

DINAMICA NO LINEAL DE TUBERIAS CON FLUJO DE FLUIDO PULSANTE: RESONANCIA INTERNA

José M. Ramírez^a y Sebastián P. Machado^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina,
{ramirezjose,smachado}@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, Argentina*

Palabras claves: Dinámica no lineal; Resonancia interna; Interacción fluido – estructura.

Resumen. El análisis de interacción fluido estructura en tuberías que contienen flujos internos es de gran interés en diversas instalaciones de ingeniería, sobre todo en las industrias de generación de energía, como centrales nucleares, químicas, petroquímicas, entre otras. En el presente trabajo se pretende estudiar la respuesta dinámica no lineal de tubería vertical empotrada – apoyada sometida a un flujo pulsante. La tubería transporta un fluido a una velocidad que posee una componente media constante y otra componente que varía armónicamente. La elección de los parámetros del sistema es elegido de modo que la frecuencia natural del segundo modo es aproximadamente tres veces la frecuencia natural del primer modo, de esta manera se activa el fenómeno de resonancia interna mediante la velocidad media del fluido. El modelo matemático corresponde a una formulación tipo viga Bernoulli – Euler. El análisis se lleva a cabo utilizando el método de escalas múltiples (MMS) atacando directamente las ecuaciones diferenciales no lineales. A partir de esto último se obtienen los modos normales no lineales. Las ecuaciones de modulación que describen la interacción entre las amplitudes y fases de los modos considerados son determinadas utilizando modos no lineales de vibración. A partir de ellas se estudian las soluciones de equilibrio y la respuesta dinámica no lineal de la tubería.

1 INTRODUCCION

El estudio de la interacción fluido – estructura es de gran interés debido a sus numerosas aplicaciones industriales como centrales nucleares, líneas hidráulicas, entre otras. Debido a diversos factores como excitación paramétrica, excitación externa, numerosas condiciones de bordes, masas adicionales, acoplamiento de boquillas, fundaciones elásticas, entre otras no linealidades, el sistema de tubería puede presentar una amplia gama de comportamientos dinámicos. La dinámica lineal y no lineal de tuberías con flujo de fluido pulsante tuvo un gran interés en las últimas cuatro décadas. Paidoussis (1998), proporciona una extensa y detallada revisión sobre vibraciones inducidas por flujo de fluido pulsante e inestabilidad de tuberías. Se discuten distintos aspectos, como los modelos matemáticos, efectos de los parámetros del sistema, condiciones de borde, efectos de fricción, y otros parámetros de la dinámica del sistema.

Muchos artículos se encuentran referidos a velocidades de flujo constante y otros casos, a velocidades de flujo dependiente del tiempo. Oz y Boyaci (2000), analizaron las vibraciones transversales de tuberías sometidos a tensiones externas con flujo dependiente del tiempo y despreciando el efecto de la rigidez flexional. Oz (2001), extendió su trabajo estudiando el efecto de la no linealidad debido al desplazamiento axial y otros efectos relacionados con lo mencionado anteriormente. J. D. Jin y Z. Y. Song (2005), estudiaron resonancia paramétrica de tuberías verticales con flujo de fluido pulsante mediante el método de ecuaciones promediadas. L. N. Panda y R. C. Kar (2008), investigaron sobre dinámica no lineal de tuberías horizontales considerando resonancia paramétrica y resonancia interna utilizando el método de escalas múltiples (MMS).

A diferencia de los artículos publicados por otros autores, en el presente artículo se presenta el análisis de la respuesta no lineal de tuberías verticales mediante excitación externa debido a un flujo de fluido pulsante, considerando la influencia del término gravitatorio. La velocidad del flujo posee una componente media constante y una componente alternante que varía en función del tiempo. Se pretende realizar el estudio de las soluciones de equilibrio y la respuesta dinámica no lineal de la tubería empotrada – apoyada bajo el efecto de la gravedad. Los parámetros del sistema se escogen tal que la frecuencia natural del segundo modo es aproximadamente tres veces la frecuencia natural del primer modo, de esta manera se activa el fenómeno de resonancia interna. La formulación matemática corresponde a un modelo viga Bernoulli – Euler. Se utiliza el método directo de escalas múltiples (MMS) para estudiar el comportamiento del sistema, obteniendo así los modos normales no lineales (NNM) para las condiciones de bordes establecidas.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Se considera una tubería vertical empotrada – apoyada con un flujo pulsante como se puede observar en la Figura 1.

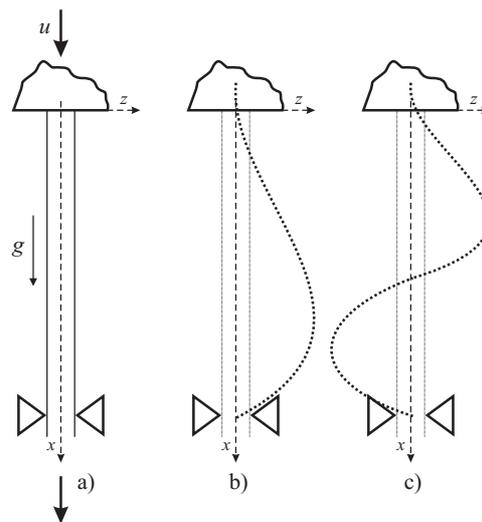


Figura 1. a) Esquema de una tubería vertical empotrada – apoyada. b) Primer modo de vibración. c) Segundo modo de vibración.

