de daño

y la disipación Ξ resulta:

$$\Xi = -\dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{d}\psi^e \tag{15}$$

El cual caracteriza a un proceso irreversible (para mas detalles ver (Lemaitre, 1996)). Dado $\psi^e \geq 0$ por definición , entonces se debe cumplir que $\dot{d} \geq 0$ para así satisfacer el requerimiento termodinámico (15).

Las siguientes normas en el espacio de esfuerzos y deformación son definidas, respectivamente como:

$$\underbrace{\tau_\sigma = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C^{e-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : C^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \tau_\varepsilon = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{C^e} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : C^e : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2\psi^e}}_{\tau_\sigma = (1-d)\tau_\varepsilon} \tag{16}$$

Con estos conceptos se pueden definir las regiones elásticas en los espacios ya definidos como:

$$\Xi_\varepsilon := \{\boldsymbol{\varepsilon} | \zeta(\tau_\varepsilon, r) < 0\} \tag{17}$$

$$\Xi_\sigma := \{\boldsymbol{\sigma} | \mathcal{F}(\tau_\sigma, q) < 0\} \tag{18}$$

Donde r es la variable interna la cual define el limite elástico, así se puede definir el criterio de daño respectivamente como:

$$\underbrace{\mathcal{F}(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q(r) \leq 0}_{\text{Espacio de tensiones}} \quad ; \quad \underbrace{\zeta(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r \leq 0}_{\text{Espacio de deformaciones}} \tag{19}$$

De la ecuación (16) para el caso uniaxial se obtiene :

$$r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \tag{20}$$

Parámetro que define el umbral inicial de daño, σ_y es el esfuerzo limite elástico. Por otro lado $q(r)$ es la variable de ablandamiento / endurecimiento definida como:

$$q(r) = (1-d)r \tag{21}$$

Con esto se puede reescribir el esfuerzo como:

$$\sigma = \frac{q(r)}{r} \bar{\sigma} \quad (22)$$

3.2. Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento esta caracterizada por las siguientes expresiones :

$$\dot{q} = H^d(r) \dot{r} \quad ; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0 \quad q \in [0, \sigma_y] \quad ; \quad q_0 = r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \quad (23)$$

Donde $H^d(r)$ es el parámetro continuo de ablandamiento/endurecimiento. La figura 3 muestra dos típicas reglas de ablandamiento/endurecimiento usadas en el análisis de daño continuo.

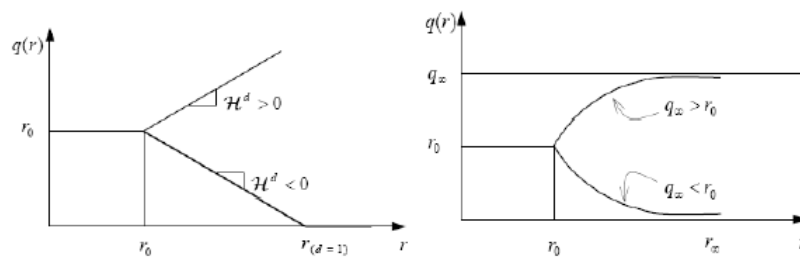


Figura 3: Regla lineal y exponencial de ablandamiento/endurecimiento

Con lo cual el parámetro de daño d , queda definido como :

$$d = 1 - \frac{q}{r} \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d(1 - \frac{r_0}{r}) & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

La ley de evolución del umbral de daño y la variable interna de daño son:

$$\dot{r} = \gamma \quad (24)$$

$$\dot{d} = \gamma \frac{\partial F(\tau_\sigma, q(r))}{\partial r} \quad (25)$$

Donde γ es el parámetro de consistencia de daño usado para definir las condiciones de carga y descarga (Condiciones de Kuhn-Tucker) :

$$\gamma \geq 0 \quad : \quad F(\tau_\sigma, q) \leq 0 \quad : \quad \gamma F(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (26)$$

y la ecuación de persistencia:

$$\gamma \dot{F}(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (27)$$

4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

4.1. Discretización mediante Colocación Puntual

Considere el siguiente problema de contorno gobernado por ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \text{ en } \Omega \quad (28)$$

$$B(\mathbf{u}) = \mathbf{t} \text{ en } \Gamma_t \quad (29)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_p = 0 \text{ en } \Gamma_u \quad (30)$$

Donde A y B son operadores diferenciales y u es la función incógnita del problema. En problemas de mecánica de sólidos, A y B Corresponden a las ecuaciones de equilibrio, u es el campo de desplazamientos, b son las fuerzas de cuerpo sobre el dominio Ω , t son las tracciones sobre Γ_t y u_p representa los valores prescritos del campo de desplazamientos sobre Γ_u .

