

MODELO CONTINUO DE UN RETICULADO ESPACIAL PARA PROBLEMAS DINAMICOS

Alberto M. Guzmán^a, Carlos P. Filipich^{b,c} and Marta B. Rosales^{b,d}

^a*CEREDETEC, FRM, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^c*CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, Bahía Blanca, Argentina*

^d*CONICET, Argentina*

Palabras claves: reticulado espacial, dinámica, modelo continuo.

Resumen. Dentro de las construcciones metálicas existen diversas estructuras constituidas por perfiles paralelos denominados largueros, conectados entre sí por mallas de reticulados. Una de estas estructuras resultan ser los mástiles reticulados, de uso habitual como estructura de soporte de antenas. En estos sistemas, las mallas de reticulados se presentan en forma repetida y sistemática, por lo que su análisis estructural detallado requiere un elevado costo computacional. Ante ello es común utilizar modelos sustitutos de representación que surgen de reemplazar al reticulado por un modelo equivalente, logrando disminuir notablemente el costo del análisis. En trabajos anteriores, se obtuvo una formulación continua del problema partiendo de un modelo discreto, a través de un pasaje al límite admitiendo un número infinito de paños con reticulado. Se utilizó un enfoque variacional y cargas estáticas. Ahora se presentan, como extensión, las ecuaciones de campo que gobiernan la dinámica del problema y su implementación. El reticulado analizado corresponde al caso en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como reticulado en zig-zag. En el presente planteo han sido tenidos en cuenta los efectos inerciales asociados a las masas de las diagonales y largueros. Por último, se presentan ejemplos numéricos para los cuales se determinan sus frecuencias y modos no amortiguados aplicando la formulación desarrollada, y se comparan con las propiedades dinámicas obtenidas para el reticulado espacial a partir de una modelación vía elementos finitos.

1 INTRODUCCIÓN

Dentro de la construcción metálica tienen un uso muy difundido las piezas compuestas constituidas por perfiles paralelos denominados montantes o largueros, conectados entre sí por diagonales. En lo que hace fundamentalmente a la industria de las telecomunicaciones, las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes, resultando ello en un menor costo computacional a la hora del análisis (Madagula et al., 1998; Wahba et al., 1998)

En trabajos anteriores desarrollados por los autores del presente trabajo (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011), se obtuvo la formulación continua del problema partiendo de un modelo discreto, a través de un pasaje al límite admitiendo un número infinito de paños con reticulado. Se utilizó un enfoque variacional y cargas estáticas. Ahora se presentan, como extensión, las ecuaciones de campo que gobiernan la dinámica del problema y su implementación.

El reticulado analizado corresponde al caso en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como reticulado en zig-zag. En el presente planteo han sido tenidos en cuenta los efectos inerciales asociados a las masas de las diagonales y largueros.

La energía cinética de cada elemento del reticulado analizado es determinada en el presente trabajo, y que junto a la energía potencial determinada en trabajos anteriores, permiten hallar la energía total desarrollada por el sistema en movimiento. Luego con la aplicación del principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, se conduce directamente a las ecuaciones de campo que gobiernan el movimiento del problema analizado (Elsigoltz, 1977).

Por último, se presentan ejemplos numéricos para los cuales se determinan sus frecuencias y modos no amortiguados aplicando la formulación desarrollada, y se comparan con las propiedades dinámicas obtenidas para el reticulado espacial a partir de una modelación vía elementos finitos.

2 RETICULADO ANALIZADO

Se analiza el caso de un reticulado en zig-zag, de sección transversal triangular y equilátera. Los largueros y diagonales son de directriz recta y de sección transversal constante.

La pieza presenta una longitud L_l (ver Fig. 1), y está constituida por tres largueros continuos unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos. La sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La longitud de cada diagonal es L_d . El material que constituye a los largueros y diagonales es elástico y lineal, siendo respectivamente el módulo E_l y E_d , y la densidad ρ_l y ρ_d . Genéricamente se designa como módulo n de la pieza, al tramo en el cual quedan contenidas dos diagonales por cada plano de unión.

En realidad no se trata de un sistema continuo, dado que el número de diagonales es finito, pero aceptando que la separación o paso Δ de las diagonales es relativamente pequeño respecto a la longitud L_l de la pieza (lo que equivale a aceptar un número de diagonales suficientemente grande), podemos asimilar la suma de las energías desarrolladas en las diagonales a una integral.

Las hipótesis aceptadas para el presente desarrollo, resultan ser las siguientes:

1. Los corrimientos u , v y w son pequeños

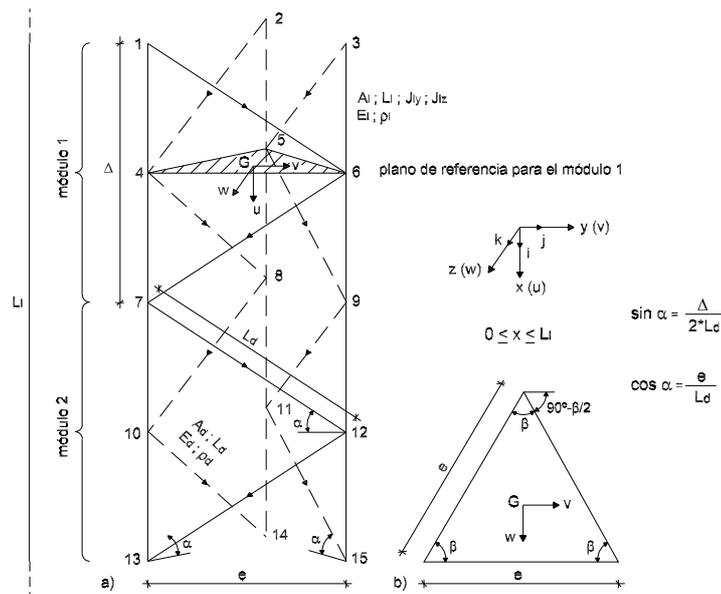


Figura 1: Pieza analizada. a) vista. b) sección transversal

2. Los corrimientos ubicados fuera de la sección de referencia son aproximados mediante serie de Taylor
3. Δ es relativamente pequeño frente al desarrollo L_l de la pieza
4. Las diagonales presentan articulaciones en sus extremos y se prescinde de su rigidez flexional, transversal e inercia rotatoria
5. Los largueros son continuos en todo su desarrollo y se prescinde de su rigidez transversal y rigidez e inercia torsional
6. El campo de velocidades tiene variación lineal dentro del dominio de las diagonales

3 PLANTEO DEL PROBLEMA

En la Figura 1 se muestra el reticulado espacial en su configuración inicial o de referencia, la que frente a una acción dinámica externa, adquiere una nueva posición de equilibrio denominada configuración deformada. Frente a este cambio en la configuración, los nodos del reticulado (1,2,3,...) experimentan corrimientos en cada una de las direcciones principales (x,y,z), siendo estos las funciones corrimientos básicos $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ de nuestro problema y referidas al baricentro de cada larguero. Estos corrimientos hacen que los elementos del reticulado desarrollen energía potencial y cinética.

