

VIBRACIONES DE UNA ESTRUCTURA APORTICADA CON UNA RÓTULA INTERMEDIA ELÁSTICAMENTE RESTRINGIDA CONTRA ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

Alejandro R. Ratazzi^a, Ricardo O. Grossi^b y Diana V. Bambill^{a, c}

^a *Instituto de Mecánica Aplicada (IMA) Departamento de Ingeniería Universidad Nacional Del Sur (UNS), Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *INIQUI – CONICET Universidad Nacional de Salta, Argentina, Avda. Bolivia 5150 Salta, Argentina, <http://www.unsa.edu.ar/iniqui>*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>*

alejandro.ratazzi@uns.edu.ar, grossiro@unsa.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar

Keywords: Pórtico, Vibraciones, Vínculos elásticos, Euler-Bernoulli, Separación de variables.

Abstract. El estudio de las propiedades dinámicas de estructuras aporticadas reviste suma importancia en el campo de la ingeniería estructural. En el presente trabajo se determinan las primeras frecuencias naturales de vibración transversal de un pórtico sencillo, consistente en una columna y un dintel vinculados rígidamente. Se considera la presencia de un vínculo interno, que restringe elásticamente los movimientos de traslación y rotación en ese punto del dintel. En el modelado se adoptan resortes de comportamiento elástico-lineal y el movimiento de los elementos componentes del modelo se asume descriptos por la teoría de Euler-Bernoulli para vibraciones axiales y transversales de barras. Las ecuaciones que gobiernan el sistema, las condiciones de borde y de compatibilidad son obtenidas utilizando la técnica del cálculo variacional. La aplicación del método de separación de variables conduce a los valores exactos de las frecuencias naturales. Se presentan resultados de distintos casos, los cuales surgen de combinar diferentes magnitudes en la vinculación elástica interna. Estos resultados son comparados con los obtenidos con el método de elementos finitos y en un caso particular con valores de la bibliografía.

1 INTRODUCCIÓN

El cálculo de variaciones tiene por objetivo principal la determinación de soluciones óptimas y la descripción de sus propiedades. En otras palabras, trata sobre la determinación de máximos, mínimos y otros valores críticos de ciertas clases de funciones.

Por obra de L. Euler, J. Bernoulli y J. Legendre, el cálculo de variaciones se fue transformando en una teoría eficiente con aplicaciones en una inmensa gama de problemas originados en la física y la geometría. En el presente trabajo se utiliza el cálculo de variaciones para estudiar el problema de vibraciones en pórticos.

Desde el punto de vista del diseño estructural las vibraciones en pórticos son de fundamental importancia en varios campos de la ingeniería. Su análisis y adecuado diseño es de interés para resolver múltiples situaciones. Son elementos que se utilizan en muchos tipos de estructuras, como por ejemplo puentes, edificios y en micro pórticos en la rama de la electrónica.

Muchos investigadores han estudiado las vibraciones naturales de vigas y pórticos. Si bien la literatura es muy amplia en estos temas, se citan algunos trabajos vinculados con el tema del presente trabajo.

[Blevins, \(1993\)](#), presenta una interesante compilación de trabajos sobre vibraciones de pórticos. [Filipich et al. \(1987\)](#), analizan los primeros modos de vibración simétricos en un pórtico. Una solución aproximada fue obtenida por medio del método variacional. En el análisis se tienen en cuenta vínculos elásticos y sección variable. [P. Laura et al. \(1987\)](#) presentan la determinación de las frecuencias fundamentales en los casos de modos anti simétricos de pórticos con vinculaciones elásticas y con masas concentradas utilizando la optimización de método de Rayleigh-Ritz para obtener los autovalores y los autovectores. [Oguamanam et al. \(1998\)](#) realiza el análisis de un pórtico abierto compuesto por dos vigas. [J. Wang \(2003\)](#) presenta las vibraciones de una viga con una discontinuidad y condiciones de borde en forma arbitraria. [Y.Y.Lee y C.M. Wang \(2003\)](#) analizaron una viga Timoshenko doblemente empotrada con un vínculo interno. [V Quintana et al. \(2010\)](#) presentan las frecuencias de la vibración transversal de una viga Timoshenko de dos tramos, vinculadas elásticamente y con un vínculo interno. [C. M. Albarracín y R. O. Grossi, \(2005\)](#), muestran un análisis de las frecuencias naturales de un pórtico de dos vigas abiertas, restringido elásticamente a la rotación y traslación, donde las condiciones de borde y los autovalores son hallados por el método del cálculo variacional. [R. O. Grossi y M. V. Quintana, \(2008\)](#) trabajaron en vibraciones transversales libres de una viga de dos tramos, no homogéneos, restringida elásticamente y con un vínculo interno. Información sobre vibraciones de pórticos fueron encontradas en muchos libros.