Usando el método de colocación puntual (Zienkiewicz y Taylor, 2000), las ecuaciones diferenciales (28), (29), (30) y la aproximación final del MPF definido en (7), se obtiene el siguiente sistema discreto de ecuaciones.

$$[A(\tilde{u})]_i - b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, N_a \quad (31)$$

$$(B(\tilde{u}))_j - t_j = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad j = 1, N_t \quad (32)$$

$$(\tilde{u} - u_p)_k = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad k = 1, N_u \quad (33)$$

Donde N_a Es el número de puntos al interior de Ω ay N_t, N_u son los números de puntos en los contornos Γ_t and Γ_u respectivamente.

Finalmente el sistema discreto se puede escribir en forma compacta como :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (34)$$

donde la matriz \mathbf{K} contiene a las funciones de forma $\Phi_I(x)$, \mathbf{u}^h contiene a los parametros desconocidos o incognitas del problema y \mathbf{f} contiene a los terminos de fuerzas \mathbf{b} , \mathbf{t} y los desplazamientos \mathbf{u}_p .

4.2. Modelo lineal de esfuerzo en MPF

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un solido lineal, cuyas fuerzas inerciales son despreciables

$$\nabla \sigma(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (35)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (36)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (37)$$

Considerando el método de colocación puntual definido en la sección 4.1 podemos obtener el sistema discreto de ecuaciones cuya forma matricial compacta es:

$$\mathbf{L}^T \sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (38)$$

$$\mathbf{N}^T \sigma = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (39)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (40)$$

Donde L un operador que define la ecuación diferencial, N matriz que contiene los cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno, σ es el vector de tensiones, u es el vector de desplazamientos, ρb , \bar{t} y \hat{u} son las fuerzas másicas, fuerzas distribuidas y desplazamientos prescritos respectivamente.

4.2.1. Interface de Materiales en MPF

Para problemas en los cuales se considera la degradación y/o variación de las propiedades mecánicas de un material, el modelo lineal del MPF, no es capaz de capturar la información respecto de las propiedades de los puntos vecinos, razón por la cual se debe desarrollar un nuevo sistema que sea capaz de representar tal situación.

Considere el dominio de un cuerpo sólido Ω tal que puede ser construido mediante π_n sólidos tal que:

$$\cup \pi_i = \Omega \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n \quad (41)$$

$$\cap \pi_i = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n \quad (42)$$

Con esto y dada la naturaleza de la interpolación definida en la sección 2 se tendrá que considerar que el tensor constitutivo C no será constante para la construcción de la aproximación (Pérez, 2008), por lo cual se debe aplicar la regla de la cadena mediante el operador L al vector de tensiones σ .

4.3. Ecuación de Gobierno para Daño Isotrópico en MPF

A continuación se desarrolla la formulación para implementar numéricamente el MPF para un modelo de daño isotrópico en 2D. Este procedimiento puede ser aplicado para el caso 3D, siempre que se tengan en cuenta las consideraciones geométricas y físicas del problema en cuestión.

Los operadores descritos en la sección 4.2 toman la siguiente forma para el caso 2D.

$$\begin{aligned} L &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} & N &:= \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \\ \sigma &:= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} & u &:= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \rho b &:= \begin{bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{bmatrix} & \bar{t} &:= \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} & \hat{u} &:= \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para obtener un sistema equivalente en términos de los desplazamientos, se debe usar la relación tensión/deformación y la relación/deformación desplazamientos de la siguiente forma

$$\sigma = (I - d)C\varepsilon \quad \text{en donde} \quad \varepsilon = Lu \quad (43)$$

Considerando la teoría descrita en 4.2.1 y reemplazando (43) en el sistema de ecuaciones (38)

,(39) y (40) se obtiene el siguiente sistema matricial de ecuaciones.

$$\underbrace{(I - d)\mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \Phi \mathbf{u}^h}_{\text{Comportamiento elástico lineal}} + \underbrace{(I - d)(\mathbf{L} \Phi)^T \mathbf{C} \mathbf{L} \Phi \mathbf{u}^h}_{\text{Interface de Materiales}} - \underbrace{(\mathbf{L} \Phi d)^T \mathbf{C} \mathbf{L} \Phi \mathbf{u}^h}_{\text{Interface de Daño}} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (44)$$

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (45)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (46)$$

Con su forma compacta

$$\mathbf{K}_{dI} \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_I \quad I = 1, \dots, N \quad (47)$$

En donde \mathbf{K}_d es la matriz de rigidez de daño en MPF y Φ es la matriz que contiene a las funciones de forma $\varphi(x)$.