A la mitad de altura de cada módulo del reticulado, es decir en $\Delta/2$, consideramos una sección transversal plana de referencia. Los corrimientos de los nodos ubicados fuera de esta sección, son expresados mediante serie de Taylor a partir de los corrimientos de los nodos contenidos en la sección de referencia.

3.1 Energía potencial del sistema

Se presentan las expresiones energéticas obtenidas por estos autores en trabajos anteriores (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011).

La expresión correspondiente a la energía interna de deformación elástica en diagonales, resulta:

$$U_d = \frac{E_d A_d}{2L_d \Delta} \int_0^{L_l} (A_1 \sin^2 \alpha + A_2 \cos^2 \alpha + A_3 \sin \alpha \cos \alpha) dx \quad (1)$$

y considerando ahora una sección transversal genérica del reticulado, ubicada a una altura x (ver Figura 2), los coeficientes algebraicos A_1 , A_2 y A_3 resultan:

$$A_1 = \left[2(u_{a(x,t)} - u_{b(x,t)})^2 + u'_{b(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] + \left[2(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)})^2 + u'_{c(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] + \left[2(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)})^2 + u'_{a(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] \quad (2)$$

$$A_2 = \left[2(v_{a(x,t)} - v_{b(x,t)})^2 + v'_{b(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] + \left[2(v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)})^2 + v'_{c(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] \cos^2 \beta + \left[2(w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)})^2 + w'_{c(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] \sin^2 \beta - \left[4(v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)})(w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)}) + v'_{c(x,t)} w'_{c(x,t)} \Delta^2 \right] \sin \beta \cos \beta + \left[2(v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)})^2 + v'_{a(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] \cos^2 \beta + \left[2(w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)})^2 + w'_{a(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \right] \sin^2 \beta + \left[4(v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)})(w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)}) + v'_{a(x,t)} w'_{a(x,t)} \Delta^2 \right] \sin \beta \cos \beta \quad (3)$$

$$A_3 = 2 \left[(u_{a(x,t)} - u_{b(x,t)})v'_{b(x,t)} + (v_{a(x,t)} - v_{b(x,t)})u'_{b(x,t)} \right] \Delta - 2 \left[(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)})v'_{c(x,t)} + (v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)})u'_{c(x,t)} \right] \Delta \cos \beta + 2 \left[(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)})w'_{c(x,t)} + (w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)})u'_{c(x,t)} \right] \Delta \sin \beta - 2 \left[(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)})v'_{a(x,t)} + (v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)})u'_{a(x,t)} \right] \Delta \cos \beta - 2 \left[(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)})w'_{a(x,t)} + (w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)})u'_{a(x,t)} \right] \Delta \sin \beta \quad (4)$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$; $(\bullet)'' \equiv \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}$; etc.

En cuanto a la expresión correspondiente a la energía interna de deformación elástica en largueros, resulta:

$$U_l = \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_l} A_4 dx + \frac{E_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} A_5 dx + \frac{E_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} A_6 dx \quad (5)$$

siendo los coeficientes algebraicos A_4 , A_5 y A_6 :

$$A_4 = (u'_{a(x,t)})^2 + (u'_{b(x,t)})^2 + (u'_{c(x,t)})^2 \quad (6)$$

$$A_5 = (v''_{a(x,t)})^2 + (v''_{b(x,t)})^2 + (v''_{c(x,t)})^2 \tag{7}$$

$$A_6 = (w''_{a(x,t)})^2 + (w''_{b(x,t)})^2 + (w''_{c(x,t)})^2 \tag{8}$$

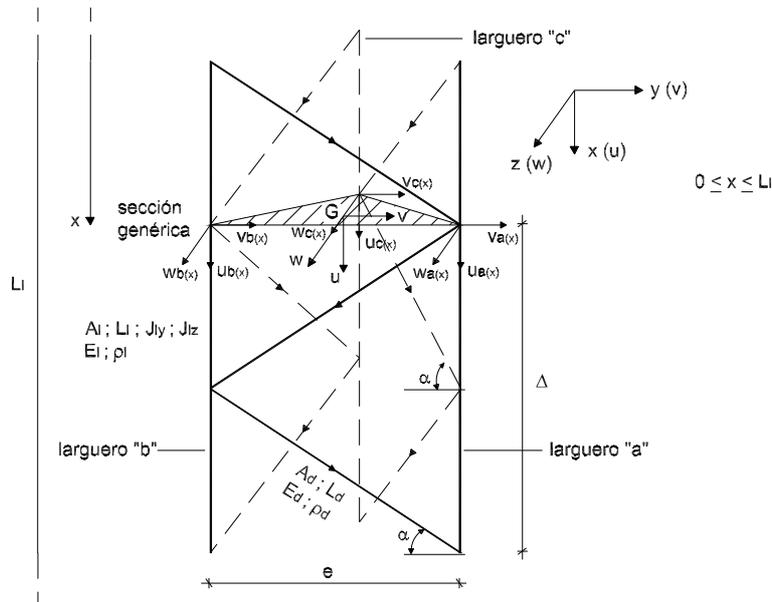


Figura 2: Sección transversal genérica

En cuanto al trabajo externo desarrollado por cargas concentradas P_u , P_v y P_w actuando en los largueros a , b y c en las direcciones principales (x,y,z) , resulta:

$$\begin{aligned} W_P = & P_{ua(t)}u_{a(x,t)} + P_{ub(t)}u_{b(x,t)} + P_{uc(t)}u_{c(x,t)} + \\ & + P_{va(t)}v_{a(x,t)} + P_{vb(t)}v_{b(x,t)} + P_{vc(t)}v_{c(x,t)} + \\ & + P_{wa(t)}w_{a(x,t)} + P_{wb(t)}w_{b(x,t)} + P_{wc(t)}w_{c(x,t)} \end{aligned} \tag{9}$$