En esta presentación se analiza el comportamiento dinámico de un pórtico formado por una columna y un dintel vinculados rígidamente. El dintel tiene un vínculo interno elásticamente restringido a traslación y rotación. El movimiento de los elementos del modelo, se asumen descriptos por la teoría de Euler-Bernoulli para vibraciones axiales y transversales de barras. El pórtico está rígidamente empotrado en ambos extremos. Ver [Figura 1](#).

Las condiciones de borde y compatibilidad en las vigas fueron obtenidas mediante la técnica del cálculo de variaciones. El método de separación de variables fue utilizado para hallar las frecuencias y las formas modales. Los resultados numéricos obtenidos son comparados con resultados de la literatura y con resultados calculado con un programa comercial de elementos finitos. Se presentan varios ejemplos numéricos para distintas relaciones de los parámetros del sistema estructural, como distintas relaciones de rigidez y ubicación de la rótula.

2 TRATAMIENTO VARIACIONAL DE LA ESTRUCTURA

El pórtico empotrado de la Figura 1 está formado por una viga vertical (columna) de longitud L_1 y una viga horizontal (dintel) de longitud $(L_2 + L_3)$; en el tramo horizontal a una distancia L_2 de la unión con la columna existe una rótula que vincula ambos tramos del dintel.

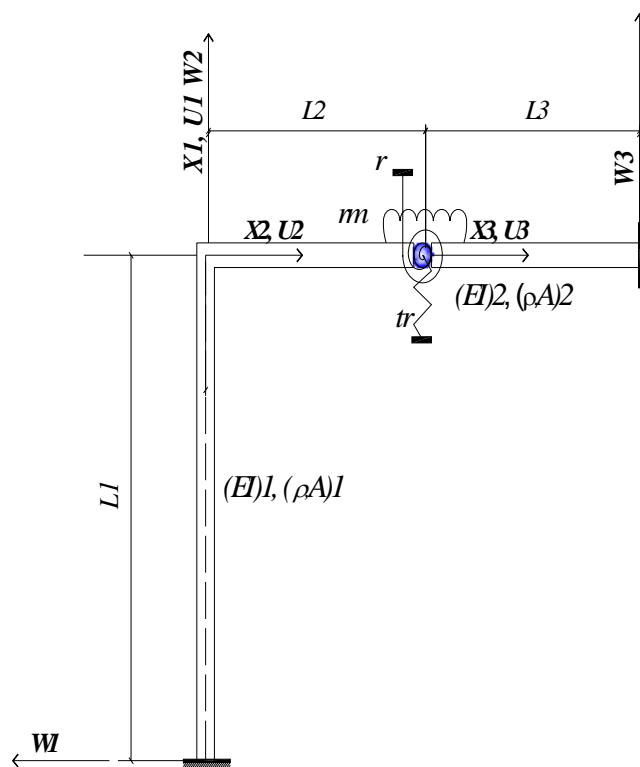


Figura 1. Pórtico Empotrado-Empotrado con una rótula en el centro del dintel

La viga superior queda dividida por la rótula en dos tramos. El primer tramo de la viga de longitud L_2 , está rígidamente vinculado a la columna y en su otro extremo está vinculado por medio de un resorte de constante de rigidez “ r ”, que controla la rotación de esa sección. La rótula se encuentra también vinculada a un resorte traslacional en la dirección del eje x_1 (perpendicular al eje de la viga) de constante de rigidez “ tr ”. El segundo tramo del dintel de longitud L_3 está empotrado en su extremo derecho. Ambos tramos del dintel (L_2 y L_3) están vinculados entre sí con un resorte de constante de rigidez “ rm ”.

Para el análisis se considera la estructura formada por tres tramos, $i=1,2,3$:

Tramo 1: columna

Tramo 2: tramo de la viga del dintel entre la columna y la rótula

Tramo 3: tramo de la viga del dintel entre la rótula el empotramiento

Bajo la hipótesis de que el comportamiento de los miembros del pórtico está regido por la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y teniendo en cuenta las deformaciones axiales, la energía cinética del sistema mecánico se expresa como:

$$\begin{aligned}
Ec = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (\rho A)_1 \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial t}(X_1, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}(X_1, t) \right)^2 \right] dX \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (\rho A)_2 \left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial t}(X_2, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}(X_2, t) \right)^2 \right] dX \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} (\rho A)_3 \left[\left(\frac{\partial W_3}{\partial t}(X_3, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t}(X_3, t) \right)^2 \right] dX
\end{aligned} \tag{1}$$

en la cual ρ es la densidad y A es el área de la sección transversal del tramo de viga considerado; los

$$W_i = W_i(X_i, t); \quad i = 1, 2, 3$$

son los desplazamientos transversales a las vigas y los

$$U_i = U_i(X_i, t), \quad i = 1, 2, 3$$

son los desplazamientos axiales de cada tramo de viga i .