4.4. Algoritmo de Daño Isotrópico en MPF

1. Lectura de parámetros del problema y datos geométricos.
2. Generación de nubes de interpolación y Funciones de forma
3. Iniciación de variables de control e.g. (Paso,d).
4. Obtener la matriz de rigidez de daño K_d
5. Obtener el predictor de desplazamientos u^h
6. Mientras $d < 1$ y $Pasos < Paso$
 - a) Obtención de \mathbf{u} y ε .
 - b) Integración del modelo de daño isotrópico.
 - c) Obtención de las derivadas del tensor C y la variable de daño d.
 - d) Hacer 4
 - e) Obtener el Residuo de fuerzas

$$Re = K_d u^h$$

- f) Iniciación contador de iteraciones $Iter = 0$
- g) Secuencia de iteración para convergencia
Mientras Norma del Residuo de fuerzas $> TOL$.
 - I. Actualización de iteraciones $Iter = Iter + 1$.
 - II. Obtención desplazamiento impuesto du^h .

$$du^h = -[K_d]^{-1} Re$$

- III. Corrección del desplazamiento.

$$u^h = u^h + du^h$$

- IV. Hacer 6a hasta 6e y verifique la condición de tolerancia 6g.

- h) Actualización del paso de carga $Paso = Paso + 1$.

7. Fin proceso de cálculo modelo de daño isotrópico.

Tabla 1: Algoritmo Iterativo/incremental modelo de daño isotrópico mediante MPF

5. REGULARIZACIÓN DE LA ENERGÍA DE FRACTURA

Considere las siguientes funciones de endurecimiento escalar y acotadas entre 0 y 1 propuestas por (Oliver et al., 1990), Para el caso lineal se tiene :

$$G[r] = \frac{1 - r_0/r}{1 + A} \quad (48)$$

Y para el exponencial :

$$G[r] = 1 - \frac{r_0}{r} e^{A(1 - \frac{r}{r_0})} \quad (49)$$

Siendo r la norma definida como criterio en (17) y (18) cuyo valor inicial esta dado en (20), A es un parámetro que depende de la energía de fractura del material. Para el modelo implementado en este trabajo el parámetro A en forma particular es :

$$A = -\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{g_f} \quad (50)$$

En donde g_f es la máxima energía específica que disipa un modelo continuo en un problema de tracción pura, durante un proceso que simula el comportamiento real a fractura de un sólido. Con esto se obtiene la relación entre la energía de fractura por unidad de área G_f , que es un parámetro del material y la máxima energía por unidad de volumen g_f . Esto es :

$$G_f = l_p * g_f \quad (51)$$

Con lo anterior puede verse que la energía específica no es una propiedad del material, si no que depende de la dimensión de la zona del sólido cuyo comportamiento es disipativo .

5.1. Medida de la zona de comportamiento inelástico, longitud característica en MPF

Para garantizar objetividad y exactitud en la solución, la determinación precisa de l_p debe ser propuesta. Esta longitud en el marco del MPF debe considerar a lo menos tres componentes principales las cuales son :

1. La cantidad de puntos de la discretización espacial.
2. La cantidad de puntos por nubes de interpolación.
3. La función de ponderación de Gauss.

Con lo anterior se puede llegar a establecer una formulación simple de l_p

$$l_p = \varsigma * \delta \quad (52)$$

lo cual para el caso unidimensional δ representa la distancia desde el nodo central hasta el nodo vecino y en el caso bidimensional representa la distancia entre el nodo central y algún nodo vecino perteneciente a la misma nube de interpolación. El valor ς representa la cantidad de sigmas de influencia o peso que poseen los nodos dentro de la aproximación por la función de gauss (Canavos, 1988), con esto se puede definir un límite de longitud para cada nube, en los múltiples ensayos realizados (1D y 2D) en forma particular se obtiene una respuesta objetiva con $\varsigma = 2$, con el cual se obtiene δ a partir del análisis de la función de peso aproximando al nodo más cercano el valor de corte establecido por ς , es decir, el corte se realiza cerca de $w(x_I) = 0,005$. Esta propuesta se debe a que para poder aproximar el campo de desplazamientos con las interfaces definidas en (44) se requiere un alto número de nodos por nube, pero la ponderación por la función de peso disminuye los aportes de los nodos extremos reduciendo así el tamaño objetivo de la nube para el análisis de energía.