En cuanto al trabajo externo desarrollado por cargas distribuidas q_u , q_v y q_w actuando sobre los largueros en las direcciones principales (x,y,z) , resulta:

$$\begin{aligned} W_q = & q_{ua(x,t)}u_{a(x,t)} + q_{ub(x,t)}u_{b(x,t)} + q_{uc(x,t)}u_{c(x,t)} + \\ & + q_{va(x,t)}v_{a(x,t)} + q_{vb(x,t)}v_{b(x,t)} + q_{vc(x,t)}v_{c(x,t)} + \\ & + q_{wa(x,t)}w_{a(x,t)} + q_{wb(x,t)}w_{b(x,t)} + q_{wc(x,t)}w_{c(x,t)} \end{aligned} \tag{10}$$

En cuanto al trabajo externo desarrollado por pares M_v y M_w actuando respectivamente en cada larguero alrededor de los ejes y y z , resulta:

$$\begin{aligned} W_M = & M_{va(t)}\theta_{va(x,t)} + M_{vb(t)}\theta_{vb(x,t)} + M_{vc(t)}\theta_{vc(x,t)} + \\ & + M_{wa(t)}\theta_{wa(x,t)} + M_{wb(t)}\theta_{wb(x,t)} + M_{wc(t)}\theta_{wc(x,t)} \end{aligned} \tag{11}$$

en donde el giro flexional de cada larguero resulta por relaciones geométricas:

$$\theta_{vj(x,t)} \approx w'_j(x,t) \quad y \quad \theta_{wj(x,t)} \approx v'_j(x,t) \quad j = a, b, c$$

En cuanto al trabajo externo por efecto de segundo orden desarrollado tanto por el peso propio del reticulado como por las cargas axiales aplicadas en los largueros, resulta:

$$W_2 = \frac{P_{ua(t)}}{2} \int_0^{L_i} A_7 dx + \frac{P_{ub(t)}}{2} \int_0^{L_i} A_8 dx + \frac{P_{uc(t)}}{2} \int_0^{L_i} A_9 dx + \frac{\rho_l g A_l + \rho_d g \frac{A_d}{\cos \alpha}}{2} \int_0^{L_i} A_{10} dx \quad (12)$$

los coeficientes algebraicos A_7 , A_8 , A_9 y A_{10} resultan:

$$A_7 = (v'_{a(x,t)})^2 + (w'_{a(x,t)})^2 \quad (13)$$

$$A_8 = (v'_{b(x,t)})^2 + (w'_{b(x,t)})^2 \quad (14)$$

$$A_9 = (v'_{c(x,t)})^2 + (w'_{c(x,t)})^2 \quad (15)$$

$$A_{10} = (v'_{a(x,t)})^2 + (v'_{b(x,t)})^2 + (v'_{c(x,t)})^2 + (w'_{a(x,t)})^2 + (w'_{b(x,t)})^2 + (w'_{c(x,t)})^2 \quad (16)$$

3.2 Energía cinética en diagonales

Considerando el módulo 1, y a partir de los corrimientos experimentados en sus nodos, se determina la energía cinética desarrollada en cada diagonal del mismo. Se analiza la diagonal $d^{(16)}$ ubicada sobre la cara 1 y que va desde el nodo 1 al nodo 6 (ver Figura 3).

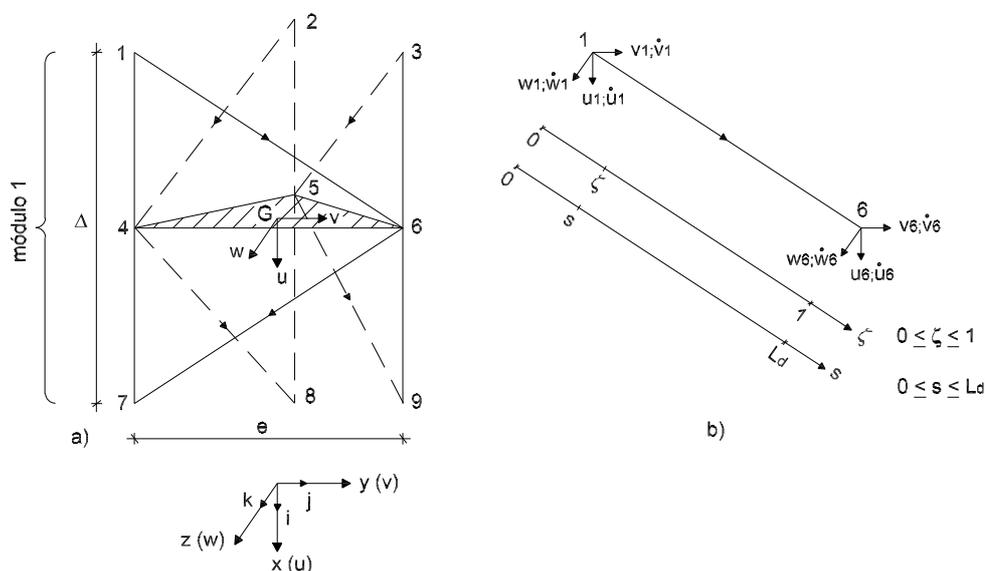


Figura 3: a) diagonal analizada. b) parametrización del dominio

Dichos corrimientos dinámicos darán lugar al desarrollo de velocidades nodales, las que en el dominio s de la diagonal ($0 \leq s \leq L_d$) se acepta que presentan una variación lineal. Por lo tanto el campo de velocidades puede ser expresado como:

$$\vec{V}_{d(16)(s,t)} = N_1 \vec{V}_{1(s,t)} + N_6 \vec{V}_{6(s,t)} \quad (17)$$

Habiendo parametrizado el dominio s de la diagonal tal que $s = \zeta L_d$, siendo el dominio parametrizado $0 \leq \zeta \leq 1$, las funciones que representan la variación lineal resultan:

$$N_{1(\zeta)} = 1 - \zeta \quad (18)$$

$$N_{6(\zeta)} = \zeta \quad (19)$$

mientras que los vectores velocidad en cada uno de los nodos valen:

$$\vec{V}_{1(s,t)} = \dot{u}_{1(s,t)}\check{i} + \dot{v}_{1(s,t)}\check{j} + \dot{w}_{1(s,t)}\check{k} \quad (20)$$

$$\vec{V}_{6(s,t)} = \dot{u}_{6(s,t)}\check{i} + \dot{v}_{6(s,t)}\check{j} + \dot{w}_{6(s,t)}\check{k} \quad (21)$$

siendo $(\dot{\bullet}) \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$

Por lo tanto la energía cinética desarrollada en la diagonal analizada, debido a los corrimientos dinámicos, resulta:

$$T_{d(16)} = \frac{\rho_d A_d}{2} \int_0^{L_d} \vec{V}_{d(16)(s,t)} \vec{V}_{d(16)(s,t)} ds \quad (22)$$

y al reemplazar los vectores velocidad por sus componentes y considerar el dominio parametrizado, la energía cinética se expresa como:

$$T_{d(16)} = \frac{\rho_d A_d L_d}{6} \left(\dot{u}_{1(\zeta,t)}^2 + \dot{v}_{1(\zeta,t)}^2 + \dot{w}_{1(\zeta,t)}^2 + \dot{u}_{6(\zeta,t)}^2 + \dot{v}_{6(\zeta,t)}^2 + \dot{w}_{6(\zeta,t)}^2 + \right. \\ \left. + \dot{u}_{1(\zeta,t)}\dot{u}_{6(\zeta,t)} + \dot{v}_{1(\zeta,t)}\dot{v}_{6(\zeta,t)} + \dot{w}_{1(\zeta,t)}\dot{w}_{6(\zeta,t)} \right) \quad (23)$$

