

## ANÁLISIS DE UN MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO NO-LINEAL

**Melisa S. Ribero Vairo<sup>a,b</sup>, Joost J.A.C. van Hooijdonk<sup>c</sup>, Susana Andia Fages<sup>d</sup>, Anibal E. Mirasso<sup>a,d</sup> y Carlos García Garino<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo*

<sup>b</sup>*Instituto de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, Universidad Nacional de Cuyo,  
melisaribero@yahoo.com.ar; cgarcia@itu.uncu.edu.ar*

<sup>c</sup>*Eindhoven University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering*

<sup>d</sup>*Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza*

**Palabras Clave:** Modelación Constitutiva, Materiales elasto-viscoplásticos, Perzyna.

**Resumen.** En un trabajo previo (J.P. Ponthot et al., *Mec Comp*, 24A, (2005); C. García Garino et al., *Mec Comp*, 25,(2006)) los autores han extendido un modelo constitutivo para grandes deformaciones basado en hiperelasticidad y descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación (C. García Garino y J. Oliver, *Rev Int de Métodos Num para el Cálculo y Diseño en Ing*, 11:105-122, (1995); C. García Garino y J. Oliver, *Rev Int de Métodos Num para el Cálculo y Diseño en Ing*, 12:147-69, (1996)) al caso viscoso basado en el trabajo previo de Ponthot (J.P. Ponthot, *Int J of Plasticity*, 18:91-126, (2002)). De esta manera se ha obtenido una herramienta que permite resolver problemas tanto dependientes del tiempo (elasto-viscoplasticidad) como independientes del tiempo (elastoplasticidad). En este trabajo se resumen las bases teóricas correspondientes al modelo elasto-viscoplástico formulado a partir de una respuesta hiperelástica. También se presenta el esquema numérico correspondiente que, a través del método de Newton-Raphson, permite resolver la ecuación de consistencia no-lineal para valores generales de los parámetros del modelo. Los casos de aplicación contemplados en este trabajo permiten estudiar la respuesta del material elasto-viscoplástico para los distintos parámetros del modelo. Especialmente interesa analizar combinaciones de valores de los parámetros  $m$  y  $n$  que conduzcan a una ecuación de consistencia no-lineal. Con este fin se procesan casos de pequeñas y grandes deformaciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

En muchas áreas de la industria e investigación existe la necesidad de entender el comportamiento y la física de deformación de los materiales. En general, la Mecánica del Continuo (Malvern, 1969) y la teoría del método de Elementos Finitos (Zienkiewicz y Taylor, 1994) son usados en estas áreas para el cálculo y la simulación de los sólidos bajo deformación.

Este artículo considera la implementación de un modelo hiperelástico elasto-viscoplástico en un código de elementos finitos y algunas simulaciones numéricas utilizando ese código. Para ello, se parte de trabajos previos de García Garino (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995, 1996), sobre modelación en grandes deformaciones, a partir de ideas de Simo y Ortiz (Simo, 1988a,b; Simo y Ortiz, 1985).

Para modelar el comportamiento elasto-viscoplástico, se parte de la noción clásica del modelo de Perzyna (Perzyna, 1966, 1971), siguiendo una propuesta de Ponthot (Ponthot, 1995, 2002), la cual se aplica a metales caracterizados por modelos tipo J2 o Von Mises. En trabajos previos, García Garino, Ponthot y coautores (Ponthot et al., 2005; García Garino et al., 2006), han formulado la adaptación del modelo viscoplástico discutido al contexto de los modelos elastoplásticos con grandes deformaciones, basados en hiperelasticidad y la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995, 1996).

La implementación numérica del modelo en el código SOGDE, se basa en un esquema predictor-corrector (Simo, 1988a,b; Simo y Ortiz, 1985) cuyos detalles pueden verse en trabajos previos de los autores (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995; Ponthot et al., 2005; García Garino et al., 2006). Para resolver la ecuación de consistencia viscoplástica, que resulta del esquema numérico, se emplea el algoritmo de retorno radial (Brannon, 2002) que, para este caso, conduce a una ecuación escalar no-lineal. Para resolver esta ecuación se emplea el método de Newton Raphson debido a su rápida convergencia, como fue discutido por Andia (Andia Fages, 2010; Andia Fages et al., 2009) y, de manera independiente, por Castelló y Flores (Castelló y Flores, 2010) en el contexto de Elementos Finitos.

En la sección 2 de este trabajo se detallan las bases teóricas en el campo de la Cinemática, sobre las que es posible derivar en los modelos constitutivos de la sección 3. Dado que se trabaja con la hipótesis de materiales hiperelásticos se hace una breve referencia a sus características en 3.1. El modelo constitutivo de elastoplasticidad se presenta en 3.2 y en analogía el modelo viscoplástico de Perzyna en 3.3. El algoritmo numérico que permite conocer el comportamiento del modelo y que es implementado en el código SOGDE, se desarrolla en la sección 4 y los resultados obtenidos se encuentran en la sección 5. Finalmente se detallan las conclusiones sobre el trabajo realizado y el comportamiento del modelo bajo la variación de los diversos parámetros.

## 2. CINEMÁTICA

Considerando un sólido en su posición y forma original llamada  $\Omega_0$  en el tiempo  $t_0$ , donde la posición de cada partícula es designada según el vector posición  $\mathbf{x}$  como se observa en la figura 1, si es posible definir una función  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  que permita relacionar la configuración  $\Omega_t$  en cada tiempo  $t$  con la configuración original  $\Omega_0$  de manera que  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ , entonces es posible definir un tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} . \quad (1)$$

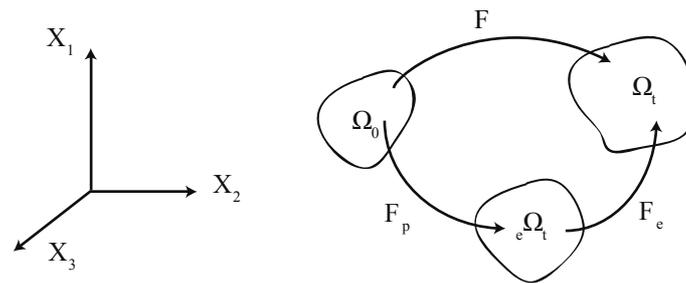


Figura 1: Cinemática del problema

Se define el tensor de Finger como  $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}$  y el tensor de deformación de Almansi como:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}). \quad (2)$$