Se asume que el movimiento es en el plano y el modelo matemático corresponde a una formulación tipo viga Bernoulli – Euler. El fluido se asume incompresible y las no linealidades de la ecuación se debe al esfuerzo axial inducido por el movimiento lateral de la tubería. La ecuación diferencial no lineal es,

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + E^* I \frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial t} + 2MU \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c \frac{\partial z}{\partial t} + (M + m) g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left\{ MU^2 - \bar{T} - \left[(M + m) g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right] (L - x) - \frac{EA}{2L} \int_0^L (z')^2 dx - \frac{E^* A}{L} \int_0^L (z' \dot{z}') dx \right\} = 0. \quad (1)$$

$$z(0, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = z(L, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(L, t) = 0. \quad (2)$$

Donde x representa la coordenada longitudinal, z representa el movimiento lateral, U es la velocidad del fluido, T es la tensión axial externa, m y M representan la masa por unidad de longitud de la tubería y del fluido, A es el área transversal, L es la longitud, g es la aceleración debido a la gravedad, EI es la rigidez flexional de la tubería, E^* es el coeficiente de disipación de la tubería, asumiendo que es un material viscoelástico, c es el factor de amortiguamiento externo. El flujo pulsante se define de la siguiente manera,

$$U = U_0 [1 + v \sin(\omega t)]. \quad (3)$$

Introduciendo las siguientes variables y parámetros adimensionales.

$$w = \frac{z}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \bar{g} = \frac{M + m}{EI} L^3 g, \quad \bar{\tau} = \left(\frac{EI}{M + m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2} = \omega_n t, \quad u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} LU, \\ \beta = \frac{M}{m + M}, \quad \Gamma = \frac{TL^2}{EI}, \quad \sigma^* = \frac{cL^2}{\sqrt{EI(M + m)}}, \quad \alpha^* = \frac{E^*}{L^2} \left(\frac{I}{M + m} \right)^{1/2}, \quad (4) \\ k = \frac{AL^2}{2I}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \delta^* = \frac{E^* A}{\sqrt{EI(M + m)}}.$$

La ecuación diferencial no lineal adimensionalizada queda expresada de la siguiente forma,

$$\alpha^* \dot{w}'''' + w'''' + \left\{ u^2 - \Gamma + \beta^{1/2} \dot{u} (1 - \xi) + (\beta^{1/2} \dot{u} - \bar{g}) (1 - \xi) \right\} w'' + 2\beta^{1/2} u \dot{w}' + \sigma^* \dot{w} + \ddot{w} + \bar{g} w' - k \int_0^1 w'^2 d\xi w'' - \delta^* \int_0^1 w' \dot{w}' d\xi w'' = 0. \tag{5}$$

$$u = u_0 [1 + \nu \sin(\Omega \tau)]. \tag{6}$$

El punto ()' y prima ()' indican las derivadas con respecto al tiempo adimensional τ y la coordenada longitudinal adimensional ξ , respectivamente. Introduciendo el factor de escala y usando la Ec. (3) para el flujo pulsante, la ecuación diferencial adimensional se expresa como,

$$w'''' + [u_0^2 + 2\epsilon u_0 u_1 \sin(\Omega \tau) - \Gamma - (1 - \xi) \bar{g}] w'' + \bar{g} \xi w' + \sqrt{\beta} \epsilon u_1 \Omega \cos(\Omega \tau) (1 - \xi) w'' + 2\sqrt{\beta} [u_0 + \epsilon u_1 \sin(\Omega \tau)] \dot{w}' + 2\epsilon \mu \dot{w} + 2\epsilon \alpha \dot{w}'''' + \ddot{w} = \epsilon k \int_0^1 w'^2 d\xi w'' + O(\epsilon^2). \tag{7}$$

$$w(0, \tau) = w'(0, \tau) = w(L, \tau) = w''(L, \tau) = 0. \tag{8}$$

donde,

$$\mu = \sigma^* / 2\epsilon, \quad \alpha = \sigma^* / 2\epsilon, \quad u_0 \nu = \epsilon u_1. \tag{9}$$

3 METODO DE ANALISIS

El presente sistema de tubería es analizado mediante el método de escalas múltiples considerando una expansión hasta segundo orden $O(\epsilon^2)$. Se introduce escalas de tiempo rápida T_0 y escalas de tiempo lentas con la cual se pueden realizar la modulación de amplitud y fase. Las derivadas con respecto al tiempo son expresadas utilizando la regla de la cadena como,

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \epsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n=0,1,2,\dots \tag{10}$$

donde ϵ es un parámetro adimensional muy pequeño.

Los desplazamientos pueden ser expresados como una expansión de la siguiente manera,

$$w(\xi, \tau) = w_1(T_0, T_1, \xi) + \epsilon w_2(T_0, T_1, \xi) + \dots \tag{11}$$

Sustituyendo las Ecs. (10) y (11) en las Ecs. (7) y (8) e igualando los coeficientes de igual potencia de ϵ , se obtiene,

$$O(\epsilon^0): D_0^2 w_0 + 2\sqrt{\beta} u_0 D_0 w_0' + \bar{g} w_0' + (u_0^2 - \Gamma) w_0'' - (1 - \xi) \bar{g} w_0'' + w_0'''' = 0, \tag{12}$$

$$w_0(0, \tau) = w_0(1, \tau) = w_0'(0, \tau) = w_0''(1, \tau) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon^1): \quad & 2\mu D_0 w_0 + 2D_0 D_1 w_0 + D_0^2 w_1 + \bar{g} w_1'' + 2u_0 \sqrt{\beta} D_1 w_0' + 2u_1 \sqrt{\beta} \sin(T_0 \Omega) D_0 w_0' + \\
 & 2u_0 \sqrt{\beta} D_0 w_1' + u_1 \sqrt{\beta} \Omega \cos(T_0 \Omega) w_0'' - u_1 \sqrt{\beta} \Omega \xi \cos(T_0 \Omega) w_0'' + u_0^2 w_1'' - \Gamma w_1'' \\
 & - k w_0'' \int_0^1 w_0'^2 dx + 2u_0 u_1 \sin(T_0 \Omega) w_0'' - \bar{g} w_1'' + \xi \bar{g} w_1'' + 2\alpha D_0 w_1'''' + w_1'''' = 0, \\
 & w_1(0, \tau) = w_1(1, \tau) = w_1'(0, \tau) = w_1'(1, \tau) = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