Con un desarrollo equivalente se obtienen las energías cinéticas desarrolladas en las restantes diagonales contenidas en el módulo 1. Designando a T_{d1} como la suma discreta de estas energías, resulta:

$$T_{d1} = T_{d(16)} + T_{d(67)} + T_{d(24)} + T_{d(48)} + T_{d(35)} + T_{d(59)} \quad (24)$$

siendo éste el aporte de las diagonales del módulo 1 a la energía cinética total del sistema.

Expresando las velocidades de los nodos ubicados fuera de la sección de referencia, vía serie de Taylor, por las velocidades experimentadas por los nodos ubicados sobre dicha sección, y luego desarrollando algebraicamente, resulta:

$$T_{d1} = \frac{\rho_d A_d L_d}{3} \left[2(\dot{u}_{4(\zeta,t)}^2 + \dot{v}_{4(\zeta,t)}^2 + \dot{w}_{4(\zeta,t)}^2 + \dot{u}_{5(\zeta,t)}^2 + \dot{v}_{5(\zeta,t)}^2 + \dot{w}_{5(\zeta,t)}^2 + \dot{u}_{6(\zeta,t)}^2 + \dot{v}_{6(\zeta,t)}^2 + \right. \\ \left. + \dot{w}_{6(\zeta,t)}^2) + (\dot{u}_{4(\zeta,t)}\dot{u}_{5(\zeta,t)} + \dot{v}_{4(\zeta,t)}\dot{v}_{5(\zeta,t)} + \dot{w}_{4(\zeta,t)}\dot{w}_{5(\zeta,t)} + \dot{u}_{5(\zeta,t)}\dot{u}_{6(\zeta,t)} + \right. \\ \left. + \dot{v}_{5(\zeta,t)}\dot{v}_{6(\zeta,t)} + \dot{w}_{5(\zeta,t)}\dot{w}_{6(\zeta,t)} + \dot{u}_{6(\zeta,t)}\dot{u}_{4(\zeta,t)} + \dot{v}_{6(\zeta,t)}\dot{v}_{4(\zeta,t)} + \dot{w}_{6(\zeta,t)}\dot{w}_{4(\zeta,t)}) + \right. \\ \left. + (\dot{u}'_{4(\zeta,t)} + \dot{v}'_{4(\zeta,t)} + \dot{w}'_{4(\zeta,t)} + \dot{u}'_{5(\zeta,t)} + \dot{v}'_{5(\zeta,t)} + \dot{w}'_{5(\zeta,t)} + \dot{u}'_{6(\zeta,t)} + \dot{v}'_{6(\zeta,t)} + \dot{w}'_{6(\zeta,t)}) \frac{\Delta^2}{4} \right] \quad (25)$$

De igual forma se obtiene la energía cinética desarrollada por las diagonales contenidas en los restantes módulos del reticulado. Siendo m el número total de módulos, la suma discreta de las energías cinéticas aportadas por todas las diagonales del reticulado, resulta:

$$T_d = \sum_{n=1}^m T_{dn} \quad (26)$$

De esta forma se ha obtenido en el discreto, la energía cinética total desarrollada por cada una de las diagonales que forman el reticulado en zig-zag.

Dado que el paso Δ entre diagonales es relativamente pequeño con respecto al desarrollo L_l del reticulado, lo que equivale matemáticamente a proponer que $\Delta \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces podemos representar de manera aproximada a la suma discreta mediante la integral clásica de Cauchy-Riemann, como si se tratase de un dominio continuo. Por lo tanto resulta:

$$T_d = \lim_{(m \rightarrow \infty; \Delta \rightarrow 0)} \sum_{n=1}^m T_{dn} \quad (27)$$

multiplicando y dividiendo por Δ a la sumatoria, en el límite resulta:

$$T_d = \frac{\rho_d A_d L_d}{3\Delta} \int_0^{L_l} (B_1 + B_2) dx \quad (28)$$

donde considerando una sección transversal genérica del reticulado, ubicada a una altura x (ver Figura 2), los coeficientes algebraicos B_1 y B_2 , resultan:

$$\begin{aligned} B_1 = & 2(\dot{u}_{a(x,t)}^2 + \dot{v}_{a(x,t)}^2 + \dot{w}_{a(x,t)}^2 + \dot{u}_{b(x,t)}^2 + \dot{v}_{b(x,t)}^2 + \dot{w}_{b(x,t)}^2 + \dot{u}_{c(x,t)}^2 + \dot{v}_{c(x,t)}^2 + \dot{w}_{c(x,t)}^2) + \\ & + (\dot{u}_{a(x,t)}\dot{u}_{b(x,t)} + \dot{v}_{a(x,t)}\dot{v}_{b(x,t)} + \dot{w}_{a(x,t)}\dot{w}_{b(x,t)} + \dot{u}_{b(x,t)}\dot{u}_{c(x,t)} + \dot{v}_{b(x,t)}\dot{v}_{c(x,t)} + \\ & + \dot{w}_{b(x,t)}\dot{w}_{c(x,t)} + \dot{u}_{c(x,t)}\dot{u}_{a(x,t)} + \dot{v}_{c(x,t)}\dot{v}_{a(x,t)} + \dot{w}_{c(x,t)}\dot{w}_{a(x,t)}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$B_2 = (\dot{u}'_{a(x,t)}^2 + \dot{v}'_{a(x,t)}^2 + \dot{w}'_{a(x,t)}^2 + \dot{u}'_{b(x,t)}^2 + \dot{v}'_{b(x,t)}^2 + \dot{w}'_{b(x,t)}^2 + \dot{u}'_{c(x,t)}^2 + \dot{v}'_{c(x,t)}^2 + \dot{w}'_{c(x,t)}^2) \frac{\Delta^2}{4} \quad (30)$$