En tanto la expresión de la energía potencial del sistema se expresa como:

$$\begin{aligned}
Ep = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[(EI)_1 \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \right)^2 + (EA)_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right)^2 \right] dX_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[(EI)_2 \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X_2, t) \right)^2 + (EA)_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2}(X_2, t) \right)^2 \right] dX_2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \left[(EI)_3 \left(\frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2}(X_3, t) \right)^2 + (EA)_3 \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_3}(X_3, t) \right)^2 \right] dX_3 \\
& + \frac{r}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(l_2, t) \right)^2 + \frac{tr}{2} (W_2(l_2, t))^2 + rm \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(l_2, t) - \frac{\partial W_3}{\partial X_3}(0, t) \right)^2
\end{aligned}$$

con E e I se indican el módulo de elasticidad del material y el momento de inercia, respectivamente.

Si se adimensionalizan las variables coordenadas de cada tramo i , con respecto a la longitud de cada elemento estructural, se tienen las variables coordenadas adimensionales:

$$x_i = \frac{X_i}{l_i}; \quad i = 1, 2, 3$$

donde

$$x_i \in [0,1] \forall i = 1, 2, 3;$$

la expresión W_i : para las coordenadas adimensionales queda expresada como:

$$w_i = w_i(x, t), i = 1, 2, 3 \quad x \in [0,1].$$

También se definen las relaciones adimensionales

$$v_{li} = \frac{l_i}{l}, \quad v_{Eli} = \frac{(EI)_i}{EI}, \quad v_{\rho Ai} = \frac{(\rho A)_i}{\rho A}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ y}$$

$$l = l_1; E = E_1; \rho = \rho_1; A = A_1; I = I_1$$

referidas a las características del primer tramo $i=1$. Con un criterio similar se adimensionalizan los coeficientes de rigidez de los vínculos elástico-lineales:

$$R = \frac{r \times l}{EI}; Rm = \frac{rm \times l}{EI}; Tr = \frac{tr \times l^3}{EI}$$

2.1 Expresión del funcional

El principio de Hamilton requiere que entre dos instantes para los cuales las posiciones del sistema son conocidas, éste ejecute un movimiento que hace estacionaria al funcional. Esta condición requerida por el principio de Hamilton está dada por:

$$\delta I(w, v) = 0, \forall v \in D_0$$

B en donde D_0 es el espacio admisible de las direcciones para w en el dominio D de la función.

Luego el funcional queda expresada como:

$$\begin{aligned}
I(w) = & \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} A_1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(x_1, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(c, t) \right)^2 \right] dx_2 \right. \\
& + A_2 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial t}(x_2, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}(x_2, t) \right)^2 \right] dx_2 \\
& \left. + A_3 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial t}(x_3, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}(x_3, t) \right)^2 \right] dx_3 \right\} dt - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} B_1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(x_1, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1, t) \right)^2 \right] dx_1 \right. \\
& + B_2 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(x_2, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_2, t) \right)^2 \right] dx_2 \\
& \left. + B_3 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}(x_3, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_3, t) \right)^2 \right] dx_3 \right\} dt - \\
& - \frac{1}{2} \left[B_2 R \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) \right)^2 dt + C_2 Tr \int_{t_0}^{t_1} w_2^2(1, t) dt \right. \\
& \left. + B_2 Rm \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) \right)^2 dt \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

donde los coeficientes:

$$A_i = \rho A l \times v_{\rho Ai} \times v_{li}, \quad B_i = \frac{EI}{l^3} \times \frac{v_{Eli}}{(v_{li})^3}, \quad C_i = \frac{EA}{l} \times \frac{v_{Eai}}{v_{li}}; \quad i = 1, 2, 3$$

Si se tienen en cuenta las condiciones de compatibilidad:

$$w_2(0, t) = u_1(1, t), \quad -u_2(0, t) = w_1(1, t); \quad \frac{\delta w_1(1, t)}{\delta x_1} = \frac{l_1}{l_2} \frac{\delta w_2(0, t)}{\delta x_2};$$

$$u_2(1, t) = u_3(0, t); \quad Rm \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) \right) = B_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(1, t);$$

$$C_3 \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3}(0, t) - C_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(1, t) = Tr w_2(1, t); \quad R \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) = B_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(1, t).$$

y se aplica el procedimiento del cálculo de variación en la ecuación 3, se tendrán las condiciones de borde y el problema de autovalores.

2.2 Condiciones de borde y compatibilidad.

Teniendo en cuenta que los desplazamientos axiales y transversales y las rotaciones en el punto de unión de las vigas, deben coincidir, las funciones w_i y u_i deben satisfacer las condiciones de compatibilidad, y éstas unidas a las condiciones de contornos naturales proporcionan el siguiente problema de contorno que describe el comportamiento del pórtico analizado:

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4}(x_1, t) + k_1^4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2}(x_1, t) = 0, \quad k_1^4 = a^4 \frac{(\rho A)_1}{(\rho A l)} \frac{EI}{(EI)_1} \left(\frac{l_1}{l}\right)^4 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(x_1, t) - p_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}(x_1, t) = 0, \quad p_1^2 = a^4 \frac{(\rho A)_1}{(\rho A l)} \frac{EI}{(EI)_1} \frac{I}{Al^2} \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4}(x_2, t) + k_2^4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2}(x_2, t) = 0, \quad k_2^4 = a^4 \frac{(\rho A)_2}{(\rho A l)} \frac{EI}{(EI)_2} \left(\frac{l_2}{l}\right)^4 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}(x_2, t) - p_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_2^2}(x_2, t) = 0, \quad p_2^2 = a^4 \frac{(\rho A)_2}{(\rho A l)} \frac{EI}{(EI)_2} \frac{I}{Al^2} \left(\frac{l_2}{l}\right)^2 \quad (7)$$

donde $a^4 = (\rho A / EI) l^4$

$$w_1(0, t) = 0 \quad (8)$$

$$u_1(0, t) = u_3(1, t) = 0 \quad (9)$$

$$w_3(1, t) = 0 \quad (10)$$

$$u_2(1, t) = u_3(0, t) \quad (11)$$

$$w_1(1, t) = -u_2(0, t), \quad (12)$$

$$u_1(1, t) = w_2(0, t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(1, t) = \frac{l_1}{l_2} \frac{\partial w_2}{\partial x}(0, t) \quad (16)$$

$$\frac{EI_1}{l_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x} (1, t) = \frac{EI_2}{l_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x} (0, t) \quad (17)$$

$$EI_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x} (1, t) = -EA_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} (0, t) \quad (18)$$

$$EI_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x} (0, t) = EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} (1, t) \quad (19)$$

$$R \frac{\partial w_2}{\partial x_2} (1, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} (1, t) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} (1, t) - \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3} (0, t) = Tr w_2 (1, t) \quad (21)$$

$$Rm \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} (1, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3} (0, t) \right) - R \frac{\partial w_2}{\partial x_2} (1, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} (1, t) \quad (22)$$

$$Rm \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} (1, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3} (0, t) \right) = \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} (0, t) \quad (23)$$

2.3 Determinación de la solución exacta.

Usando el método de separación de variables, la solución de las ecuaciones 4 a 7 quedan expresadas como:

$$w_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(x_1) T(t); \quad (24)$$

$$u_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(x_1) T(t);$$

$$w_2(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n}(x_2) T(t); \quad (25)$$

$$u_2(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x_2) T(t);$$

$$w_3(x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{3n}(x_3) T(t); \quad (26)$$

$$u_3(x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}(x_3) T(t).$$

Las funciones w_1 , w_2 , w_3 , u_1 , u_2 y u_3 representan los modos de las vibraciones transversales

y longitudinales, las expresiones w_{i_n} y u_{i_n} estas están dadas por.

$$w_{1n}(x_1) = c_1 \cosh(\lambda \alpha_1 x_1) + c_2 \sinh(\lambda \alpha_1 x_1) + c_3 \cos(\lambda \alpha_1 x_1) + c_4 \sen(\lambda \alpha_1 x_1) \quad (27)$$

$$u_{1n}(x_1) = c_5 \cos(\lambda^2 \beta_1 x_1) + c_6 \sen(\lambda^2 \beta_1 x_1) \quad (28)$$

$$w_{2n}(x_2) = c_7 \cosh(\lambda \alpha_2 x_2) + c_8 \sinh(\lambda \alpha_2 x_2) + c_9 \cos(\lambda \alpha_2 x_2) + c_{10} \sen(\lambda \alpha_2 x_2) \quad (29)$$

$$u_{2n}(x_2) = c_{11} \cos(\lambda^2 \beta_2 x_2) + c_{12} \sen(\lambda^2 \beta_2 x_2) \quad (30)$$

$$w_{3n}(x_2) = c_{13} \cosh(\lambda \alpha_3 x_2) + c_{14} \sinh(\lambda \alpha_3 x_2) + c_{15} \cos(\lambda \alpha_3 x_2) + c_{16} \sen(\lambda \alpha_3 x_2) \quad (31)$$

$$u_{3n}(x_3) = c_{17} \cos(\lambda^2 \beta_3 x_3) + c_{18} \sen(\lambda^2 \beta_3 x_3) \quad (32)$$

con:

$$\alpha_i = \sqrt[4]{\frac{v_{\rho A i}}{v_{E i}}} v_{li}; \beta_i = \sqrt[4]{\frac{v_{\rho A i}}{v_{E A i}} \frac{I}{A l^2}} v_{li}; \text{ para } i = 1, 2, 3$$

λ es la frecuencia natural, el índice n indica el orden de la frecuencia

$$\lambda = \lambda_n = a^4 \sqrt{\omega_n^2}; a^4 = (\rho A / EI) l^4$$

Si se reemplazan las ecuaciones de las expresiones 27 - 32 en las de las condiciones de borde y de continuidad dadas por las expresiones 8 - 23, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo.

De la condición de no trivialidad del sistema, resulta un determinante-ecuación en los autovalores λ del problema.