La velocidad del punto de referencia  $\mathbf{X}$  es la derivada material respecto del tiempo del vector posición y es definido como:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (3)$$

El correspondiente gradiente espacial de velocidad  $\mathbf{l}$  está dado por:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (4)$$

Este puede ser descompuesto en una parte simétrica y otra antisimétrica,  $\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{d}$  es el tensor tasa de deformación y  $\mathbf{w}$  es el tensor velocidad de rotación:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T). \quad (5)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T). \quad (6)$$

La consideración de grandes deformaciones se realiza a través de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación (Lee, 1969) en componentes elástica y plástica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (7)$$

A partir de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación dada por la ecuación (7) se puede obtener la descomposición aditiva, tanto del tensor de deformación de Almansi como del tensor velocidad de deformación, en dos componentes, una elástica y otra plástica (García Garino, 1993):

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p. \quad (8)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p. \quad (9)$$

### 3. MODELACIÓN CONSTITUTIVA

En esta sección se sintetizan las distintas partes del modelo viscoplástico que resulta en una combinación del modelo hiperelástico de materiales con el modelo elastoplástico de Von Mises y con una ley de endurecimiento lineal. Para la resolución del modelo viscoplástico, análogamente al modelo elastoplástico, se plantean: una ecuación de consistencia, una regla de flujo y condiciones de carga y descarga bajo las condiciones del modelo viscoplástico permitiendo el cálculo de las variables del problema.

#### 3.1. Modelo Hiperelástico

La función de energía libre, para nuestro modelo de material hiperelástico, es definida en función del tensor deformación de Almansi y de las constantes de Lamé

$\left( \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ , como lo han hecho [García Garino \(1993\)](#) y [García Garino y Oliver \(1995, 1996\)](#):

$$\psi^e = \left[ \frac{1}{2} \lambda \text{tr}(e)^2 + \mu(\mathbf{e} : \mathbf{e}) \right]. \quad (10)$$

Luego es posible identificar el tensor de tensiones de Cauchy utilizando la expresión que caracteriza el comportamiento hiperelástico como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}}. \quad (11)$$

donde  $\psi$  es la función energía libre que aquí juega el papel de potencial elástico. Finalmente la expresión para el tensor de Cauchy resulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (12)$$

Conocida la relación entre  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{e}$  puede deducirse la expresión del tensor tensión-deformación de Hooke de cuarto orden  $\mathbf{D}$  como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}}. \quad (13)$$

#### 3.2. Modelo elastoplástico: Von Mises

El modelo de Von Mises es caracterizado según la función de fluencia  $f$ , que delimita en el espacio de tensiones un dominio admisible de estados tensionales, como se muestra en la figura 2:

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_y \leq 0. \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}. \quad (15)$$

Donde  $\bar{\sigma}$  es la tensión efectiva calculada con las componentes del tensor desviador de tensiones,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \cdot \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}$  y  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia, que toma valores crecientes dependiendo de

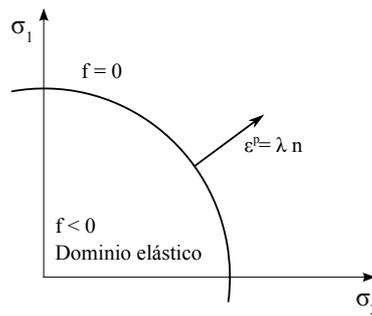


Figura 2: Dominios delimitados por la función de fluencia en el espacio de tensiones.

la evolución de las deformaciones plásticas. Para nuestro caso será una ley de endurecimiento lineal:

$$\sigma_y = \sigma_{y,0} + H\bar{\epsilon}^p . \tag{16}$$

Donde  $H$  es el módulo de endurecimiento isotrópico,  $\sigma_{y,0}$  la tensión de fluencia inicial y  $\bar{\epsilon}^p$  es la deformación plástica efectiva, cuya evolución en el tiempo es definida como:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d}^p : \mathbf{d}^p} . \tag{17}$$

De la ecuación (14) se deduce que si  $f < 0$ , el comportamiento del material es elástico y si  $f = 0$ , el comportamiento será inelástico. En este último caso, las deformaciones plásticas desarrolladas, están relacionadas a la superficie de fluencia que delimita el dominio admisible, según un escalar no negativo  $\dot{\lambda}^p$ , denominado multiplicador plástico, mediante la regla de flujo. Esto es:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda}^p \mathbf{n} . \tag{18}$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a la superficie de fluencia graficada en el espacio de tensiones, tal como se observa en la figura 2, y está definido como:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} . \tag{19}$$

Reemplazando la regla de flujo definida en la ecuación (18) en la definición de la deformación plástica efectiva, dada por la ecuación (17) resulta:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda}^p . \tag{20}$$

### 3.3. Modelo Viscoplastico considerado

En el continuo el modelo viscoplastico de Perzyna (1966, 1971) establece una relación entre el cambio de la deformación viscoplastica con el tiempo y la sobretensión. Así se establece que:

$$\mathbf{d}^{vp} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^m \mathbf{n} . \tag{21}$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del material,  $m$  el exponente de viscosidad y  $\mathbf{d}^{vp}$  es el flujo viscoplástico, definido análogamente al tensor velocidad de deformación plástica de la ecuación (18).

Ponthot (1995, 2002) planteó una alternativa importante, en la que el multiplicador viscoplástico resulta:

$$\dot{\lambda}^{vp} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta(\bar{\varepsilon}^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m. \quad (22)$$

donde  $n$  es el exponente de endurecimiento. Despejando  $(\bar{\sigma} - \sigma_y)$  de la ecuación (22) y suponiendo que su valor es no negativo, se obtiene la llamada sobretensión que permite obtener la ecuación de consistencia viscoplástica no-lineal:

$$\bar{f} = \bar{\sigma} - \sigma_y - \eta(\bar{\varepsilon}^{vp})^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda}^{vp} \right)^{1/m} = 0. \quad (23)$$

Considerando la expresión (20) en su versión viscoplástica podemos hallar una expresión de la ecuación de consistencia viscoplástica en función de la deformación efectiva viscoplástica  $\bar{\varepsilon}^{vp}$ :

$$\bar{f} = \bar{\sigma} - \sigma_y - \eta(\bar{\varepsilon}^{vp})^{1/n} (\dot{\varepsilon}^{vp})^{1/m} = 0. \quad (24)$$

#### 4. ESQUEMA NUMÉRICO

En esta sección se presenta el esquema numérico de las formulaciones detalladas en la sección anterior. El esquema está basado en la discretización de las ecuaciones intervinientes y en un método predictor-corrector que determina, en cada escalón de carga aplicado, un valor de tensiones predictoras y una corrección, en el caso de que las primeras fueran inadmisibles, según lo indique la función de fluencia.