La solución de la Ec. (12), perturbación de primer orden, puede ser expresada de la siguiente manera,

$$w_0(T_0, T_1, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\xi) A_m(T_1) e^{i\omega_m T_0} + cc. \tag{14}$$

donde A_m son funciones complejas desconocidas, $\phi_m(\xi)$ es la forma modal, ω_m es la frecuencia natural y cc indica a los complejos conjugados de los términos precedentes.

La forma modal $\phi_m(\xi)$ para una condición de borde empotrado – apoyado es calculado de la siguiente manera como se aprecia en la Ec. (15), donde C_{1m} debe satisfacer la condición de ortogonalidad (Ec. (16)).

$$\begin{aligned}
 \phi_m(\xi) = C_{1m} & \left[\frac{e^{\beta_{4m}}(\beta_{2m} - \beta_{3m}) + e^{\beta_{2m}}(\beta_{3m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{3m}}(\beta_{4m} - \beta_{2m})}{e^{\beta_{4m}}(\beta_{3m} - \beta_{1m}) + e^{\beta_{3m}}(\beta_{1m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{1m}}(\beta_{4m} - \beta_{3m})} \right] e^{\beta_{1m}\xi} - e^{\beta_{2m}\xi} + \\
 & \left[\frac{e^{\beta_{4m}}(\beta_{2m} - \beta_{1m}) + e^{\beta_{2m}}(\beta_{1m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{1m}}(\beta_{4m} - \beta_{2m})}{e^{\beta_{4m}}(\beta_{1m} - \beta_{3m}) + e^{\beta_{1m}}(\beta_{3m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{3m}}(\beta_{4m} - \beta_{1m})} \right] e^{\beta_{3m}\xi} + \\
 & \left[\frac{e^{\beta_{3m}}(\beta_{2m} - \beta_{1m}) + e^{\beta_{2m}}(\beta_{1m} - \beta_{3m}) + e^{\beta_{1m}}(\beta_{3m} - \beta_{2m})}{e^{\beta_{4m}}(\beta_{3m} - \beta_{1m}) + e^{\beta_{3m}}(\beta_{1m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{1m}}(\beta_{4m} - \beta_{3m})} \right] e^{\beta_{4m}\xi}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\int_0^1 \phi_m^2(\xi) d\xi = 1. \tag{16}$$

donde β_{im} satisface la siguiente relación,

$$\beta_{im}^4 + (u_0^2 - \Gamma) \beta_{im}^2 - (1 - \xi) \bar{g} \beta_{im}^2 + (2I\sqrt{\beta} \omega_m u_0 + \bar{g}) \beta_{im} - \omega_m^2 = 0, \quad i=1, 2, 3, 4. \tag{17}$$

y la ecuación característica,

$$\begin{aligned}
 & e^{\beta_{2m} + \beta_{3m}} (\beta_{2m}^2 - \beta_{3m}^2) (\beta_{1m} - \beta_{4m}) - e^{\beta_{1m} + \beta_{3m}} (\beta_{1m}^2 - \beta_{3m}^2) (\beta_{2m} - \beta_{4m}) + \\
 & e^{\beta_{1m} + \beta_{2m}} (\beta_{1m}^2 - \beta_{2m}^2) (\beta_{3m} - \beta_{4m}) + e^{\beta_{1m} + \beta_{4m}} (\beta_{1m}^2 - \beta_{4m}^2) (\beta_{2m} - \beta_{3m}) \\
 & - e^{\beta_{2m} + \beta_{4m}} (\beta_{2m}^2 - \beta_{4m}^2) (\beta_{1m} - \beta_{3m}) + e^{\beta_{3m} + \beta_{4m}} (\beta_{3m}^2 - \beta_{4m}^2) (\beta_{1m} - \beta_{2m}) = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

La frecuencia natural del sistema varía con respecto a la velocidad media del fluido, la relación de masa fluido – tubería, la tensión axial externa y la gravedad \bar{g} . Para analizar la interacción de los primeros dos modos de vibración bajo condiciones de resonancia interna y externa, se consideran las relaciones correspondientes al caso de resonancia interna ($\omega_2 \approx 3\omega_1$) y el caso de resonancia externa del primer modo, es decir $\Omega \approx 2\omega_1$. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, la solución de la Ec. (12) correspondiente a

la perturbación de primer orden queda expresada de la siguiente forma,

$$w_0(T_0, T_1, \xi) = A_1(T_1)\phi_1(\xi)e^{i\omega_1 T_0} + A_2(T_1)\phi_2(\xi)e^{i\omega_2 T_0} + cc. \quad (19)$$

4 RESONANCIA PARAMETRICA PRINCIPAL

Para investigar la respuesta del sistema bajo condiciones de resonancia interna y externa se establece que ω_2 es muy próximo a $3\omega_1$, como así también Ω a $2\omega_1$. Para lograr esto se introducen parámetros de sintonización σ_1 y σ_2 .