2.4 Método de elementos finitos.

Los mismos ejemplos numéricos fueron resueltos por el método de elementos finitos, utilizando el software [ALGOR 23.1, \(2009\)](#).

Se modeló un pórtico compuesto por una columna y un dintel de 40 elementos tipo viga con tres grados de libertad cada uno.

Para considerar la rótula elástica en el dintel, se utilizó un elemento tipo viga muy pequeño, de aproximadamente 300 veces menor que la longitud del tramo. Se fue variando el momento de inercia de la sección. Para que de esta manera se obtuvieran valores de rigidez que resultaran equivalentes a las constantes de rigidez del resorte que conecta ambos tramos del dintel.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el modelo desarrollado es posible resolver varios casos particulares, a continuación se presentan algunos ejemplos numéricos. En todos ellos, se supone que el pórtico completo es de un único material y que tiene igual rigidez, o sea:

$$v_{EI} = \frac{(EI)_i}{EI} = 1, \quad v_{\rho A} = \frac{(\rho A)_i}{\rho A} = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

Las longitudes relativas del dintel, l_2 y l_3 , varían pero se mantiene constante la relación: $l_1 = l_2 + l_3 = l$.

En la [Tabla 1](#) se presentan los primeros tres coeficientes de frecuencia de vibración natural, obtenidos de la literatura ([Albarracín y Grossi, 2005](#)) y los calculados utilizando el método de elementos finitos (MEF). Se trata del caso de un pórtico empotrado-empotrado sin rótula en el dintel. Se considera que tanto el tramo vertical como el horizontal tienen son del mismo material y tienen la misma longitud y rigidez.

	λ_1	λ_2	λ_3
MEF	3.9248	4.7239	7.0574
(Albarracín y Grossi, 2005)	3.9225	4.7142	7.0376

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia: $\lambda_i = a^4 \sqrt{\omega_n^2}$, $a^4 = (\rho A / EI) l^4$, de un pórtico biempotrado sin rótula.

En la [Figura 2](#) se muestran las tres primeras formas modales del caso indicado (MEF) del pórtico biempotrado sin rótula de la [Tabla 1](#).

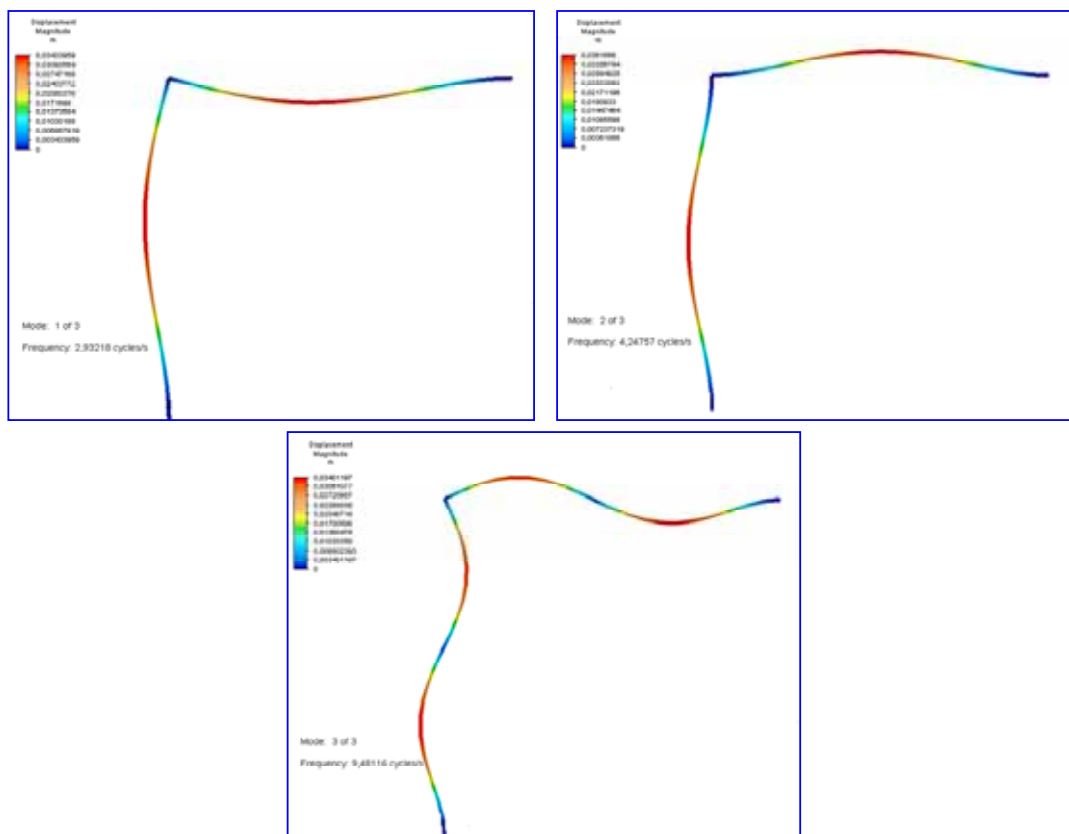


Figura 2. Formas modales del pórtico empotrado-empotrado sin rótula.