##### 4.1. Discretización de la ecuación de consistencia viscoplástica

Se supone un cuerpo que en el estado inicial 0 no está sometido a acciones o cargas externas. Luego, pasa por una serie de estados 1, 2, ...,  $n$ ,  $n + 1$ . Cada uno de esos estados se corresponde con un tiempo:  $t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ . Cuando el cuerpo está en reposo, se conviene en asignarle el estado 0 y se acepta  $t_0 = 0$ . El incremento de tiempo  $\Delta t$  puede ser variable, en este trabajo se supone constante. Se considera  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Para cada uno de esos estados, se definen las variables correspondientes del problema,  $\mathbf{s}_n, \bar{\varepsilon}_n^{vp}$  y  $\sigma_{y,n}$ .

A lo largo de los diferentes estados se aplican incrementos de carga, en este caso representados por escalones de tensiones. Para un intervalo genérico entre dos estados sucesivos,  $n$  y  $n + 1$ , caracterizados por tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ , se suponen conocidas los valores que caracterizan el estado al comienzo del intervalo, y se quiere determinar el valor que toman al final del mismo, al aplicarle al cuerpo un incremento de carga  $\Delta\sigma$ .

Planteando la ecuación (23) para el instante  $t_{n+1}$  se obtiene:

$$\bar{\sigma}_{n+1} - \sigma_{y,n+1} - \eta(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda}^{vp} \right)^{1/m} = 0. \quad (25)$$

Expresando la deformación viscoplástica en forma incremental se obtiene:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta \bar{\varepsilon}^{vp} . \quad (26)$$

Si planteamos la expresión (16) en el instante  $t_{n+1}$ , podemos utilizar las expresiones (20) en su versión viscoplástica y (26) para obtener:

$$\sigma_{y,n+1} = \sigma_{y,n} + H \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} . \quad (27)$$

Luego, la ecuación de consistencia viscoplástica discreta expresada por la ecuación (25) resulta:

$$\bar{\sigma}_{n+1} - \sigma_{y,n} - \sqrt{\frac{2}{3}} H \lambda^{vp} - \eta \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} = 0 . \quad (28)$$

Esta ecuación, cuya solución depende de la evolución de diversas variables, es resuelta a través de un método predictor-corrector con retorno radial. Dicho método consiste en la predicción de la componente desviadora del tensor de tensiones ( $\mathbf{s}_{pr}^{n+1}$ ), corrigiendo mediante el algoritmo de retorno radial ( $\beta$ ). Luego, podemos escribir:

$$\beta = \mathbf{s}_{n+1}^{pr} - 2\mu \lambda_{n+1}^{vp} \mathbf{n}_{n+1} . \quad (29)$$

donde  $\mathbf{n}_{n+1}$  es posible calcularlo en función de las componentes predictoras del desviador de tensiones:

$$\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{pr} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{pr}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{pr}\|} . \quad (30)$$

De acuerdo con la ecuación (15) que define la tensión efectiva, resulta:

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \beta : \beta . \quad (31)$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación (28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda^{vp}) = & \sqrt{\frac{3}{2}} \beta : \beta - \sigma_{y,n} - \sqrt{\frac{2}{3}} H \lambda^{vp} + \\ & - \eta \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} = 0 . \end{aligned} \quad (32)$$

#### 4.2. Solución de la ecuación de consistencia viscoplástica discreta

La expresión (32) es una ecuación no-lineal en  $\lambda^{vp}$ , que se resuelve mediante el método de Newton-Raphson, de acuerdo a la propuesta de Andia (Andia Fages, 2010; Andia Fages et al., 2009) para un modelo local, y Castelló y Flores (Castelló y Flores, 2010), quienes discutieron el problema en el contexto de un código de Elementos Finitos explícito. La expresión iterativa a utilizar en el método es:

$$\lambda_{k+1}^{vp} = \lambda_k^{vp} - \frac{\bar{f}(\lambda_k^{vp})}{\left. \frac{d\bar{f}}{d\lambda^{vp}} \right|_{\lambda_k^{vp}}} . \quad (33)$$

La condición de detención en el proceso iterativo es:  $\frac{\lambda_{k+1}^{vp} - \lambda_k^{vp}}{\lambda_{k+1}^{vp}} < \text{tolerancia}$ .

Para el cálculo de la derivada de la función  $\bar{f}$  se define (Andia Fages, 2010):

$$\bar{f} = B - A - C. \quad (34)$$

Donde:

$$A = \sigma_{y,n} - \sqrt{\frac{2}{3}} H \lambda^{vp}. \quad (35)$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{2}} \beta : \beta. \quad (36)$$

$$C = \eta \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m}. \quad (37)$$

Entonces:

$$\frac{d\bar{f}}{d\lambda^{vp}} = \frac{dB}{d\lambda^{vp}} - \frac{dA}{d\lambda^{vp}} - \frac{dC}{d\lambda^{vp}}. \quad (38)$$

Operando:

$$\frac{dA}{d\lambda^{vp}} = H \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (39)$$

$$\frac{dB}{d\lambda^{vp}} = -\sqrt{6} \mu. \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\lambda^{vp}} = & \eta \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} \left[ \frac{1}{n \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)} + \frac{1}{m \Delta t \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Como se desprende de la ecuación (41) el término  $\frac{dC}{d\lambda^{vp}}$  no está definido para  $\lambda^{vp} = 0$  y se debe tener especial cuidado en la transición entre estados elásticos y elasto-viscoplásticos.