3.3 Energía cinética en largueros

Dado que los largueros son continuos, la expresión de la energía cinética en el dominio continuo se obtiene de manera directa, resultando:

$$T_l = \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} B_3 dx + \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} B_4 dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} B_5 dx \quad (31)$$

siendo los coeficientes algebraicos B_3 , B_4 y B_5 :

$$B_3 = \dot{u}_{a(x,t)}^2 + \dot{v}_{a(x,t)}^2 + \dot{w}_{a(x,t)}^2 + \dot{u}_{b(x,t)}^2 + \dot{v}_{b(x,t)}^2 + \dot{w}_{b(x,t)}^2 + \dot{u}_{c(x,t)}^2 + \dot{v}_{c(x,t)}^2 + \dot{w}_{c(x,t)}^2 \quad (32)$$

$$B_4 = \dot{v}'_{a(x,t)}^2 + \dot{v}'_{b(x,t)}^2 + \dot{v}'_{c(x,t)}^2 \quad (33)$$

$$B_5 = \dot{w}'_{a(x,t)}^2 + \dot{w}'_{b(x,t)}^2 + \dot{w}'_{c(x,t)}^2 \quad (34)$$

3.4 Energía total del sistema

Habiendo obtenido en el continuo la energía cinética desarrollada por diagonales y largueros, queda entonces completado el planteo energético. Por lo tanto el funcional de la energía mecánica del sistema resulta:

$$\mathcal{L} = V - T \quad (35)$$

siendo V la energía potencial (energía interna de deformación y trabajo externo de las cargas) y T la energía cinética.

4 ECUACIONES DE CAMPO DEL PROBLEMA

La aplicación del principio variacional fundamental de la mecánica, conocido como Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, al funcional de la energía mecánica del sistema, conduce directamente a las ecuaciones de campo que gobiernan el movimiento del problema analizado (Elsoltz, 1977).

Las ecuaciones de campo resultan en un sistema diferencial lineal y parcial, de 9x9, en la variable espacial x y temporal t :

$$E_l u''_{a(x,t)} + E_d K_u \left(\delta_{1(x,t)} - \delta_{3(x,t)} + \frac{\Delta}{2} \eta'_{3(x,t)} \right) - \rho_l \ddot{u}_{a(x,t)} - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{1a(x,t)} + \ddot{\xi}_{3a(t)} - \ddot{u}_{a(x,t)} \frac{L_d \Delta}{2} \right) - Q_{ua(x,t)} = 0 \quad (36)$$

$$E_l u''_{b(x,t)} + E_d K_u \left(\delta_{2(x,t)} - \delta_{1(x,t)} + \frac{\Delta}{2} \eta'_{1(x,t)} \right) - \rho_l \ddot{u}_{b(x,t)} - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{1b(x,t)} + \ddot{\xi}_{2b(t)} - \ddot{u}_{b(x,t)} \frac{L_d \Delta}{2} \right) - Q_{ub(x,t)} = 0 \quad (37)$$

$$E_l u''_{c(x,t)} + E_d K_u \left(\delta_{3(x,t)} - \delta_{2(x,t)} + \frac{\Delta}{2} \eta'_{2(x,t)} \right) - \rho_l \ddot{u}_{c(x,t)} - \frac{\rho_d k_u}{3} \left(\ddot{\xi}_{2c(x,t)} + \ddot{\xi}_{3c(t)} - \ddot{u}_{c(x,t)} \frac{L_d \Delta}{2} \right) - Q_{uc(x,t)} = 0 \quad (38)$$

$$E_l v''''_{a(x,t)} + E_d K_v \left[\eta_{1(x,t)} + \left(\eta_{3(x,t)} - \frac{\Delta}{2} \delta'_{3(x,t)} \right) \cos \beta \right] + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_{a(x,t)} - \ddot{v}''_{a(x,t)} \right) + \frac{\rho_d k_v}{3} \left(\ddot{\psi}_{1a(x,t)} + \ddot{\psi}_{3a(x,t)} - \ddot{v}''_{a(x,t)} \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \left[Q_{va(x,t)} + \frac{P_{ua(t)}}{J_{ly}} v''_{a(x,t)} + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_v}{e} \right) \left(v'_{a(x,t)} + x v''_{a(x,t)} \right) \right] = 0 \quad (39)$$

$$E_l v''''_{b(x,t)} - E_d K_v \left(\eta_{2(x,t)} \cos \beta + \eta_{1(x,t)} - \frac{\Delta}{2} \delta'_{1(x,t)} \right) + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_{b(x,t)} - \ddot{v}''_{b(x,t)} \right) + \frac{\rho_d k_v}{3} \left(\ddot{\psi}_{1b(x,t)} + \ddot{\psi}_{2b(x,t)} - \ddot{v}''_{b(x,t)} \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \left[Q_{vb(x,t)} + \frac{P_{ub(t)}}{J_{ly}} v''_{b(x,t)} + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_v}{e} \right) \left(v'_{b(x,t)} + x v''_{b(x,t)} \right) \right] = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
& E_I v_{c(x,t)}'''' - E_d K_v \left[\eta_{3(x,t)} \cos \beta - \left(\eta_{2(x,t)} - \frac{\Delta}{2} \delta'_{2(x,t)} \right) \cos \beta \right] + \\
& + \rho_l \left(S_v \ddot{v}_{c(x,t)} - \ddot{v}_{c(x,t)}'' \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\psi}_{2c(x,t)} + \ddot{\psi}_{3c(x,t)} - \ddot{v}_{c(x,t)}'' \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \\
& - \left[Q_{vc(x,t)} + \frac{P_{uc(t)}}{J_{ly}} v_{c(x,t)}'' + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) \left(v'_{c(x,t)} + x v''_{c(x,t)} \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& E_I w_{a(x,t)}'''' + E_d K_w \left(\eta_{3(x,t)} - \frac{\Delta}{2} \delta'_{3(x,t)} \right) \sin \beta + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_{a(x,t)} - \ddot{w}_{a(x,t)}'' \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{1a(x,t)} + \ddot{\varphi}_{3a(x,t)} - \ddot{w}_{a(x,t)}'' \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \\
& - \left[Q_{wa(x,t)} + \frac{P_{ua(t)}}{J_{lz}} w_{a(x,t)}'' + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) \left(w'_{a(x,t)} + x w''_{a(x,t)} \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& E_I w_{b(x,t)}'''' + E_d K_w \eta_{2(x,t)} \sin \beta + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_{b(x,t)} - \ddot{w}_{b(x,t)}'' \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{1b(x,t)} + \ddot{\varphi}_{2b(x,t)} - \ddot{w}_{b(x,t)}'' \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \\
& - \left[Q_{wb(x,t)} + \frac{P_{ub(t)}}{J_{lz}} w_{b(x,t)}'' + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) \left(w'_{b(x,t)} + x w''_{b(x,t)} \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
& E_I w_{c(x,t)}'''' - E_d K_w \left[\eta_{3(x,t)} \sin \beta + \left(\eta_{2(x,t)} - \frac{\Delta}{2} \delta'_{2(x,t)} \right) \sin \beta \right] + \\
& + \rho_l \left(S_w \ddot{w}_{c(x,t)} - \ddot{w}_{c(x,t)}'' \right) + \frac{\rho_d k_w}{3} \left(\ddot{\varphi}_{2c(x,t)} + \ddot{\varphi}_{3c(x,t)} - \ddot{w}_{c(x,t)}'' \frac{L_d \Delta}{2} \right) - \\
& - \left[Q_{wc(x,t)} + \frac{P_{uc(t)}}{J_{lz}} w_{c(x,t)}'' + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) \left(w'_{c(x,t)} + x w''_{c(x,t)} \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (44)$$