A continuación se determinan los coeficientes de frecuencia de pórticos empotrado-empotrado, considerando la presencia de la rótula en el dintel.

En los casos de las dos tablas siguientes, 2 y 3, se supuso la rótula ubicada en el centro de la viga horizontal. Se adoptan distintas relaciones para los vínculos elásticos que conectan los dos tramos del dintel.

En la **Tabla 2** se presenta el caso del pórtico, donde se varía la relación de la rigidez de las vigas del pórtico con respecto a la rigidez del resorte que vincula ambos tramos del dintel: v_{EI} / Rm , los restantes parámetros se mantienen constantes.

$\frac{v_{EIi}}{Rm}$	λ_1		λ_2		λ_3	
	Teórico	MEF	Teórico	MEF	Teórico	MEF
0.5	3.9133	3.9131	4.7502	4.6884	7.2500	7.2501
5	3.7496	3.7455	4.6154	4.6118	7.2482	7.2484
10	3.6697	3.6604	4.6006	4.5949	7.2426	7.2482

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia λ_i de un pórtico biempotrado con una rótula en el centro del dintel, para $l_2 = l_3$, $v_{I1} = v_{I2} = 1/2$, $v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1$, $v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1$ y $R/Tr = 25 \times 10^3$

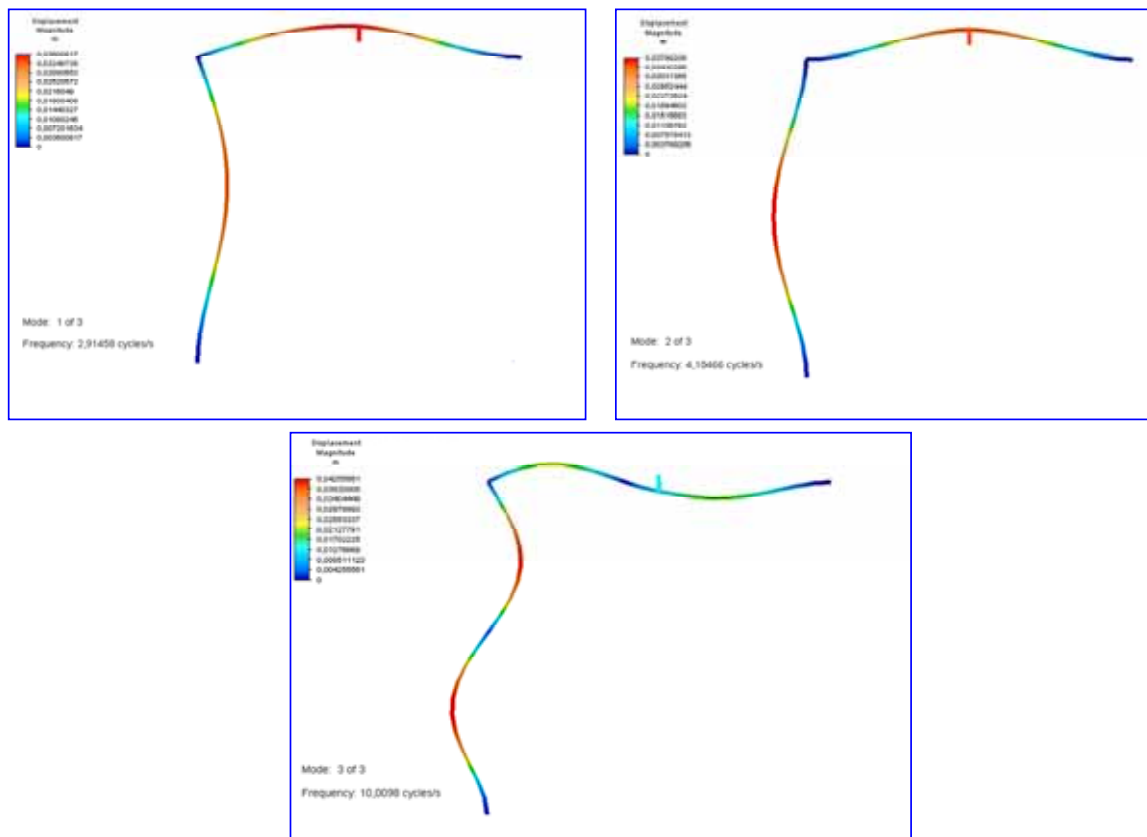


Figura 3: Formas modales del pórtico biempotrado con rótula vinculada elásticamente en el centro del dintel, $l_2 = l_3$, $v_{I1} = v_{I2} = 1/2$, $v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1$, $v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1$, $v_{EI(i)} / Rm = 0.5$ y $R/Tr = 25 \times 10^3$.