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \quad \Omega = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2. \quad (20)$$

Reemplazando las Ecs. (19) y (20) en la Ec. (13) se obtiene,

$$\begin{aligned} D_0^2 w_1 + (u_0^2 - \Gamma) w_1'' + 2u_0 \sqrt{\beta} D_0 w_1' + w_1'''' = & \Gamma_1 e^{i\omega_1 T_0} + \Gamma_2 e^{i\omega_2 T_0} + \\ & \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_1 \phi_1' + Iu_0 u_1 \phi_1'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_1'' \right] \bar{A}_1 e^{i(\omega_1 T_0 + \sigma_2 T_1)} + \\ & \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_2 \phi_2' + Iu_0 u_1 \phi_2'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_2'' \right] A_2 e^{i(\omega_1 T_0 + \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_1)} + \\ & \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_1 \phi_1' + Iu_0 u_1 \phi_1'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_1'' \right] A_1 e^{i(\omega_2 T_0 - \sigma_1 T_1 + \sigma_2 T_1)} + NST. \end{aligned} \quad (21)$$

donde Γ_m están definidas en el Apéndice A y NST son los términos no seculares. La parte homogénea de la Ec. (21) tiene solución no trivial, en tanto que la parte del problema no homogéneo tiene solución sólo si satisface la condición de compatibilidad. En este caso se establece que la parte derecha de la Ec. (21) debe ser ortogonal a $e^{i\omega_m T_0} \phi_m$.

$$\int_0^1 \left\{ \Gamma_1 + \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_1 \phi_1' + Iu_0 u_1 \phi_1'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_1'' \right] \bar{A}_1 e^{i(\sigma_2 T_1)} + \right. \\ \left. \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_2 \phi_2' + Iu_0 u_1 \phi_2'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_2'' \right] A_2 e^{i(\sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_1)} \right\} \phi_1 d\xi = 0. \quad (22)$$

$$\int_0^1 \left\{ \Gamma_2 + \left[u_1 \sqrt{\beta} \omega_1 \phi_1' + Iu_0 u_1 \phi_1'' - \frac{(1-\xi)}{2} u_1 \Omega \sqrt{\beta} \phi_1'' \right] A_1 e^{i(-\sigma_1 T_1 + \sigma_2 T_1)} \right\} \phi_2 d\xi = 0. \quad (23)$$

Sustituyendo Γ_1 y Γ_2 , definidas en el Apéndice A, en las Ecs. (22) y (23) y manipulando algebraicamente se pueden obtener las ecuaciones de modulación.

$$2I(A_1' + \mu C_1 A_1) + 2e_1 \alpha A_1 + 8S_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 8S_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 8e^{i\sigma_1 T_1} G_1 A_2 \bar{A}_1^2 + 2K_1 \bar{A}_1 e^{i\sigma_1 T_1} + \\ 2K_2 A_2 e^{i\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)} = 0. \quad (24)$$

$$2I(A_2' + \mu C_2 A_2) + 2e_2 \alpha A_2 + 8S_2 A_2^2 \bar{A}_2 + 8S_3 A_1 A_2 \bar{A}_1 + 8e^{-i\sigma_1 T_1} G_2 A_1^3 + 2K_3 A_1 e^{i\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)} = 0. \quad (25)$$

donde μ , C_i , S_i , K_i , G_i , están definidas en el Apéndice A.

Se introduce alternativamente una transformación a coordenadas cartesianas mediante la Ec. (26). De esta manera, esta transformación puede ser más conveniente en el análisis de

bifurcación de la dinámica del sistema, a partir de las ecuaciones de modulación.

$$A_k = \frac{1}{2}(p_k - Iq_k)e^{I\lambda_k}, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

donde,

$$\lambda_1 = \frac{T_1\sigma_2}{2}, \quad \lambda_2 = (-T_1\sigma_1 + 0.5T_1\sigma_2). \quad (27)$$

Aplicando el método de reconstitución y teniendo en cuenta la Ec. (26) se obtienen las siguientes expresiones separando la parte real e imaginaria.

$$p'_1 = -C_1\mu p_1 + e_1\alpha q_1 - 0.5\sigma_2 q_1 + S_1(p_1^2 q_1 + q_1^3) - G_1(2p_1 p_2 q_1 + p_1^2 q_2 - q_1^2 q_2) + S_2(p_2^2 q_1 + q_1 q_2^2) - K_1 q_1 + K_2 q_2. \quad (28)$$

$$p'_2 = -C_2\mu p_2 + e_2\alpha q_2 + (\sigma_1 q_2 - 1.5\sigma_2 q_2) + S_3(p_1^2 q_2 + q_1^2 q_2) + G_2(3p_1^2 q_1 - q_1^3) + S_4(p_2^2 q_2 + q_2^3) + K_3 q_1. \quad (29)$$

$$q'_1 = -C_1\mu q_1 - e_1\alpha p_1 + 0.5\sigma_2 p_1 - S_1(p_1 q_1^2 + p_1^3) - G_1(2p_1 q_1 q_2 - p_2 q_1^2 + p_1^2 p_2) + S_2(-p_1 q_2^2 - p_1 p_2^2) - K_1 p_1 - K_2 p_2. \quad (30)$$

$$q'_2 = -C_2\mu q_2 - e_2\alpha p_2 - (\sigma_1 p_2 - 1.5\sigma_2 p_2) - S_3(p_1^2 p_2 + q_1^2 p_2) + G_2(3q_1^2 p_1 - p_1^3) - S_4(q_2^2 p_2 + p_2^3) - K_3 p_1. \quad (31)$$