donde se ha compactado la notación con coeficientes definidos en el Apéndice A.

El sistema diferencial presenta tres (3) ecuaciones de segundo orden y seis (6) de cuarto orden, por lo cual para su solución se requerirá conocer treinta (30) condiciones de borde.

5 CONDICIONES DE BORDE

En cuanto a las condiciones de borde del problema, éstas resultan:

$$\left| \left(E_I u'_{a(x,t)} + E_d K_u \eta_{3(x,t)} \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_{a(x,t)} - \frac{P_{ua(t)}}{A_l} \right) \delta u_{a(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (45)$$

$$\left| \left(E_I u'_{b(x,t)} + E_d K_u \eta_{1(x,t)} \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_{b(x,t)} - \frac{P_{ub(t)}}{A_l} \right) \delta u_{b(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (46)$$

$$\left| \left(E_l u'_{c(x,t)} + E_d K_u \eta_{2(x,t)} \frac{\Delta}{2} + \rho_d k_u \frac{L_d \Delta}{6} \ddot{u}'_{c(x,t)} - \frac{P_{uc(t)}}{A_l} \right) \delta u_{c(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (47)$$

$$\left\{ E_l v'''_{a(x,t)} - E_d K_v \delta_{3(x,t)} \frac{\Delta}{2} \cos \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_{a(x,t)} - \left[\frac{P_{ua(t)}}{J_{ly}} + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_v}{e} \right) x \right] v'_{a(x,t)} + \frac{P_{va(t)}}{J_{ly}} \right\} \delta v_{a(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (48)$$

$$\left\{ E_l v'''_{b(x,t)} + E_d K_v \delta_{1(x,t)} \frac{\Delta}{2} - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_{b(x,t)} - \left[\frac{P_{ub(t)}}{J_{ly}} + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_v}{e} \right) x \right] v'_{b(x,t)} + \frac{P_{vb(t)}}{J_{ly}} \right\} \delta v_{b(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (49)$$

$$\left\{ E_l v'''_{c(x,t)} - E_d K_v \delta_{2(x,t)} \frac{\Delta}{2} \cos \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_v \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{v}'_{c(x,t)} - \left[\frac{P_{uc(t)}}{J_{ly}} + \left(\rho_l g S_v + \rho_d g \frac{L_d k_v}{e} \right) x \right] v'_{c(x,t)} + \frac{P_{vc(t)}}{J_{ly}} \right\} \delta v_{c(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (50)$$

$$\left\{ E_l w'''_{a(x,t)} - E_d K_w \delta_{3(x,t)} \frac{\Delta}{2} \sin \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_{a(x,t)} - \left[\frac{P_{ua(t)}}{J_{lz}} + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) x \right] w'_{a(x,t)} + \frac{P_{wa(t)}}{J_{lz}} \right\} \delta w_{a(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (51)$$

$$\left\{ E_l w'''_{b(x,t)} - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_{b(x,t)} - \left[\frac{P_{ub(t)}}{J_{lz}} + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) x \right] w'_{b(x,t)} + \frac{P_{wb(t)}}{J_{lz}} \right\} \delta w_{b(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (52)$$

$$\left\{ E_l w'''_{c(x,t)} + E_d K_w \delta_{2(x,t)} \frac{\Delta}{2} \sin \beta - \left(\rho_l + \rho_d k_w \frac{L_d \Delta}{6} \right) \ddot{w}'_{c(x,t)} - \left[\frac{P_{uc(t)}}{J_{lz}} + \left(\rho_l g S_w + \rho_d g \frac{L_d k_w}{e} \right) x \right] w'_{c(x,t)} + \frac{P_{wc(t)}}{J_{lz}} \right\} \delta w_{c(x,t)} \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (53)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{ly}}{M_{wa}(t)} v''_{a(x,t)} \right) \delta v'_{a(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (54)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{ly}}{M_{wb}(t)} v''_{b(x,t)} \right) \delta v'_{b(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (55)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{ly}}{M_{wc}(t)} v''_{c(x,t)} \right) \delta v'_{c(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (56)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{lz}}{M_{va}(t)} w''_{a(x,t)} \right) \delta w'_{a(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (57)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{lz}}{M_{vb}(t)} w''_{b(x,t)} \right) \delta w'_{b(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (58)$$

$$\left| \left(\frac{E_l J_{lz}}{M_{vc}(t)} w''_{c(x,t)} \right) \delta w'_{c(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (59)$$

Se han obtenido así las treinta (30) condiciones de bordes del problema (15 por extremo), necesarias para resolver el sistema diferencial de 9x9. Los términos δu_j , δv_j , δw_j , $\delta v'_j$ y $\delta w'_j$ ($j=a,b,c$) representan las variaciones de los corrimientos cinemáticamente admisibles (compatibles con las condiciones de vínculo) en cada larguero y en cada dirección principal.

6 SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES NATURALES

Liberamos al reticulado de cargas aplicadas, de modo que:

$$P_{uj(t)} = P_{vj(t)} = P_{wj(t)} = q_{uj(x,t)} = q_{vj(x,t)} = q_{wj(x,t)} = M_{vj(t)} = M_{wj(t)} = 0 \quad (j=a,b,c)$$

Se considera que tanto largueros como diagonales están constituidos por el mismo material, de modo que $E = E_l = E_d$ y que $\rho = \rho_l = \rho_d$.

Admitiendo modos normales de vibración de frecuencia circular ω , y reemplazando en el sistema diferencial (ec. 36 a 59) previamente adimensionalizado (con $\bar{x} = x/L_l$ y $0 \leq \bar{x} \leq 1$), se obtiene un sistema diferencial ordinario y homogéneo, el cual conduce a la solución del problema de vibraciones libres.