La relación de rigideces entre los resortes rotacional y traslacional en la rótula se adoptó para este caso, igual a $R/Tr = 25 \times 10^3$. Los dos primeros coeficientes de frecuencia cambian al variar v_{EI}/Rm , disminuyendo al aumentar la relación de 0.5 a 10. No ocurre lo mismo con la tercera frecuencia que prácticamente no varía. Ello es debido a que la posición de la rótula coincide con la posición de un nodo, tal como se observa en la [Figura 3](#), donde se muestran las correspondientes formas modales para la relación $v_{EI}/Rm = 0.5$ de la [Tabla 2](#).

En la [Tabla 3](#) se muestra otra variante, también con la rótula en el centro del dintel, donde se mantiene constante la relación entre la rigidez del pórtico y la del resorte que vincula los dos tramos del dintel en un valor igual a 0.5, y se varía la relación entre las constantes de los resortes rotacional y traslacional. Los coeficientes de frecuencia en general disminuyen también en este caso con el aumento de la rigidez a rotación.

$\frac{R}{Tr}$	λ_1		λ_2		λ_3	
	Teórico	MEF	Teórico	MEF	Teórico	MEF
0.5	4.3195	4.3282	6.2391	6.4476	7.3590	7.3670
5	4.1492	4.1453	4.9379	4.9384	7.2601	7.2586
10	4.0509	4.0593	4.8159	4.8056	7.2596	7.2551

Tabla 3: Coeficientes λ_i de un pórtico biempotrado con una rótula en el centro del dintel.

$$l_2 = l_3, v_{I1} = v_{I2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, \frac{v_{EI(i)}}{Rm} = 0.5$$

Por último, la [Tabla 4](#) contiene los coeficientes de frecuencia del pórtico empotrado-empotrado, con una rótula ubicada en el dintel muy próxima a la unión dintel-columna. En este caso se observa cómo se mantienen prácticamente constantes los coeficientes de la primera y tercera frecuencias naturales. Los coeficientes de la segunda frecuencia en cambio disminuyen al aumentar la relación $v_{EI(i)}/Rm$.

$\frac{v_{EIi}}{Rm}$	λ_1		λ_2		λ_3	
	Teórico	MEF	Teórico	MEF	Teórico	MEF
0.5	3.9190	3.9134	4.6643	4.6359	7.0397	7.0471
5	3.9134	3.9190	4.3143	4.3239	7.0397	7.0471
10	3.9134	3.9190	4.1473	4.1597	7.0397	7.0469

Tabla 4: Coeficientes λ_i de un pórtico biempotrado con una rótula en próxima a la unión de columna-dintel a la columna: $l_2 = l_3/30, v_{I2} = v_{I3}/30, v_{I3} = 1, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R/Tr = 25 \times 10^3$.

La [Figura 4](#) muestra las formas modales que corresponden al caso $v_{EI(i)}/Rm = 0.5$, de la [Tabla 4](#) precedente.

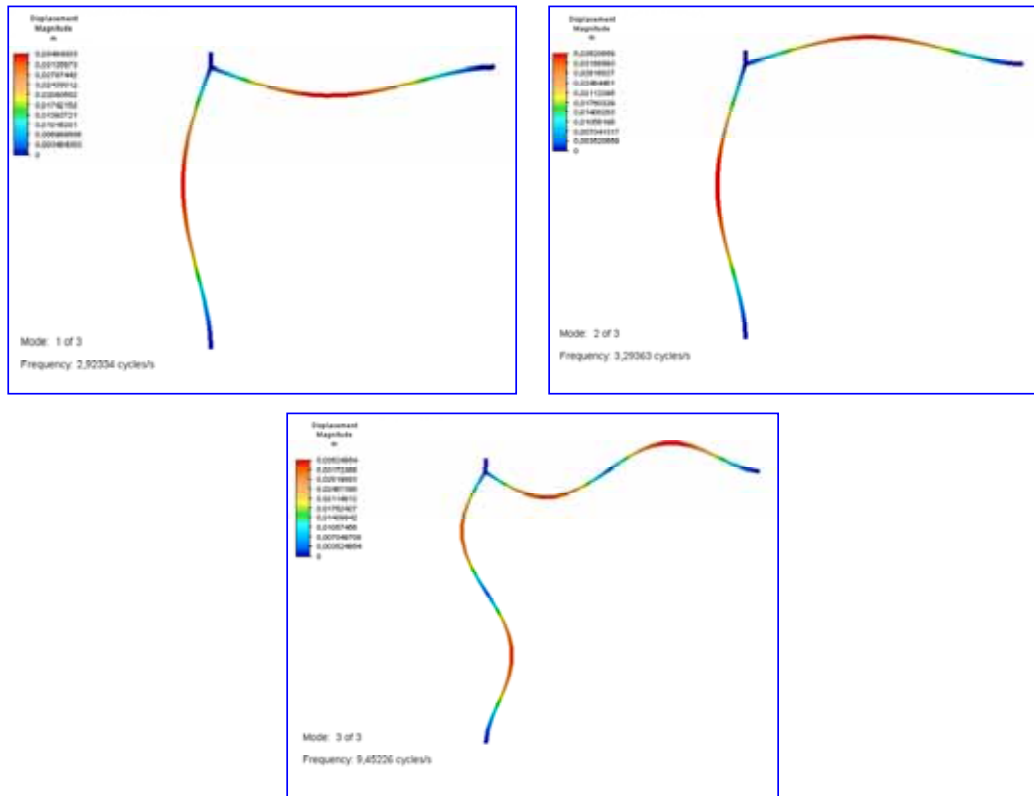


Figura 4: Primeras tres formas modales del pórtico biempotrado con una rótula vinculada elásticamente en el dintel, próxima a la unión dintel-columna:

$$l_2 = l_3/30, v_{l_2} = v_{l_3}/30, v_{l_3} = 1, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R/Tr = 25 \times 10^3, v_{EI(i)}/Rm = 0.5.$$

Los resultados presentados en las Tablas corresponden a valores calculados utilizando el método variacional y se complementan con los obtenidos por el método de elementos finitos (MEF). Tal como puede observarse en todos los casos, el acuerdo entre ambos conjuntos de valores es excelente.

4 CONCLUSIONES

Este trabajo combina el método de separación de variables con la técnica de cálculo variacional para determinar la solución exacta de las frecuencias naturales de un semipórtico biempotrado que tiene una rótula que divide en dos el dintel. La rótula se presenta como una vinculación elástica que conecta los dos tramos de la viga horizontal, y se modela a través de resortes. Se obtienen ejemplos de resultados numéricos de las vibraciones de semipórticos para distintas relaciones de rigidez de los resortes de la vinculación interna, respecto de la rigidez de la viga y de los resortes rotacional, traslacional y de vinculación.

Es cierto que en la mecánica de los sólidos deformables elásticos la distribución de tensiones es mucho más compleja que en un resorte o una barra deformada en dirección paralela a su eje. En el caso más general del estudio de la deformación se requiere describirla mediante un tensor de deformaciones, mientras que los esfuerzos internos en el material se representan por un tensor de tensiones. Si estos dos tensores se relacionan por ecuaciones

lineales conocidas como ecuaciones de Hooke generalizadas o Leyes de Hooke Generalizadas, ellas constituyen las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento de un sólido elástico lineal. Como la gran mayoría de las estructuras de ingeniería se desempeñan, de acuerdo a diseño, en el campo de las deformaciones pequeñas, en ellas se involucra solamente la parte recta del diagrama esfuerzo y deformación, (lineal). En consonancia con ese criterio es de utilidad el modelo presentado en el trabajo.

Si bien el modelo desarrollado permite la resolución de problemas de vibraciones libres, una extensión futura de este trabajo es introducir modificaciones para abordar problemas diferentes, como por ejemplo, el análisis dinámico considerando la presencia de fisuras en un punto intermedio o el estudio de vibraciones forzadas. El análisis dinámico de vigas considerando la presencia de una fisura en un punto intermedio es una aplicación factible. Para modelar la fisura en una primera aproximación, es posible recurrir a la introducción de una rótula en la ubicación de la fisura y de un resorte rotacional que vincule los dos tramos. Y adoptar por ejemplo la rigidez del resorte rotacional de acuerdo con [Chondros, et al. \(1998\)](#).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado para el auspicio de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, (CONICET), en el Departamento de Ingeniería de la mencionada Universidad.

REFERENCIAS

- ALGOR *software*. Versión 23.01. 2009.
- Albarracín C. M., Grossi R. O., Vibrations of elastically restrained frames, *Journal of Sound and Vibration*. 285: 467-476, 2005.
- Blevins, R., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Melbourne, FL, 1993.
- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. y Yao, J., A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 215(1): 17-34, 1998.
- Craig R., *Structural Dynamics. An introduction to Computer Methods*, Wiley, New York, 1981.
- Filipich C.P., Valerga de Grecco B., Laura P. A. A., A Note on the analysis of symmetric mode of vibration of portal frame. *Journal of Sound and Vibration*. 117 (1): 198-201,1987.
- Grossi R. O., Quintana M. V., The transitions in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*. 316: 274-297, 2008.
- Laura P. A. A., Valerga de Grecco Meyer B., Filipich C.P., In-plane vibration of frame carrying concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*. 117 (3): 447-458,1987.
- Lee Y.Y., Wang C.M. and Kitipornchai S., Vibration of Timoshenko beams with internal hinge, *Journal of engineering Mechanics*, ASCE 0733-9399/293-30, 2003.
- Oguamanam D.C. , Hasen J.S. , Heppler G.R. , Vibration of arbitrarily oriented two-member open frame with tip mass, . *Journal of Sound and Vibration*. 209; 651-669,1998.
- Quintana V., Raffo J. L., Grossi R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beam with an internal hinge. *Mecánica Computacional Vol XXIX*:2499-2516, 2010.
- Timoshenko S., Young D.H., *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1956.