6. RESULTADOS NUMERICOS

Para los ejemplos a desarrollar se consideran discretizaciones regulares de puntos en el caso 1D e irregulares en 2D. La cantidad de puntos en las nubes de interpolación sera propia de cada problema.

6.1. Interface de Materiales

Considere el esquema de la figura 4 sometida a tracción uniaxial. Los parámetros geométricos y mecánicos son $L = 10$, área $A = 1$, Modulo elástico $E1 = 1$ y $E2 = 0,9E1$ y desplazamiento prescrito $u_p = 0,1$

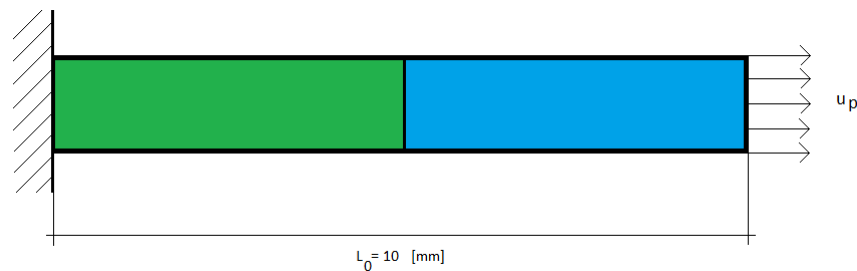


Figura 4: Esquema geometría problema bimaternal en tracción

cuya solución teórica esta dada por (Arun et al., 2001) :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{E2 \cdot x}{5 \cdot (E1 + E2)} & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ \frac{E1 \cdot (x-5) + 5 \cdot E2}{5 \cdot (E1 + E2)} & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Las figuras 5 y 6 muestran la aplicación , es notable el efecto que se obtiene en la solución , siendo fundamental para la posterior implementación de modelos que degraden las propiedades mecánicas.

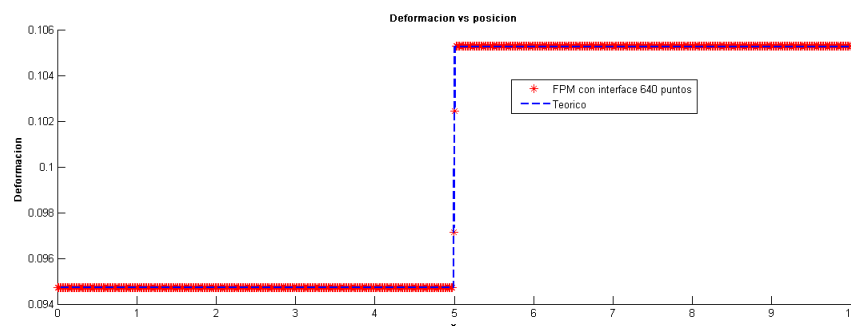


Figura 5: Visualización efecto de aplicación de interface de materiales en MPF

6.2. Test de tracción 1D

El problema consiste en estirar uniaxialmente una barra, hasta que el proceso de degradación produzca la falla del material ($d = 1$). Los parámetros geométricos y mecánicos utilizados para