Finalmente la expresión es:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} = & -\sqrt{6} \mu - H \sqrt{\frac{2}{3}} - \eta \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} \left[ \frac{1}{n \left( \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^{vp} \right)} + \frac{1}{m \Delta t \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Dada la naturaleza no-lineal de la ecuación de consistencia viscoplástica (32), es posible que, para determinadas combinaciones de  $m$  y  $n$ , el método de Newton Raphson presente dificultades para obtener la raíz buscada. Esto particularmente puede ocurrir cuando se hace singular la expresión de la pendiente (ecuación (42)) de la función no lineal, o bien para pendientes nulas de la misma. En esos casos es posible recurrir a métodos alternativos como el de Secante o el de Regla Falsa (Burden y Faires, 1998), en los cuales la pendiente se aproxima haciendo uso

de dos raíces aproximadas anteriormente. En este trabajo se recurrió al método de Regla Falsa. Una variante es la presentada por [Castelló y Flores \(2010\)](#) en la que utilizaron el método de Bisección.

### 4.3. Casos particulares

A partir de la ecuación de consistencia discreta dada por (32), se obtienen casos particulares, que pueden consultarse en los trabajos de Ponthot ([Ponthot, 2002](#); [Ponthot et al., 2005](#)) y, con más detalle y resultados, en los trabajos de Andia ([Andia Fages, 2010](#); [Andia Fages et al., 2009](#)). A continuación se describen algunos:

1. Problema elastoplástico -  $\eta = 0$ :

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} - \sigma_{y,n} = 0. \quad (43)$$

Esta última ecuación admite solución analítica en  $\lambda^{vp}$ , como puede observarse en la tesis doctoral de García Garino ([García Garino, 1993](#)):

$$\lambda^{vp} = \lambda^p = \frac{1}{2\mu} \frac{f^{pr}}{\left(1 + \frac{H}{3\mu}\right)}. \quad (44)$$

2. Problema elástico -  $\eta \rightarrow \infty$ :

Cuando  $\eta \rightarrow \infty$ , los efectos viscosos crecen infinitamente. Si se analiza la ecuación (32) matemáticamente, se observa que aumenta infinitamente la parte negativa de la función. Al estar igualada a cero, también debe aumentar la parte positiva, es decir la tensión efectiva. Esto va acompañado por la expansión de la superficie de fluencia. Entonces el dominio elástico no está acotado y en el caso límite coincide con el espacio de tensiones, recuperándose el problema elástico.

3. Problema elasto-viscoplástico con ecuación de consistencia lineal -  $m = 1$ ;  $n \rightarrow \infty$ :

De la ecuación (32) surge:

$$\bar{f}(\lambda^{vp}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} - \sigma_{y,n} - \sqrt{\frac{2}{3}} H \lambda^{vp} - \eta \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{vp}}{\Delta t} \right) = 0. \quad (45)$$

Cuya solución analítica en  $\lambda_{vp}$  se obtiene mediante la expresión propuesta por [Ponthot \(1995, 2002\)](#):

$$\lambda^{vp} = \frac{1}{2\mu} \frac{f^{pr}}{\left(1 + \frac{H + \frac{\eta}{\Delta t}}{3\mu}\right)}. \quad (46)$$

De esta última expresión puede deducirse que la resolución del caso viscoplástico lineal es similar a la del caso de elastoplasticidad, pues solo debe reemplazarse en la ecuación (44)  $H$  por  $H + \frac{\eta}{\Delta t}$ , para recuperar el resultado dado por la ecuación (46). Luego, si en esta última el valor del coeficiente de viscosidad se hace cero, es posible recuperar el caso de elastoplasticidad descrito en el punto 1.

#### 4. Problemas elasto-viscoplásticos con ecuación de consistencia no-lineales:

Dentro de esta categoría se incluyen todas las combinaciones de valores para  $m$  y  $n$  que no se encuentran incluidas en los casos anteriores. En particular el caso de viscoplasticidad no-lineal cuando  $m = n = 1$  es de interés pues la ecuación (32) se reduce a una ecuación de segundo grado, cuyos coeficientes se detallan a continuación, y en este caso existe una solución analítica en  $\lambda^{vp}$ , propuesta por Andia (Andia Fages, 2010; Andia Fages et al., 2009).

$$a = -\frac{2}{3} \frac{\eta}{\Delta t}. \quad (47)$$

$$b = -\sqrt{6}\mu - H\sqrt{\frac{2}{3}} - \eta\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\bar{\varepsilon}_n^{vp}}{\Delta t}. \quad (48)$$

$$c = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}^{pr}\| - \sigma_{y,n}. \quad (49)$$

## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Con el propósito de comprobar el comportamiento del modelo propuesto, especialmente para combinaciones de los parámetros  $m$  y  $n$  que conducen a una ecuación de consistencia no-lineal, en la sección 5.1 se muestran los resultados obtenidos al simular un problema propuesto por Alfano et al. (2001). El mismo consiste en una placa con orificio sometida a un estado de tensión plana.

Por otro lado, y como análisis paramétrico de la ecuación de consistencia discreta (32), en la sección 5.2 se detallan los valores del multiplicador viscoplástico  $\lambda^{vp}$  calculados en un punto de Gauss, para un caso particular de elasto-viscoplasticidad no-lineal.

### 5.1. Placa con orificio

#### ■ Geometría de la placa con orificio

La geometría del problema propuesto consiste en una placa rectangular de 20m x 36m con un orificio central de 5m de radio. Por razones de simetría solamente se modela un cuarto de la placa. Las propiedades del material que compone la placa son:  $E = 2,1e5$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_{y0} = 240$  MPa y  $H = 0$ . Los valores de los parámetros  $\eta$ ,  $m$  y  $n$  característicos del modelo viscoplástico varían para los diferentes casos estudiados.

La discretización de la placa, a los efectos de ser analizada mediante el método de Elementos Finitos, consta de 288 elementos cuadriláteros, tal como puede observarse en la figura 3. Los desplazamientos son impuestos en el borde superior de la placa en intervalos de tiempo  $\Delta t = 1s$ .

Los resultados obtenidos del programa SOGDE con la implementación del modelo viscoplástico, son graficados considerando las reacciones por unidad de longitud y los desplazamientos impuestos, como puede observarse en las figuras 4 a 8.

#### ■ Pequeñas deformaciones

El análisis realizado sobre la placa con orificio bajo pequeñas deformaciones consiste en la aplicación de un desplazamiento total de 0.05m en 25 pasos de 0.002m cada uno.