La solución clásica de dicho sistema, consiste en adoptar como soluciones de los corrimientos $u_j(\bar{x})$, $v_j(\bar{x})$ y $w_j(\bar{x})$ (con $j=a,b,c$), a funciones trascendentes que satisfagan las condiciones de borde. Esto da lugar a un sistema algebraico lineal y homogéneo a coeficientes constantes, en

donde la nulidad del determinante de dicho sistema nos conduce a las dieciocho (18) raíces u autovalores del problema analizado.

7 RETICULADO SIMPLEMENTE APOYADO

Para el caso del reticulado simplemente apoyado, se adoptan funciones elementales trigonométricas para los corrimientos u , v y w , y que para el larguero a resultan:

$$u_a(\bar{x}) = q_1 \cos(n\pi\bar{x}) \quad ; \quad v_a(\bar{x}) = q_2 \sin(n\pi\bar{x}) \quad ; \quad w_a(\bar{x}) = q_3 \sin(n\pi\bar{x}) \quad (60)$$

y análogamente para los largueros b y c , respectivamente, siendo los q_j los coeficientes (amplitud de la forma modal) que acompañan a la función trascendente y n el número de semiondas de dichas funciones. Reemplazando estas funciones solución en el sistema diferencial adimensionalizado, se obtienen los autovalores o frecuencias naturales ω del problema presentado.

8 EJEMPLO ANALIZADO

Se trata de un reticulado espacial simplemente apoyado, de sección transversal triangular equilátera ($\beta = 60$ grad.) y cuyas características se indican a continuación: longitud de largueros $L_l = 4.0$ m, paso entre diagonales $\Delta = 0.2$ m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 17 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, Inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 43 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, sección de diagonales $A_d = 6 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, módulo de elasticidad $E = 200000$ Mpa y densidad $\rho = 7850$ kg/m³.

Para la modelación vía elementos finitos, se utilizaron en los largueros elementos tipo *beam* de dos nodos (20 por cada larguero), y en las diagonales elementos tipo *truss* también de dos nodos (1 por cada diagonal). El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 (CSi., 2007).

En la Tabla 1 se muestran los resultados de las cinco primeras frecuencias flexionales obtenidas mediante la formulación desarrollada y vía elementos finitos, mientras que en la Tabla 2 se indican las primeras cinco frecuencias axiales.

ω	modelo continuo [rad/seg]	elementos finitos [rad/seg]	diferencia [%]
1	242.25	243.20	0.39
2	798.54	807.61	1.14
3	1454.93	1485.39	2.09
4	2130.80	2185.46	2.57
5	2808.84	2895.48	3.08

Tabla 1: Frecuencias flexionales evaluadas.

ω	modelo continuo [rad/seg]	elementos finitos [rad/seg]	diferencia [%]
1	2725.02	2719.99	0.18
2	5448.72	5463.64	0.27
3	8169.40	8146.23	0.28
4	10884.31	10827.47	0.52
5	13588.14	13448.60	1.03

Tabla 2: Frecuencias axiales evaluadas.

En las Figuras 4 y 5 se muestran las tres primeras formas modales flexionales, correspondientes respectivamente al modelo continuo y al modelo vía elementos finitos.

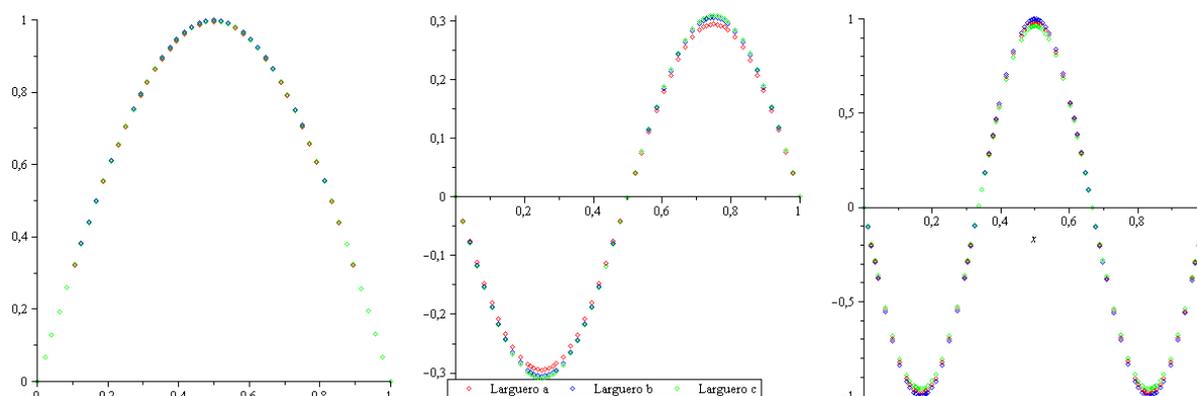


Figura 4: Tres primeras formas modales flexionales del modelo continuo

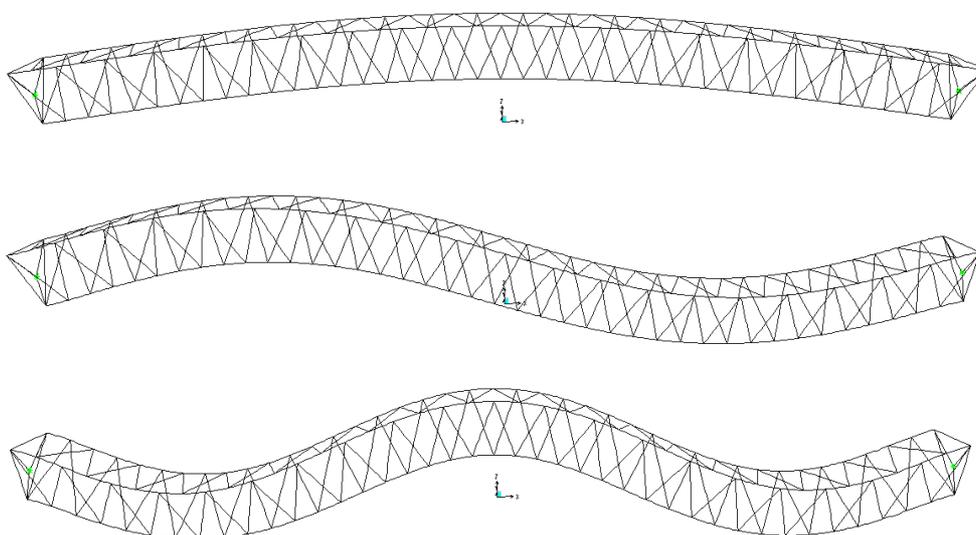


Figura 5: Tres primeras formas modales flexionales del modelo de elementos finitos