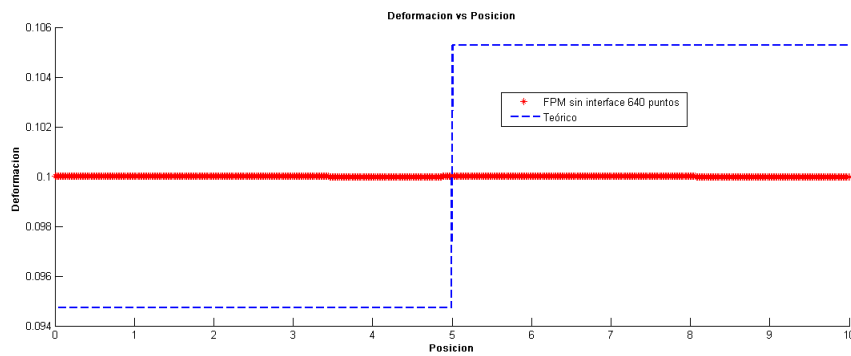


Figura 6: Visualización efecto de no aplicar la interface de materiales en MPF

la simulación numérica son $L_0 = 100[\text{mm}]$, área $A = 10[\text{mm}^2]$, tensión límite $\sigma_l = 2[\frac{N}{\text{mm}^2}]$, modulo de Young $E = 20000[\frac{N}{\text{mm}^2}]$, energía de fractura $G_f = 0,0125[\frac{N}{\text{mm}^2}]$. En cuanto al mecanismo de degradación se considera lineal, para generar el fenómeno de localización se degrada la región central de la barra $l_i = 10[\text{mm}]$ en donde el módulo de Young se reduce en un 10%, el esquema del problema se presenta en la figura 7. Para el desarrollo de este ejemplo se utiliza una discretización regular de puntos (80, 160, 320, 640) y 5 puntos por nube de interpolación. Los resultados obtenidos concuerdan con los obtenidos por Cervera (2008), Rodríguez-Ferran et al. (2011) y Sanchez et al. (2003), esta técnica muestra claramente convergencia a una solución objetiva y precisa al fenómeno de localización, además de presentar una convergencia con energía de fractura finita a medida que se refina la discretización. En la figura 8 se ha graficado el comportamiento de la variable interna de daño para las múltiples discretizaciones, puede observarse en la figura 8 la variación de la energía específica, la cual al evaluarla en (51) se obtiene la energía de fractura, manteniendo un valor constante, lo cual otorga objetividad a la solución.

La figura 9.a presenta la evolución del daño para distintos pasos de carga para una discretiza-

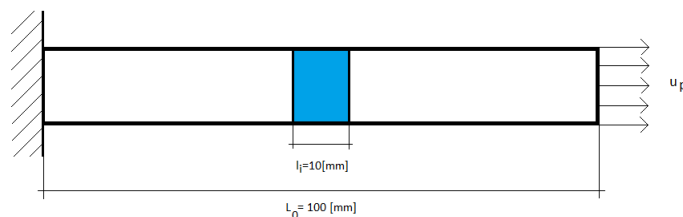


Figura 7: Esquema geometría problema barra en tracción

ción de 320 puntos y 5 puntos por nube de interpolación, La geometría en el inicio del proceso es debida a la interface de material y daño, las cuales aproximan para el dominio la solución de equilibrio. En forma análoga se presenta la figura 9.b el gráfico de evolución carga y descarga para distintos pasos, en los cuales se libera la carga para un determinado nivel de daño en el material, obteniendo así una descarga elástica, la cual es representativa según lo expuesto en Oller (2001).

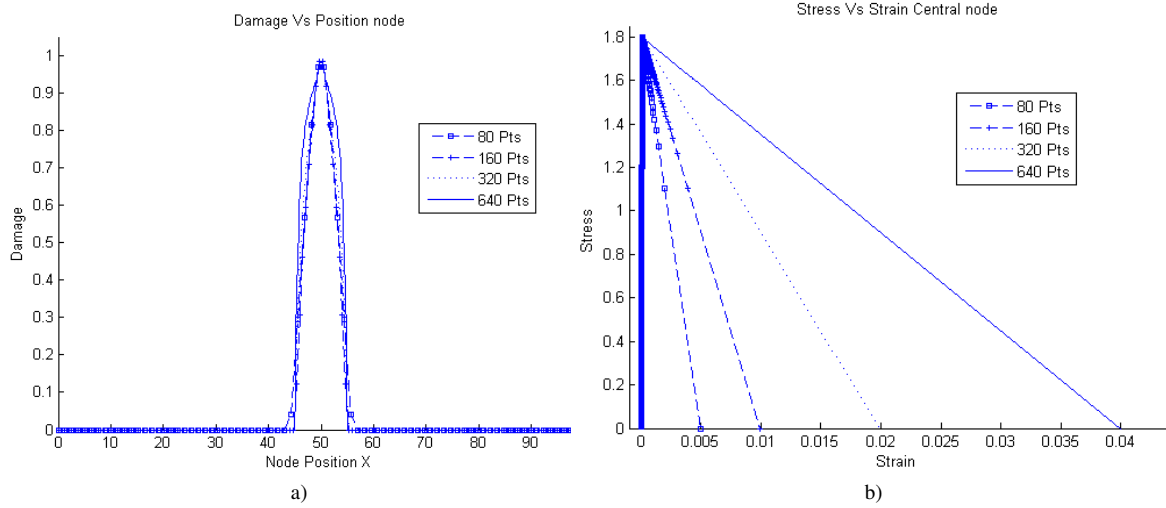


Figura 8: Resultado con diferentes discretizaciones. a) Comportamiento variable interna de daño . b) Proceso de Carga-descarga completo.