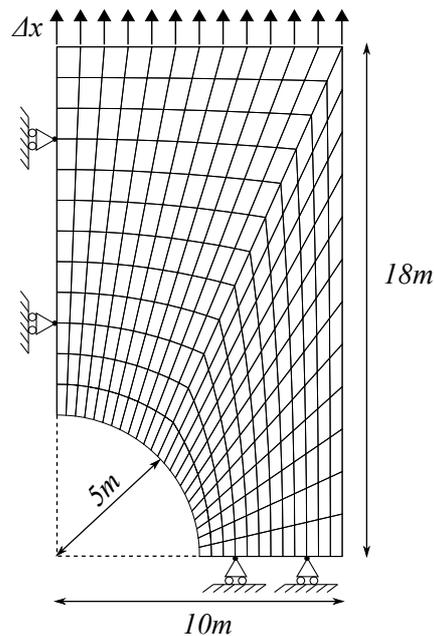


Figura 3: Placa con orificio - Esquema de discretización y condiciones de contorno

Podemos distinguir los casos de elasto-viscoplasticidad lineal, que no serán reproducidos pues ya fueron presentados por [García Garino et al. \(2006\)](#), y los casos de elasto-viscoplasticidad no-lineal, analizados a continuación cuando  $m = 1$ ,  $n = 1$  y cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $m$  toma valores entre 2 y 5. En ambos casos el coeficiente de viscosidad  $\eta$  es variable.

- Elasto-viscoplasticidad con ecuación de consistencia no-lineal,  $m = 1$ ,  $n = 1$  y  $0 \leq \eta \leq 1e9 \text{ MPa} \cdot \text{s}$ : Los resultados se encuentran graficados en la figura 4 de donde se desprende que en el caso de elasto-viscoplasticidad no-lineal, al igual que en elasto-viscoplasticidad lineal, es posible recuperar los casos de elasticidad y elastoplasticidad perfecta, cuando el coeficiente de viscosidad tiende a infinito y a cero respectivamente.
- Elasto-viscoplasticidad con ecuación de consistencia no-lineal,  $2 \leq m \leq 5$ ,  $n \rightarrow \infty$  y  $1e2 \text{ MPa} \cdot \text{s} \leq \eta \leq 1e5 \text{ MPa} \cdot \text{s}$ : Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5 para  $m = 2$ ,  $m = 3$  y  $m = 5$ . Como referencia, en todas las gráficas se trazan las curvas límites, correspondientes a los comportamientos elástico y elastoplástico. En las figuras puede apreciarse el impacto del parámetro  $m$  en la respuesta de la placa, la cual se asemeja al de un material elástico a medida que  $m$  aumenta. Esto se debe a que al ser  $\bar{\epsilon}^{vp}$  menor a 1 y ser una variable de la ecuación de consistencia (24) elevada a  $1/m$ , si aumenta  $m$ , el valor del término viscoso se hace mayor, expandiendo el radio de la superficie de fluencia.

Por otro lado, si se grafica la respuesta de la placa para  $\eta = 1e4 \text{ MPa} \cdot \text{s}$  y  $m$  variable, como se muestra en la figura 6, se evidencia que la influencia de éste último permite obtener respuestas tanto elásticas como elastoplásticas para un mismo coeficiente de viscosidad.