Las amplitudes a_i son calculadas de la siguiente manera,

$$a_i = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (32)$$

5 RESULTADOS Y DISCUSIONES

5.1 Soluciones de equilibrio y análisis de estabilidad

Las soluciones de equilibrio de las Ecs. (28–31) corresponden a movimientos periódicos. Para determinar las soluciones de equilibrio y su estabilidad se establece $p'_i = q'_i = 0$ en las Ecs. (28–31) y se resuelve numéricamente el sistema algebraico para p_1 , p_2 , q_1 y q_2 , considerando valores específicos de los parámetros de sintonización σ_i . Las amplitudes a_1 , a_2 , son calculadas mediante la Ec. (32). La estabilidad de los puntos fijos es determinada analizando los autovalores de la matriz Jacobiana de las ecuaciones no lineales. El software AUTO (Doedel, 1997) es utilizado para realizar las curvas correspondientes a las soluciones de equilibrio.

Las curvas exhiben un comportamiento complejo debido a la presencia de bifurcaciones ‘silla nodo’ (cuando uno de los autovalores cruza el eje imaginario a lo largo del eje real, desde la izquierda hacia la derecha del plano medio) y tipo ‘Hopf’ (cuando un par de autovalores complejos conjugados cruzan simultáneamente el eje imaginario transversalmente desde la izquierda hacia la derecha del plano medio). De esta manera, se obtienen bifurcaciones discontinuas donde el estado del sistema experimenta el fenómeno conocido como ‘salto’ (salto en amplitud hasta encontrar una solución estable) a medida que se varía el parámetro del sistema a través de los puntos de bifurcación. Las bifurcaciones discontinuas pueden conducir

a un movimiento sin límites, un comportamiento oscilatorio o a uno caótico.

En las Figuras 2 y 3, se puede apreciar las curvas típicas de respuesta en frecuencia para el primer y segundo modo con un parámetro de sintonización $\sigma_1 = 40$, y con $\mu = 0.1$, $u_0 = 3$, $\beta = 0.65$, $k = 1.5$, $\Gamma = 25$, $u_1 = 25$ y $\bar{g} = 0$.

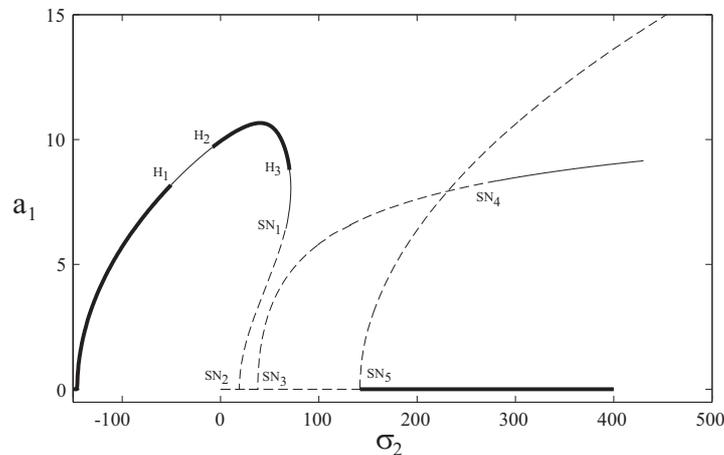


Figura 2. Curva en respuesta en frecuencia del primer modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

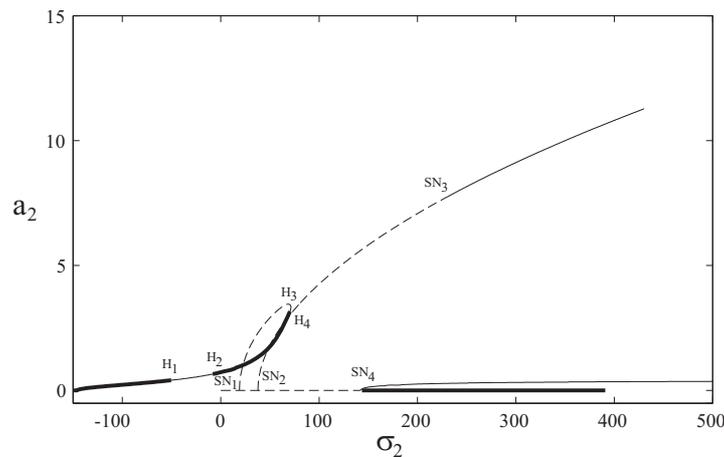


Figura 3. Curva en respuesta en frecuencia del segundo modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

La curva de respuesta en frecuencia para el primer modo, despreciando el efecto de la gravedad, es mostrada en la Figura 2, en presencia de resonancia externa e interna. La respuesta es estable hasta llegar a un valor $\sigma_2 = -49.98$, donde pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf (H_1). Luego, la amplitud crece hasta alcanzar una curva estable, la cual esta limitada por una bifurcación de Hopf a la izquierda ($H_2, \sigma_2 = -8.01$) y a la derecha de la misma ($H_3, \sigma_2 = 70.26$). A partir de este punto la respuesta es inestable hasta llegar a una bifurcación silla nodo ($SN_1, \sigma_2 = 61.47$). A medida que se avanza hacia valores positivos del parámetro σ_2 la solución pierde estabilidad a través de bifurcaciones silla nodo (SN_2 en $\sigma_2 = 19.14$, SN_3 en $\sigma_2 = 37.92$ y SN_4 en $\sigma_2 = 230.4$). La solución es inestable

y se observa un aumento en amplitud de respuesta. Luego, cuando se alcanza un valor del parámetro $\sigma_2 = 132.8$, la solución recupera estabilidad por medio de una bifurcación silla nodo (SN_5).