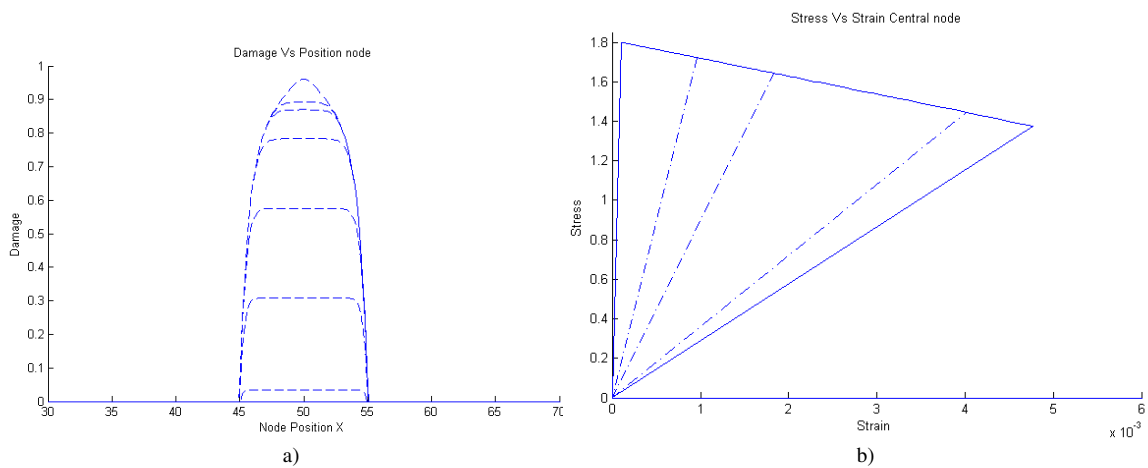


Figura 9: Carga-Descarga elástica con daño parcial. a) Evolución variable interna de daño . b) Proceso de Carga con descarga elástica.

6.3. Test de tracción 2D

A continuación se presenta un ejemplo sobre la fractura en una probeta de acero, cuyo objetivo es mostrar el comportamiento que adquiere el modelo de daño aplicado con MPF. En este marco considere una probeta con muescas en el centro como se muestra en la figura 10.a la cual presenta las condiciones de geométricas y de contorno, mientras que 10.b , presenta una discretización irregular mediante MPF. Las propiedades mecánicas son: tensión límite $\sigma_l = 2[\frac{N}{mm^2}]$, modulo de Young $E = 20000[\frac{N}{mm^2}]$, Modulo de Poisson $\nu = 0,3$, energía de fractura $G_f = 0,0125[\frac{N}{mm^2}]$. Un ejemplo similar puede ser encontrado en [Moslemi y Khoei \(2010\)](#) y [de Souza Neto et al. \(2008\)](#) .

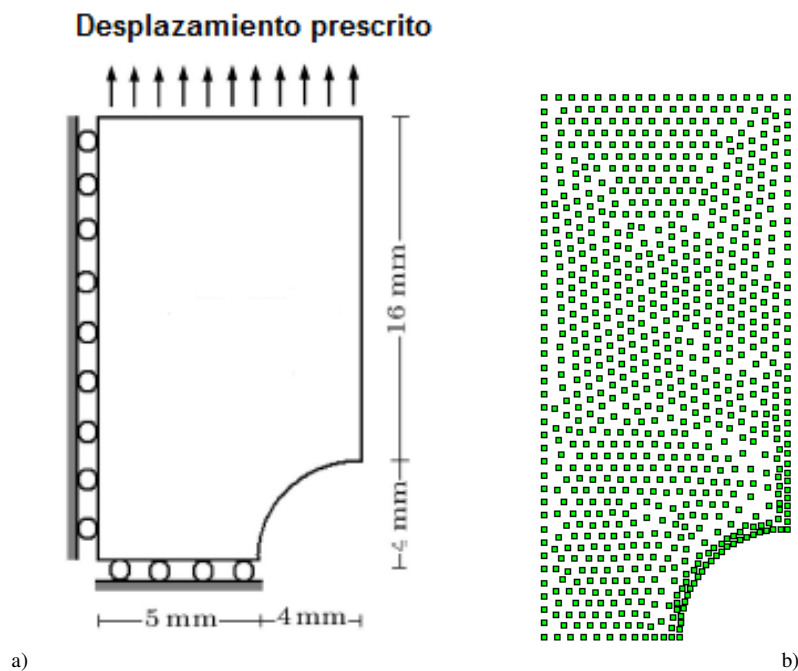


Figura 10: Esquemas Test de Tracción 2D a) Esquema de condiciones de contorno . b) Discretización irregular con 1540 puntos .