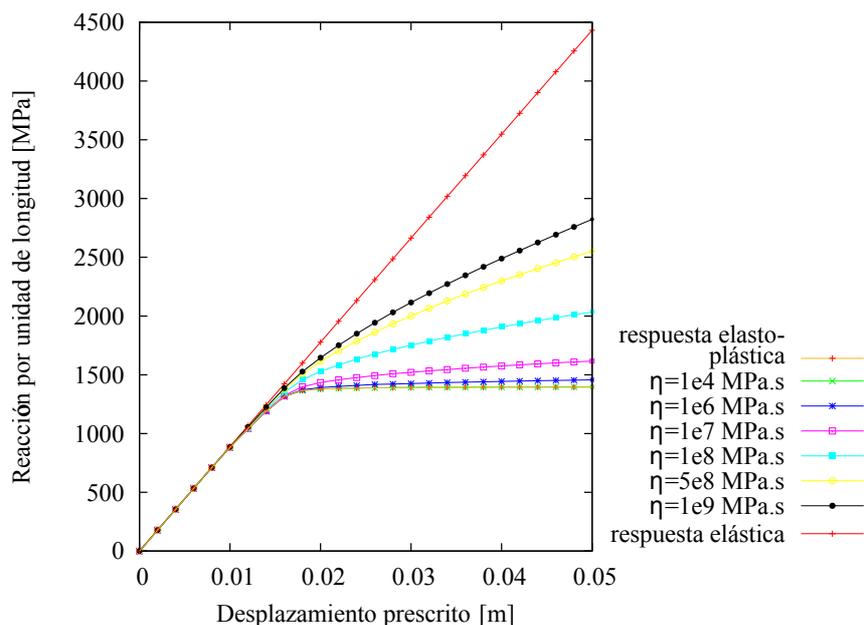


Figura 4: Respuesta para el caso  $m = 1, n = 1$

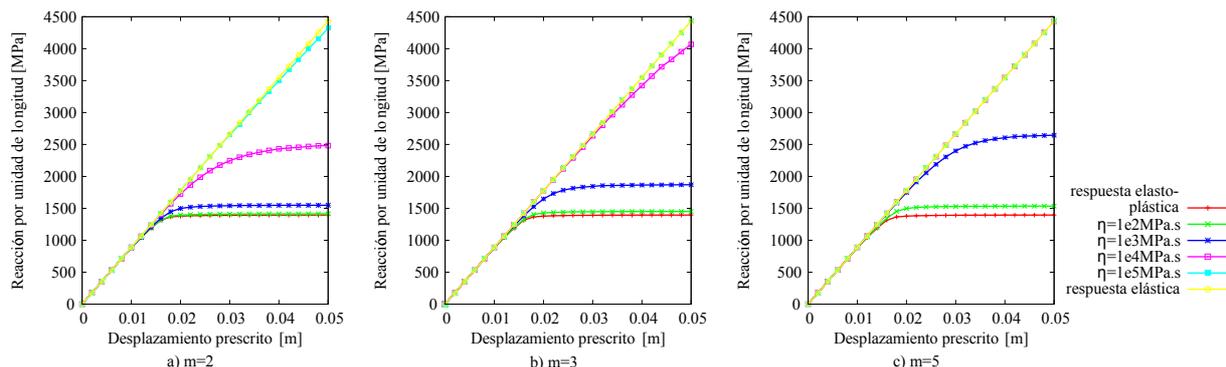


Figura 5: Respuesta para el caso  $n \rightarrow \infty$

■ Grandes deformaciones

Los desplazamientos son impuestos en 400 pasos de  $0,05m$  cada uno, alcanzando un total de  $2,00m$ . El caso de elasto-viscoplasticidad no-lineal analizado corresponde a la combinación  $m = 1, n = 1$  y  $1e4 \text{ MPa} \cdot \text{s} \leq \eta \leq 1e9 \text{ MPa} \cdot \text{s}$ . Los resultados son graficados en dos figuras: 7 y 8, la primera muestra las curvas cercanas al comportamiento elástico y la segunda las cercanas al comportamiento plástico.

**5.2. Solución de un problema elasto-viscoplástico no-lineal con  $m = 1$  para distintos valores de  $n$**

En este análisis (ver Andia Fages (2010), sección 3.4.4) se trabaja en el cálculo del multiplicador viscoplástico  $\lambda^{vp}$  en un punto de Gauss, suponiendo que el valor de la deformación viscoplástica efectiva previa es nula ( $\bar{\epsilon}_n^{vp} = 0$ ), y el estado tensional impuesto en un tiempo  $\Delta t = 1s$ , es uniaxial ( $\sigma_{xx} = 1000 \text{ MPa}$ ). Las propiedades del material coinciden con las de la placa con orificio, considerando los exponentes  $m = 1$  y haciendo variar  $n$

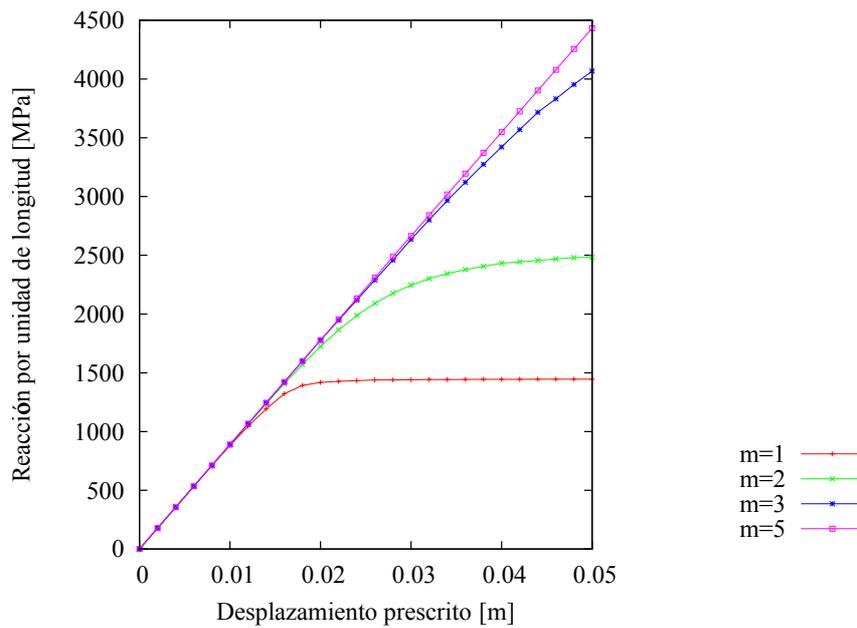


Figura 6: Respuesta para el caso  $n \rightarrow \infty, \eta = 1e4 \text{ MPa} \cdot \text{s}$

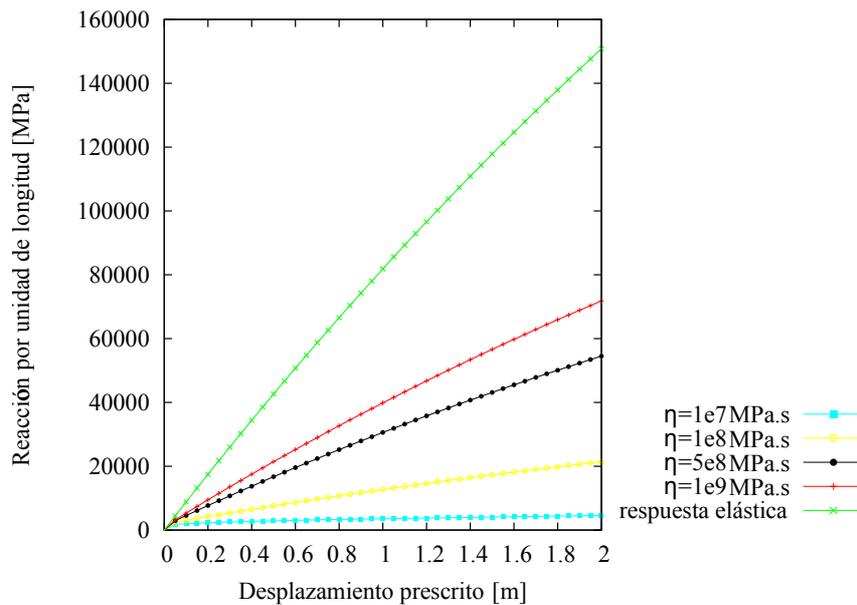


Figura 7: Respuesta para el caso  $m = 1, n = 1$

entre 0,05 e  $\infty$ . También se considera  $H = 100 \text{ MPa}$  y  $\eta$  variable entre  $1e1 \text{ MPa} \cdot \text{s}$  y  $1e11 \text{ MPa} \cdot \text{s}$ . Los resultados obtenidos para los distintos valores de  $n$  se indican en las tablas 1, 2 y 3. También son graficados, en escala doble logarítmica, en la figura 9 en función de coeficiente de viscosidad  $\eta$  y del parámetro  $n$ .