En las Figuras 4 y 5, se considera un valor de parámetro de resonancia interna $\sigma_1 = 40$, y con $\mu = 0.1$, $\xi = 0.65$, $u_0 = 3$, $\beta = 0.65$, $k = 1.5$, $\Gamma = 25$, $u_1 = 25$ y $\bar{g} = 13$, observándose las curvas de respuesta en frecuencia para el primer y segundo modo.

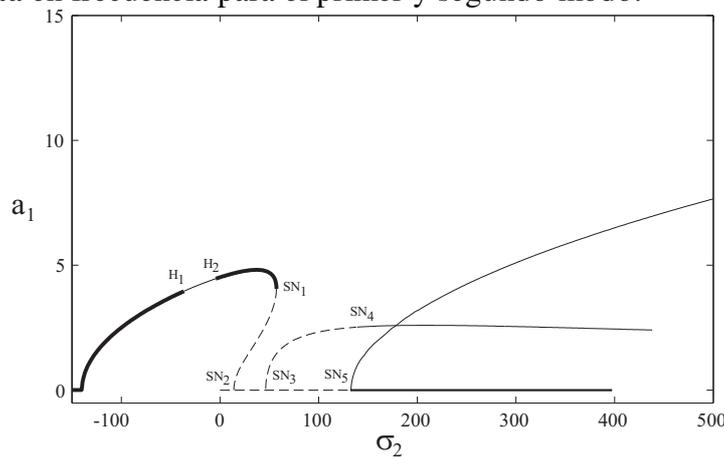


Figura 4. Curva en respuesta en frecuencia del primer modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

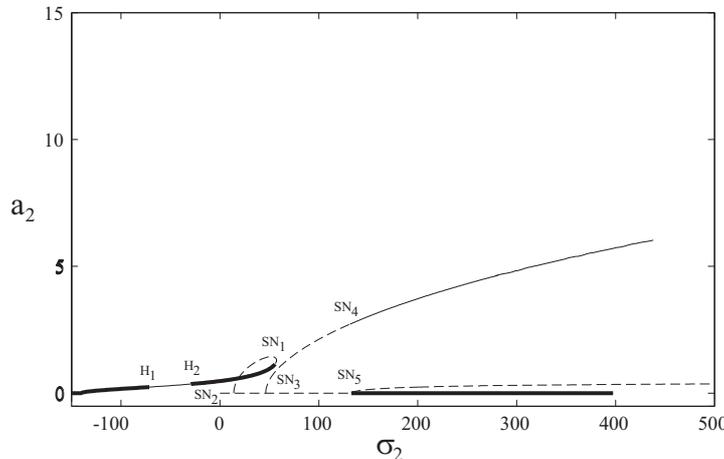


Figura 5. Curva en respuesta en frecuencia del segundo modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

En la Figura 4, se aprecia la curva de respuesta en frecuencia para el primer modo, teniendo en cuenta en las ecuaciones diferenciales el efecto debido a la aceleración de la gravedad. La respuesta es estable hasta llegar a un valor $\sigma_2 = -36.43$ y pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf (H_1). Se observa un aumento de la amplitud hasta alcanzar una curva estable, la cual está limitada por una bifurcación de Hopf a la izquierda (H_2 , $\sigma_2 = -4.252$) y por una bifurcación silla nodo a la derecha de la misma (SN_1 , $\sigma_2 = 57.28$). A diferencia del caso anterior que está limitada a la derecha por una bifurcación de Hopf. A medida que

se aumenta el valor del parámetro de sintonización σ_2 , la solución posee una rama inestable limitada por bifurcaciones silla nodo (SN_2 en $\sigma_2 = 14.12$, SN_3 en $\sigma_2 = 47.37$ y SN_4 en $\sigma_2 = 138.1$) y se puede apreciar un aumento de la amplitud de respuesta. Luego cuando se alcanza un valor del parámetro $\sigma_2 = 142$, la solución recupera estabilidad por medio de una bifurcación silla nodo (SN_5).

De la comparación entre las Figuras 2 y 4, se observa que la mayor amplitud de respuesta en el primer y segundo modo corresponde al caso en que no se tiene en cuenta el efecto de la aceleración de la gravedad.

En la Figura 6, se pueden observar la curva de respuesta versus carga, considerando un valor de parámetro de resonancia interna $\sigma_1 = 40$ y $\sigma_2 = -8.01$, y con $\mu = 0.1$, $u_0 = 3$, $\beta = 0.65$, $k = 1.5$, $\Gamma = 25$ y $\bar{g} = 0$.

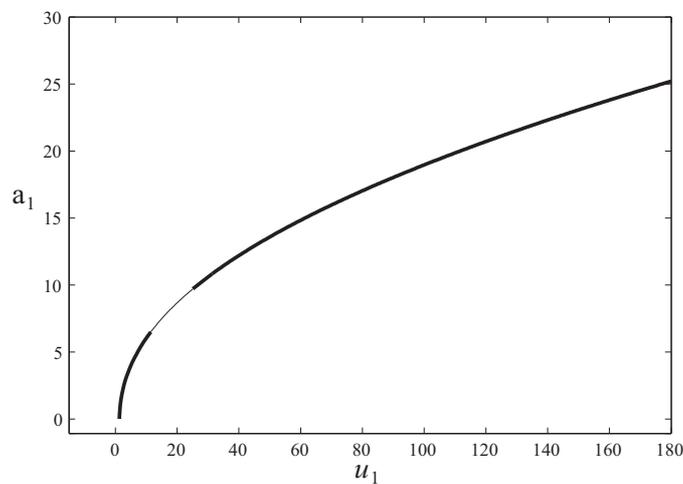


Figura 6. Curva en respuesta versus carga. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

En la Figura 7, se pueden observar la curva de respuesta versus carga, considerando un valor de parámetro de resonancia interna $\sigma_1 = 40$ y $\sigma_2 = -4.25$, y con $\mu = 0.1$, $\xi = 0.65$, $u_0 = 3$, $\beta = 0.65$, $k = 1.5$, $\Gamma = 25$ y $\bar{g} = 13$.