En la figura 11 se muestra la evolución del daño en cuatro estados de carga , en interesante ver que el inicio del proceso de degradación ocurre en la zona exterior, para posteriormente extenderse por toda a zona inferior . La deformación final presenta la estricción de área típica de este tipo de ensayos , con lo cual podremos suponer el inicio del proceso de fractura, los resultados muestran una alta similaridad con respecto a [Moslemi y Khoei \(2010\)](#) y [de Souza Neto et al. \(2008\)](#), con lo cual podemos suponer un buen desarrollo de la variable interna d .

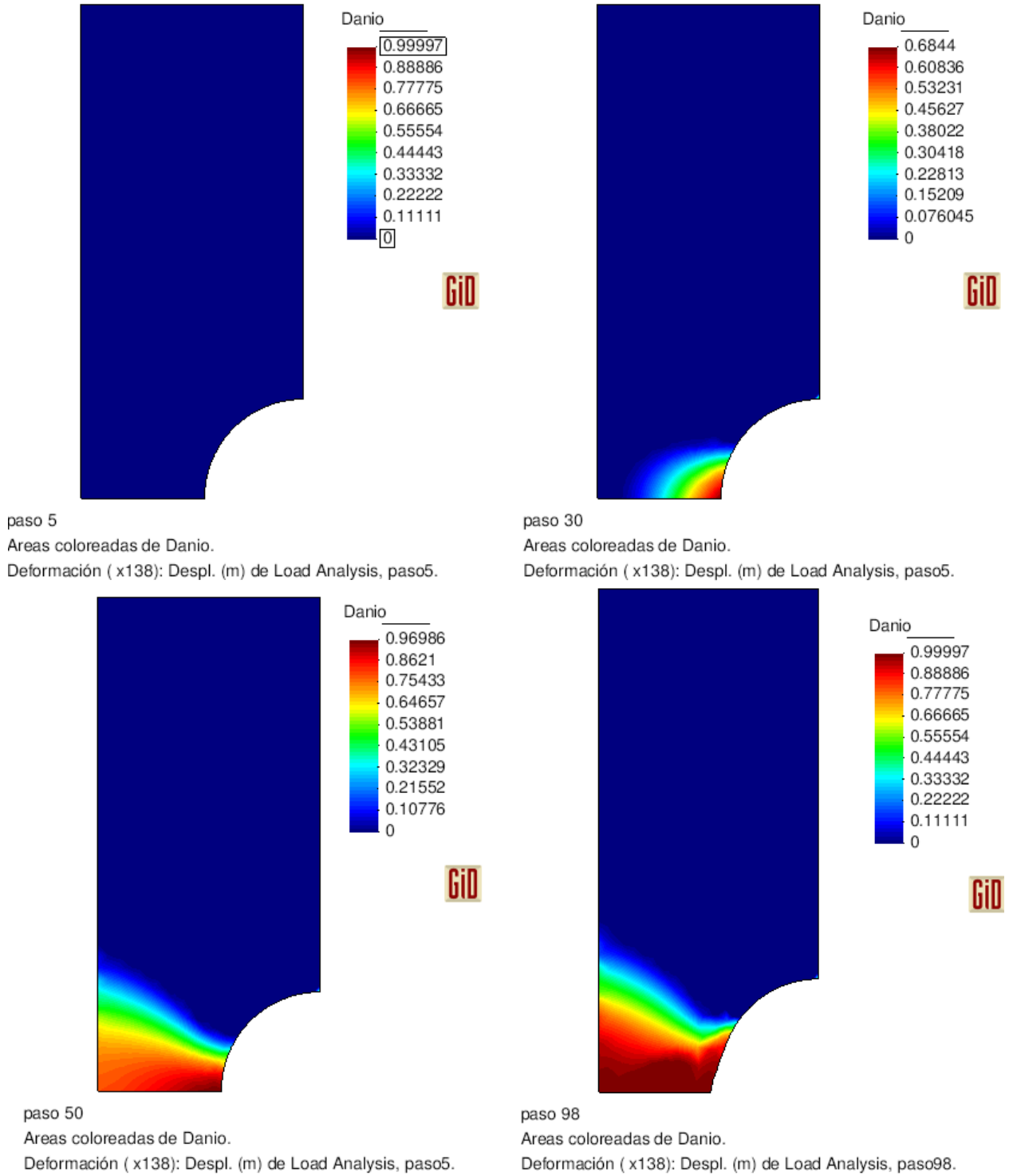


Figura 11: Evolución Test de Tracción 2D para diferentes estados de carga

7. CONCLUSIONES

Se ha implementado un modelo constitutivo de daño isotrópico con ablandamiento con formulación en el método sin malla de puntos finitos para simular el comportamiento no-lineal de materiales.

Como los resultados lo demuestran el MPF es capaz de aproximar de buena manera el fenómeno de localización de deformaciones con regularización de la energía de fractura mediante la consideración de los sigmas de influencia para definir la longitud característica l_p , adicionalmente este esquema se es capaz de predecir la iniciación de la fisura por medio de los valores explícitos de la variable interna de daño.

En síntesis este trabajo concluye en la apertura de un nuevo punto de vista alternativo para las formulaciones clásicas basadas en MEF, las cuales son altamente dependientes a la densidad de la malla para poder aproximar los fenómenos ya mencionados, por otro lado cabe destacar la simpleza del algoritmo desarrollado para la implementación numérica la cual sutilmente es capaz de aproximar el comportamiento no-lineal mediante su formulación fuerte.

Como líneas futuras de investigación y desarrollo en cuanto al MPF se debe avanzar en optimizar el criterio de formación de nubes de interpolación en las fronteras, mientras que en daño se proyecta la formulación para fortalecer las ecuaciones constitutivas de la teoría de gradientes en MEF mediante una aproximación con las funciones de forma del MPF, las cuales dependiendo de su formulación pueden ser de clase C^2 o en otro caso formular en un 100 % la teoría de gradientes con MPF.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el patrocinio otorgado para la realización de este trabajo científico a través del proyecto FONDECYT N° 11100253.

REFERENCIAS