Puede observarse que los valores del multiplicador viscoplástico obtenidos disminuyen con el aumento de los parámetros  $n$  y  $\eta$ . Para analizar la influencia de uno y otro, se considera que los valores del multiplicador viscoplástico que den como resultado valores de la tensión efectiva corregida que difieran en menos del 10% de la tensión efectiva predictora (calculada a partir de asumir comportamiento elástico del material), devuelven un comportamiento cuasi-elástico. De esta manera, podemos señalar en las tablas 1, 2 y

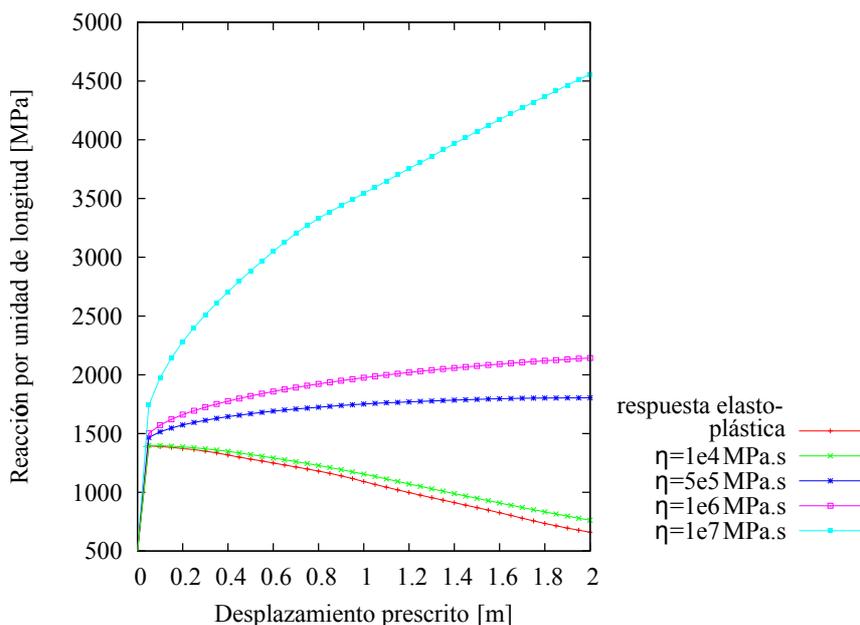


Figura 8: Respuesta para el caso  $m = 1, n = 1$

3 los valores del multiplicador viscoplástico que cumplen dicha condición, de donde se observa que es posible recuperar comportamiento elástico para casi cualquier valor de  $n$ , pero no para todos los valores de  $\eta$ . Por otro lado, el caso elastoplástico se recupera para valores bajos de  $\eta$  sin importar el valor de  $n$  analizado.

También podemos observar que, para los valores de las características del material dados y el estado tensional impuesto, el efecto del parámetro  $n$  a partir de 5 y  $\eta$  a partir de  $1e6 \text{ MPa} \cdot \text{s}$  devuelve respuestas elásticas. En las curvas de la figura 9, los puntos que se corresponden con ese tipo de respuesta se encuentran dispuestos en los tramos alineados en la dirección que indica la porción de la curva para  $n \rightarrow \infty$  a partir de  $\eta = 1e6 \text{ MPa} \cdot \text{s}$

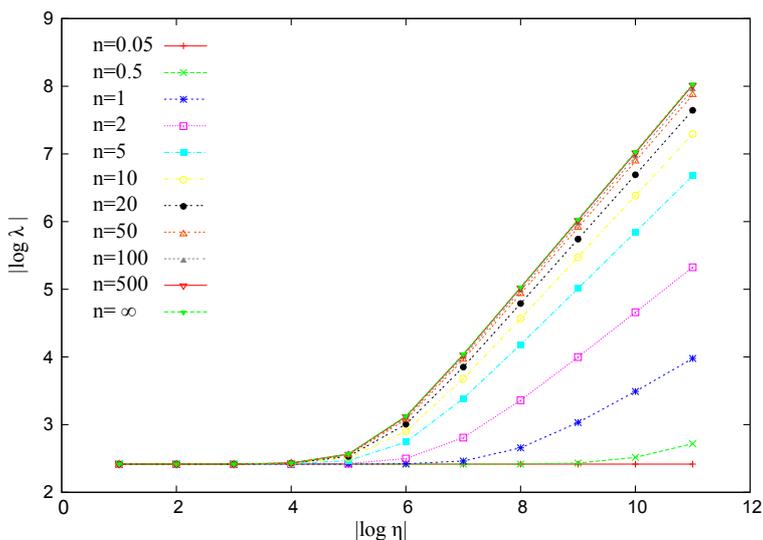


Figura 9: Evolución de  $\lambda^{vp}$  en función del parámetro de viscosidad  $\eta$  para  $n$  variable

	$n = 0,05$	$n = 0,5$	$n = 1$	$n = 2$
$\eta$ [MPa · s]	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$
10	0,0038398	0,0038398	0,0038398	0,0038398
$10^2$	0,0038398	0,0038398	0,0038398	0,0038397
$10^3$	0,0038398	0,0038398	0,0038398	0,003839
$10^4$	0,0038398	0,0038398	0,0038393	0,003831
$10^5$	0,0038398	0,0038398	0,0038349	0,0037541
$10^6$	0,0038398	0,0038397	0,0037914	0,0031734
$10^7$	0,0038398	0,0038383	0,0034441	0,0015547
$10^8$	0,0038398	0,0038325	0,0022039	0,00043681
$10^9$	0,0038398	0,0037005	0,0009295	0,00010021
$10^{10}$	0,0038398	0,0030554	0,0003231	0,000021891
$10^{11}$	0,0038398	0,0019134	0,0001053	0,0000047304

Tabla 1: Evolución de  $(\lambda^{vp})$  en función de  $\eta$  para  $n = 0,005$ ,  $n = 0,05$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$ .

	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
$\eta$ [MPa · s]	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$
10	0,0038398	0,0038397	0,0038397	0,0038397
$10^2$	0,0038393	0,0038389	0,0038387	0,0038384
$10^3$	0,0038348	0,003831	0,003828	0,0038258
$10^4$	0,0037906	0,003753	0,0037248	0,0037038
$10^5$	0,0034067	0,0031292	0,0029421	0,0028124
$10^6$	0,0018108	0,00125	0,00098731	0,00084095
$10^7$	0,0004115	0,0002095	0,0001411	0,00010899
$10^8$	0,000065439	0,000027006	0,000016251	0,000011693
$10^9$	0,0000097231	0,0000033481	0,0000018199	0,0000012266
$10^{10}$	0,0000014297	0,00000041306	0,00000020316	0,00000012836
$10^{11}$	0,00000020991	0,000000050929	0,000000022672	0,000000013429

Tabla 2: Evolución de  $(\lambda^{vp})$  en función de  $\eta$  para  $n = 5$ ,  $n = 10$ ,  $n = 20$  y  $n = 50$ .