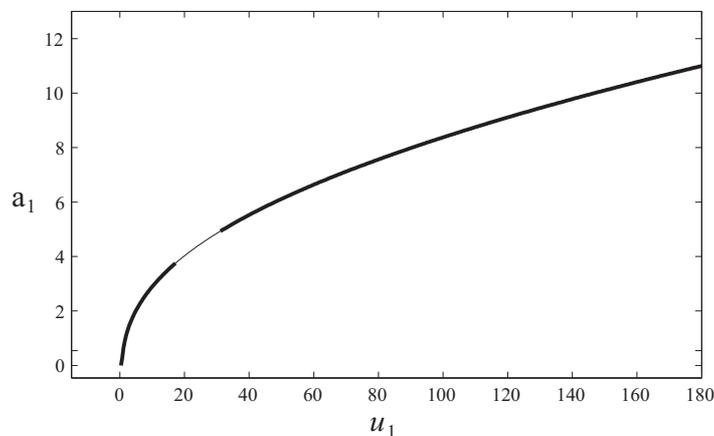


Figura 7. Curva en respuesta versus carga. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

En las Figuras 8 y 9, se realiza una comparación de las curvas de respuesta en frecuencia para el primer y segundo modo, donde se puede apreciar la influencia del efecto gravitatorio.

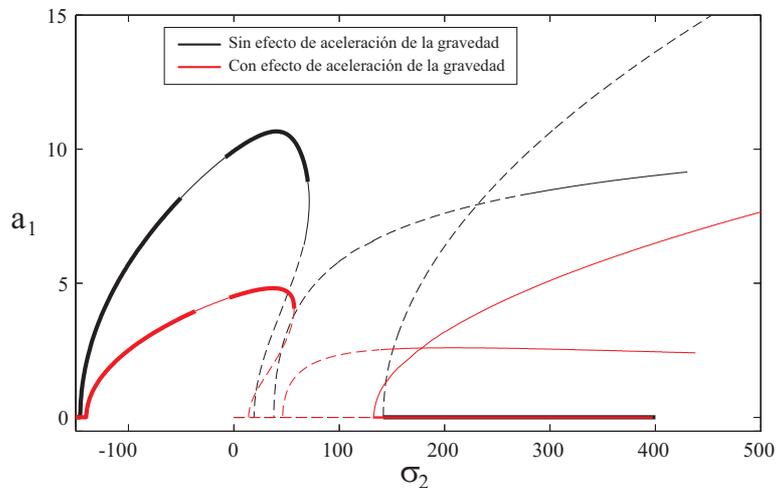


Figura 8. Curva en respuesta en frecuencia del primer modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

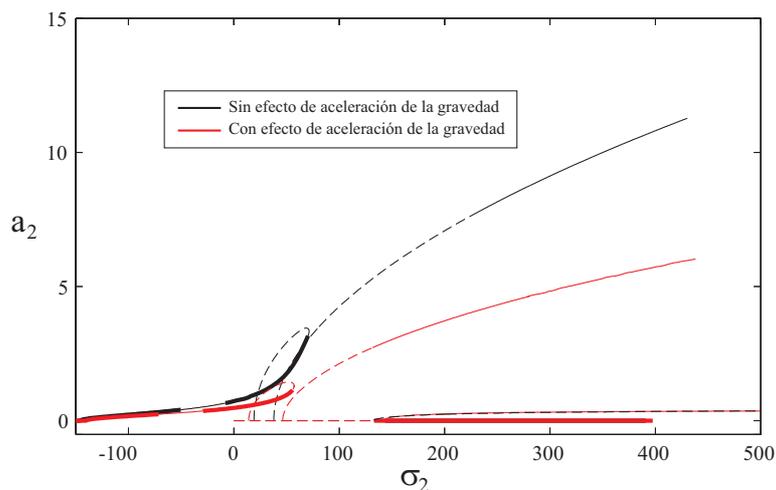


Figura 9. Curva en respuesta en frecuencia del segundo modo. Resonancia interna $\sigma_1 = 40$. Líneas continuas (discontinuas) representan soluciones de equilibrio estables (inestables) y líneas continuas finas representan focos inestables.

De la comparación de las curvas de respuesta en frecuencia del primer y segundo modo observadas en las Figuras 8 y 9, se puede apreciar que el efecto de la aceleración de la gravedad disminuye la amplitud de respuesta.

6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se investigó la respuesta dinámica no lineal de una tubería vertical empotrada – apoyada que transporta un fluido a una velocidad que posee una componente media constante y otra componente que varía armónicamente. Se eligen los parámetros del sistema de modo de activar el fenómeno de resonancia interna. Se realiza el análisis mediante un método de perturbación directa.