9 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se ha presentado el análisis de un elemento reticulado, realizando un estudio del comportamiento estructural a través de un pasaje del planteo discreto al continuo. En la primera parte, se abordó un reticulado espacial de sección transversal triangular, compuesto por tres largueros con diagonales dispuestas en un patrón del tipo zig-zag. En esta etapa del trabajo, se obtuvo la expresión de la energía cinética del sistema en función de los corrimientos u , v y w de cada larguero, incluyéndose, la energía potencial determinada en trabajos anteriores. Así, el funcional de energía mecánica del sistema fue obtenido a través de un desarrollo algebraico inicial en el dominio discreto, para posteriormente y admitiendo que el paso entre diagonales es pequeño frente al desarrollo del reticulado, pasar al dominio continuo en la variable x . Luego, aplicando el cálculo variacional al funcional de energía determinado, se obtuvieron de manera directa y sin mayores complicaciones las ecuaciones de campo que gobiernan el movimiento del problema presentado, así como sus condiciones de borde. Seguidamente e implementando la formulación desarrollada (modelo continuo), fue abordado el tratamiento de las vibraciones libres. Como caso particular, fue desarrollado un ejemplo numérico determinando las frecuencias naturales del reticulado espacial simplemente apoyado, y se compararon con los resultados

obtenidos de un modelo de elementos finitos. De los resultados hallados en ambas modelaciones, se observó que la máxima diferencia encontrada para las frecuencias evaluadas fue del orden del 3 %, lo cual permitiría indicar un adecuado desempeño de la formulación desarrollada a partir del ejemplo tratado. También se observa que, para el ejemplo analizado, existe una casi total coincidencia en los modos para los tres "largueros". Cabe destacar que en el congreso se presentarán frecuencias naturales del reticulado bajo otras condiciones de vinculación.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por el CeReDeTeC, por el Programa de Becas para Docentes de la UTN - Formación de Posgrado, y por el Departamento de Ingeniería de la UNS, lo cual ha permitido el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

- CSi. *SAP2000 v11 Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc., 2007.
- Elsogoltz L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, 1977.
- Filipich C., Guzmán M., and Rosales M. Planteo discreto-continuo de piezas reticuladas planas y espaciales. *Mecánica Computacional*, XXIX:863–882, 2010.
- Guzmán M., Rosales M., and Filipich C. Planteo y solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la estática de un reticulado espacial. *Sexto Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, 1:187–201, 2011.
- Madagula M., Wahba Y., and Monforton G. Dynamic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 20(12):1097–1101, 1998.
- Wahba Y., Madugula M., and Monforton G. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. *Computers and Structures*, 68:207–212, 1998.

A APÉNDICE

Definiciones de coeficientes:

$$\begin{aligned}
 K_u &= \frac{A_d}{2A_l L_d^2} & K_v &= \frac{A_d e}{J_{ly} \Delta L_d^2} & K_w &= \frac{A_d e}{J_{lz} \Delta L_d^2} \\
 k_u &= \frac{A_d}{A_l} & k_v &= \frac{A_d}{J_{ly}} & k_w &= \frac{A_d}{J_{lz}} \\
 Q_{uj(x,t)} &= \frac{q_{uj(x,t)}}{A_l} & Q_{vj(x,t)} &= \frac{q_{vj(x,t)}}{J_{ly}} & Q_{wj(x,t)} &= \frac{q_{wj(x,t)}}{J_{lz}} \quad j = a, b, c \\
 S_v &= \frac{A_l}{J_{ly}} & S_w &= \frac{A_l}{J_{lz}} \\
 \eta_{1(x,t)} &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_{b(x,t)} + \frac{2e}{L_d} (v_{a(x,t)} - v_{b(x,t)}) \\
 \eta_{2(x,t)} &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_{c(x,t)} - \frac{2e}{L_d} (v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)}) \cos\beta + \frac{2e}{L_d} (w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)}) \sin\beta \\
 \eta_{3(x,t)} &= \frac{\Delta^2}{2L_d} u'_{a(x,t)} - \frac{2e}{L_d} (v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)}) \cos\beta - \frac{2e}{L_d} (w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)}) \sin\beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{1(x,t)} &= \frac{\Delta}{L_d} \left(u_{b(x,t)} - u_{a(x,t)} \right) - \frac{\Delta e}{L_d} v'_{b(x,t)} \\
\delta_{2(x,t)} &= \frac{\Delta}{L_d} \left(u_{c(x,t)} - u_{b(x,t)} \right) + \frac{\Delta e}{L_d} v'_{c(x,t)} \cos \beta - \frac{\Delta e}{L_d} w'_{c(x,t)} \sin \beta \\
\delta_{3(x,t)} &= \frac{\Delta}{L_d} \left(u_{a(x,t)} - u_{c(x,t)} \right) + \frac{\Delta e}{L_d} v'_{a(x,t)} \cos \beta + \frac{\Delta e}{L_d} w'_{a(x,t)} \sin \beta \\
\xi_{1a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{a(x,t)} + u_{b(x,t)} \right) & \xi_{3a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{a(x,t)} + u_{c(x,t)} \right) \\
\xi_{1b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{b(x,t)} + u_{a(x,t)} \right) & \xi_{2b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{b(x,t)} + u_{c(x,t)} \right) \\
\xi_{2c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{c(x,t)} + u_{b(x,t)} \right) & \xi_{3c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2u_{c(x,t)} + u_{a(x,t)} \right) \\
\psi_{1a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{a(x,t)} + v_{b(x,t)} \right) & \psi_{3a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{a(x,t)} + v_{c(x,t)} \right) \\
\psi_{1b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{b(x,t)} + v_{a(x,t)} \right) & \psi_{2b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{b(x,t)} + v_{c(x,t)} \right) \\
\psi_{2c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{c(x,t)} + v_{b(x,t)} \right) & \psi_{3c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2v_{c(x,t)} + v_{a(x,t)} \right) \\
\varphi_{1a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{a(x,t)} + w_{b(x,t)} \right) & \varphi_{3a(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{a(x,t)} + w_{c(x,t)} \right) \\
\varphi_{1b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{b(x,t)} + w_{a(x,t)} \right) & \varphi_{2b(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{b(x,t)} + w_{c(x,t)} \right) \\
\varphi_{2c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{c(x,t)} + w_{b(x,t)} \right) & \varphi_{3c(x,t)} &= \frac{L_d}{\Delta} \left(2w_{c(x,t)} + w_{a(x,t)} \right)
\end{aligned}$$