	$n = 100$	$n = 500$	$n = \infty$
$\eta$ [MPa · s]	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$	$(\lambda^{vp})$
10	0,0038397	0,0038397	0,0038413
$10^2$	0,0038383	0,0038383	0,0038398
$10^3$	0,0038249	0,0038242	0,0038256
$10^4$	0,003696	0,0036894	0,0036892
$10^5$	0,0027662	0,0027281	0,0027102
$10^6$	0,00079445	0,00075814	0,00074926
$10^7$	0,000099619	0,000092577	0,000090879
$10^8$	0,000010432	0,0000095061	0,0000692856
$10^9$	0,0000010699	0,00000095712	0,00000093058
$10^{10}$	0,00000010948	0,000000096174	0,000000093078
$10^{11}$	0,000000011201	0,0000000096619	0,0000000093080

Tabla 3: Evolución de  $(\lambda^{vp})$  en función de  $\eta$  para  $n = 100$ ,  $n = 500$  y  $n = \infty$ .

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han resumido las bases teóricas del modelo viscoplástico planteado por Ponthot (1995, 2002). El mismo ha sido implementado en un código de Elementos Finitos, donde se contempla una ecuación de consistencia viscoplástica no-lineal, recurriéndose a un esquema tipo Newton-Raphson para hallar el valor solución del multiplicador viscoplástico.

El ejemplo numérico desarrollado corresponde al planteado por Alfano et al. (2001), tanto para pequeñas como para grandes deformaciones, considerando que el material está descrito por el modelo viscoplástico en estudio. A los efectos de analizar su comportamiento, se aplican cambios en los valores de los parámetros  $m$  y  $n$ , y se observa la respuesta de la placa según el valor de la reacción por unidad de longitud, obtenido en función del desplazamiento prescrito. El modelo muestra un comportamiento satisfactorio para los valores considerados de los parámetros que lo caracterizan. Se verifica la posibilidad de describir comportamientos que van desde elástico al elastoplástico, pasando por el comportamiento elasto-viscoplástico, en función de la combinación de los parámetros  $m$ ,  $n$  y  $\eta$ .

Por otra parte, del análisis de la ecuación de consistencia viscoplástica en un punto de Gauss para distintos valores de  $n$ , se observa que los comportamientos elástico y elastoplásticos pueden recuperarse con valores, de  $n$  altos y bajos, respectivamente. Pero si el valor del coeficiente de viscosidad  $\eta$  toma valores extremos (en nuestro caso 0 y  $1e11\text{MPa} \cdot \text{s}$ ) su efecto es predominante independientemente del valor que tome  $n$ .

Es necesario realizar un análisis más profundo sobre el efecto de los parámetros  $m$  y  $n$ , para comprender la diversidad de formas de respuesta que el modelo permite contemplar.

## 7. AGRADECIMIENTOS

La primera autora agradece la ayuda recibida por la beca doctoral PFDT en el marco del proyecto "PRH-UNCuyo" subsidiado entre la UNCuyo y el FONCyT (ANPCyT). Los autores agradecen la ayuda económica recibida de los proyectos PAE-PICT-2007-2312 otorgado por la ANPCyT y 06/B194 otorgado por la SECTyP de la UNCuyo.

## REFERENCIAS

- Alfano G., De Angelis F., y Rosati L. General solution procedures in elasto-viscoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190:5123–5147, 2001.
- Andia Fages S. Estudio de sensibilidad de la solución de la ecuación no lineal de consistencia de un modelo constitutivo elasto-viscoplástico. Tesis de licenciatura, Mendoza, Argentina. 2010.
- Andia Fages S., Raichman S., Mirasso A., García Garino C., y Ponthot J. Integración numérica del problema viscoplástico. *Anales del V encuentro de investigadores y docentes de ingeniería*, páginas 104–118, 2009.
- Brannon R. Geometric insight into return mapping plasticity algorithms, <http://www.mech.utah.edu/brannon/public/radialreturn.pdf>. 2002.
- Burden R. y Faires J. *Análisis Numérico*. México, 1998. ISBN 968-7529-46-6.
- Castelló W. y Flores F. Análisis de problemas elasto-viscoplásticos en conformado de metales. *Mecánica Computacional*, XXIX:4199–4217, 2010.
- García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. Tesis de Doctorado, Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España, 1993.
- García Garino C. y Oliver J. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos sometidos a

- grandes deformaciones, parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 11:105–122, 1995.
- García Garino C. y Oliver J. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos sometidos a grandes deformaciones, parte ii implementación numérica y aplicaciones. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 12:147–169, 1996.
- García Garino C., Ponthot J., Mirasso A., Koeune R., Jeunechamps P., y Careglio C. Numerical simulation of large strain rate dependent j2 problems. *Mecánica Computacional*, 25, 2006.
- Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969.
- Malvern L. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1969. ISBN 13-487603-2.
- Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 9(2):243–377, 1966.
- Perzyna P. Thermodynamic theory of plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 11:313–355, 1971.
- Ponthot J. *Traitement unifié de la Mécanique des transformations pour la méthode des éléments finis*. Tesis de Doctorado, Belgium, 1995.
- Ponthot J. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18:91–126, 2002.
- Ponthot J., García Garino C., y Mirasso A. Large strain elasto viscoplastic constitutive model. theory and numerical scheme. *Mecánica Computacional*, 24A, 2005.
- Simo J. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2):199 – 219, 1988a. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(88)90076-X.
- Simo J. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68(1):1 – 31, 1988b. ISSN 0045-7825. doi:10.1016/0045-7825(88)90104-1.
- Simo J. y Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use hiperelastic constitutive equation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 49:221–245, 1985.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *El método de los elementos finitos*. McGraw-Hill, Interamericana de España, S.A., Madrid, España, 1994. ISBN 84-481-0178-2.