Se estudia el caso de resonancia interna del segundo modo bajo el efecto de la aceleración de la gravedad. Se ha observado que teniendo en cuenta los términos en la ecuación diferencial que producen la aceleración debido a la gravedad es fundamental en el análisis, ya que disminuye considerablemente la amplitud de respuesta en frecuencia en el primer y segundo modo, es decir, la amplitud de respuesta del primer y segundo modo sin el efecto de la aceleración de la gravedad es aproximadamente el doble a la amplitud de respuesta considerando tal efecto.

En futuros trabajos se puede considerar diversos efectos y métodos de solución de ecuaciones, tal como temperatura, enfoque de elementos finitos, diversas formulaciones de vigas o bien problemas de incertidumbre de materiales.

APENDICE A

$$\Gamma_1 = -2I\omega_1\phi_1 \left(A_1' + \mu A_1 \right) - 2u_0\sqrt{\beta}A_1'\phi_1' - 2I\alpha\omega_1\phi_1''''A_1 + \left(3k\phi_1'' \int_0^1 \phi_1'^2 dx \right) A_1^2\bar{A}_1 + k \left(2\phi_1'' \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx + \phi_2'' \int_0^1 \phi_1'^2 dx \right) A_2\bar{A}_1 e^{I\sigma_1 T_1} + \left(4k\phi_2'' \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx + 2k\phi_1'' \int_0^1 \phi_2'^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2, \quad (33)$$

$$\Gamma_2 = -2I\omega_2\phi_2 \left(A_2' + \mu A_2 \right) - 2u_0\sqrt{\beta}A_2'\phi_2' - 2I\alpha\omega_2\phi_2''''A_2 + \left(3k\phi_2'' \int_0^1 \phi_2'^2 dx \right) A_2^2\bar{A}_2 +$$

$$k \left(\phi_1'' \int_0^1 \phi_1'^2 dx \right) A_1^3 e^{-I\sigma_1 T_1} + \left(4k\phi_1'' \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx + 2k\phi_2'' \int_0^1 \phi_1'^2 dx \right) A_1\bar{A}_1 A_2.$$

$$G_1 = -\frac{k}{8\omega_1} \left(2 \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx \int_0^1 \phi_1\phi_1'' dx + \int_0^1 \phi_1'^2 dx \int_0^1 \phi_1\phi_2'' dx \right). \quad (34)$$

$$G_2 = -\frac{k}{8\omega_2} \left(\int_0^1 \phi_1'^2 dx \int_0^1 \phi_2\phi_1'' dx \right). \quad (35)$$

$$S_1 = -\frac{3k}{8\omega_1} \left(\int_0^1 \phi_1'^2 dx \int_0^1 \phi_1\phi_1'' dx \right). \quad (36)$$

$$S_2 = -\frac{k}{8\omega_1} \left(2 \int_0^1 \phi_2'^2 dx \int_0^1 \phi_1\phi_1'' dx + 4 \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx \int_0^1 \phi_1\phi_2'' dx \right). \quad (37)$$

$$S_3 = -\frac{k}{8\omega_2} \left(4 \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx \int_0^1 \phi_2\phi_1'' dx + 2 \int_0^1 \phi_1'^2 dx \int_0^1 \phi_2\phi_2'' dx \right). \quad (38)$$

$$S_4 = -\frac{3k}{8\omega_2} \left(\int_0^1 \phi_2'^2 dx \int_0^1 \phi_2\phi_2'' dx \right). \quad (39)$$

$$K_1 = -\frac{k}{\omega_1} \left[Iu_0u_1 \int_0^1 \phi_1\phi_1'' dx - \frac{(1-\xi)}{2} \sqrt{\beta}u_1\Omega \int_0^1 \phi_1\phi_1'' dx + u_1\sqrt{\beta}\omega_1 \int_0^1 \phi_1\phi_1' dx \right]. \quad (40)$$

$$K_2 = -\frac{k}{\omega_1} \left[Iu_0u_1 \int_0^1 \phi_1\phi_2'' dx - \frac{(1-\xi)}{2} \sqrt{\beta}u_1\Omega \int_0^1 \phi_1\phi_2'' dx + u_1\sqrt{\beta}\omega_2 \int_0^1 \phi_1\phi_2' dx \right]. \quad (41)$$

$$K_3 = -\frac{k}{\omega_2} \left[Iu_0u_1 \int_0^1 \phi_2\phi_1'' dx - \frac{(1-\xi)}{2} \sqrt{\beta}u_1\Omega \int_0^1 \phi_2\phi_1'' dx + u_1\sqrt{\beta}\omega_1 \int_0^1 \phi_2\phi_1' dx \right]. \quad (42)$$

REFERENCIAS

- Chin C. M., Nayfeh A. H., Three-to-one internal resonances in hinged-clamped beams, *Nonlinear Dynamics*, 12:129–154, 1997.
- Chin C. M., Nayfeh A. H., Three-to-one internal resonances in parametrically excited hinged-clamped beams, *Nonlinear Dynamics*, 20:131–158, 1999.
- Jin J. D., Song Z. Y., Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid, *Journal of Fluid and Structures*, 20:763–783, 2005.
- Nayfeh, A. H. y Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- Paidoussis M. P., *Fluid – Structure Interactions: Slender structures and Axial flow*, Vol.1, Academic Press, London, 1998.
- Panda L. N., Kar R. C., Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with parametric and internal resonances, *Nonlinear Dynamics*, 49:9–30, 2007.
- Panda L. N., Kar R. C., Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances, *Journal Sound and Vibration*, 309:375–406, 2008.
- Wang L., Ni Q., Huang Y. Y., Stability and chaotic vibrations of a fluid – conveying pipe with additional combined constraints, *Journal of Mechanics*, Vol.1, No. 25, 2009.