- Arun C., Rao B., y Srinivasan S. *Stochastic Meshfree Method: For elasto-plastic damage analysis*. LAP LAMBERT, 2001.
- Bazant Z. y Oh B. Crank band theory for fracture of concrete. *Mat. Construction*, 16:155–177, 1983.
- Canavos G. *Probabilidad y estadística, Aplicaciones y métodos*. Mc-Graw Hill, 1988.
- Cervera M. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. part ii: Strain localization. 2008.
- de Souza Neto E., Peric D., y Owen D. *Computational Methods for plasticity: Theory and application*. 2008.
- Kachanov L. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akaademii Nauk; Otd Tech Nauk*, 8:26–31, 1958.
- Lemaitre j. *A course of damage mechanics*. spring-verlag berlin heidelberg. 1996.
- Maugin G. *The thermodynamics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- Moslemi H. y Khoei A. 3d modeling of damage growth and crack initiation using adaptive finite element technique. *Scientia Iranica*, 17:372–386, 2010.
- Oñate E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewics O., Taylor R., y Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

- Engineering*, 139:315–346, 1996a.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., y Taylor R. A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866, 1996b.
- Oñate E., Perazzo F., y J.Miquel. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Oliver J., Cervera M., Oller S., y Lubliner J. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Second international conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, 1990.
- Oller S. *Fractura Mecánica Un enfoque global*. CIMNE, 2001.
- Perazzo F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona España, 2002. Tesis Doctoral.
- Perazzo F., Oller S., Miquel J., y Oñate E. Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Pérez-Pozo L., Perazzo F., y Angulo A. A meshless FPM model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Pérez L. Simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas y el método sin malla de puntos finitos. 2008.
- Rodríguez-Ferran A., Bennett T., Askes A., y Tamayo-Mas E. A general framework for softening regularisation based on gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 48:1382–1394, 2011.
- Sanchez P., Sonzogni V., y Huespe A. Modelización de fractura utilizando un modelo de gradientes implícito. *Mecánica Computacional, ENIEF XIII congreso sobre métodos numérico y sus aplicaciones*, 22:2223–2247, 2003.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *El método de elementos finitos*, volumen I. CIMNE, 2000.