

## EFECTOS DE LA MASA DE LOS ACELERÓMETROS SOBRE LA VIBRACIÓN DE PLACAS PLANAS MULTILAMINADAS

**Raúl Zaradnik**

*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, 5500, Argentina,  
rzaradnik@fing.uncu.edu.ar, <http://www.fing.uncu.edu.ar/>*

**Palabras claves:** Masa del acelerómetro, elemento finito, frecuencia natural, forma modal, placa delgada multilaminada.

**Resumen:** En la mayoría de los estudios experimentales no se tiene en cuenta la influencia de la masa de los acelerómetros bajo la hipótesis que la misma es despreciable frente a la masa de la misma estructura bajo ensayo. Pero para las estructuras laminares de baja densidad, pudiera suceder que la influencia de la masa del acelerómetro sea un efecto adicional a tener en cuenta.

El objetivo del presente trabajo es investigar el efecto de la masa concentrada de un acelerómetro en las frecuencias propias de vibración y en las formas modales asociadas para una placa delgada multilaminada.

Se han considerado diversos tipos de sustentación para placas rectangulares y cuadradas, realizando sobre ellas un análisis de simulación por elementos finitos con geometría no lineal. La masa de un acelerómetro típico fue agregada y ubicada en diversos puntos, pero sólo se consideró su inercia traslacional.

El estudio permite determinar de una forma simple la incidencia que una masa concentrada ejerce sobre las frecuencias y formas propias de una placa. Además confirma que la influencia sólo se manifiesta sobre algunos modos, en especial para ciertas ubicaciones del acelerómetro coincidentes con puntos de máximo desplazamiento modal. En oposición, cuando el acelerómetro se ubica sobre puntos coincidentes con líneas nodales, la influencia de su masa es nula respecto a las frecuencias propias respectivas.

Se concluye que el efecto de la masa del acelerómetro depende principalmente de la relación entre la propia masa del acelerómetro y la masa de la placa en estudio, de la localización del acelerómetro durante las mediciones y del modo de la vibración. En cambio, se ha podido comprobar que el ángulo de laminación no tiene influencia en el efecto de masa.

## 1 INTRODUCCIÓN.

Los acelerómetros son instrumentos capaces de determinar la aceleración en un punto de un cuerpo en movimiento. Si bien su masa suele ser muy pequeña, para ciertos elementos estructurales livianos, la simple colocación del acelerómetro introduce la suficiente masa para que algunas frecuencias naturales se vean sensiblemente modificadas.

Desde la década de 1990 se ha estudiado el efecto de la inclusión de acelerómetros en el cambio de las frecuencias naturales e incluso se definió el concepto de desviación de la frecuencia natural debida al efecto de la carga másica (*shifts of natural frequency due to mass loading effects*) entendiéndose como tal la diferencia entre la frecuencia natural obtenida con la ayuda del acelerómetro y la verdadera frecuencia natural [Hatini *et al.*, 2009].

La influencia de una masa concentrada adosada rígidamente a placas isótropas o anisótropas ha sido estudiada considerando sólo su inercia traslacional [Felix *et al.*, 2002; Ciancio *et al.*, 2005] y más recientemente empleando un modelo de vinculación flexible que contempla inercias rotacionales [Febbo *et al.*, 2009].

En las determinaciones de laboratorio es una práctica habitual la colocación de un acelerómetro en el punto de máxima amplitud de la forma modal asociada a la frecuencia buscada, para que sea preponderante en el espectro respuesta. Sin embargo, tal medición está afectada del máximo error introducido por la presencia misma del acelerómetro. La ubicación del acelerómetro en un punto diferente permite decidir sobre el valor más probable de la frecuencia y tomar decisiones de corrección<sup>1</sup>.

En este trabajo se postula una expresión simple y general que refleja el efecto de masas concentradas que aportan inercia traslacional y permite tomar decisiones sobre el tipo y ubicación de los acelerómetros a emplear en las mediciones de laboratorio.

## 2 DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LA DESVIACIÓN RELATIVA DE FRECUENCIAS NATURALES.

### 2.1. Características de los acelerómetros comunes

Sólo para tener una idea, en la [Tabla 1](#) se reproducen algunas dimensiones de acelerómetros reales:

Nº	Modelo de acelerómetros reales	Dimensiones		
		Alto (mm)	Ancho (mm)	Masa (g)
1	PCB 3701D1FA20G	11	16	18
2	PCB 353B17	12	7	1.7
3	PCB 393A03	56	25	210

Tabla 1: Dimensiones de acelerómetros reales

<sup>1</sup>Las normas de metrología amparadas bajo la Ley Nacional 19511 (entre ellas la internacional *ISO 10012:2003. Sistemas de Gestión de las Mediciones. Requisitos para Procesos de Medición y Equipos de Medición*) limitan el error máximo de una medición según la Clase del equipo, llegando al uno por ciento (1%) para los de Clase 2 que son equipos de operación en campo.

## 2.2. Frecuencias naturales de placas laminadas.

Con bases en el estudio de Halpin [Halpin, 1992; Zaradnik *et al.*, 2008a], el análisis de las placas laminadas se puede realizar empleando la ecuación 1.

En la ecuación 1, las constantes A, B, C y D resultan de la matriz de rigidez propia del laminado que constituye la placa [Agarwall *et al.*, 1990], y los operadores diferenciales  $L(\bullet)$  deben seguir la ecuación 2 y se aplican a la función de desplazamientos estáticos  $w(x, y)$  y a la función auxiliar de Airy  $\Phi(x, y)$  relacionada con los esfuerzos internos. Finalmente,  $\rho$  representan la densidad de la lámina y  $q(x, y)$  la carga externa que actúa sobre la misma placa y que provoca los desplazamientos estáticos  $w(x, y)$ .

$$\left\{ \begin{array}{cc} C_{12}^* & A_{22}^* \\ 2C_{62}^* - C_{16}^* & -2A_{26}^* \\ C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{66}^* & 2A_{12}^* + A_{66}^* \\ 2C_{61}^* - C_{26}^* & -2A_{16}^* \\ C_{21}^* & A_{11}^* \end{array} \right\}^T L(\Phi) - \quad (1)$$

$$- \left\{ \begin{array}{cc} D_{11}^* & B_{21}^* \\ 4D_{16}^* & 2B_{26}^* - B_{61}^* \\ 2D_{12}^* + 4D_{66}^* & B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^* \\ 4D_{26}^* & 2B_{16}^* - B_{62}^* \\ D_{22}^* & B_{12}^* \end{array} \right\}^T L(w) = \left\{ \begin{array}{c} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, y) \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$L(\bullet) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial X^4} \\ \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial X^3 \partial Y} \\ \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial X^2 \partial Y^2} \\ \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial X \partial Y^3} \\ \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial Y^4} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Las hipótesis para resolver analíticamente el problema son:

- La función de Airy  $\Phi(x, y)$  asociada a los esfuerzos internos, es homotética respecto a la función de los desplazamientos estáticos  $w(x, y)$ .
- Existe una función  $\Psi(x, n, y, m)$  que es ortogonal a la función de desplazamientos estáticos en el ámbito de integración.
- La carga distribuida se aproxima con una función especial apropiada al tipo de sustentación de la placa en análisis, aunque para los análisis de frecuencias naturales y formas modales se considere que no existen cargas externas, es decir  $q(x, y) = 0$ .

El método de solución parte de imponer una deformación, obtenida como una serie infinita de formas de deformación de viga en direcciones normales [Nallim *et al.*, 2003 y Nallim *et al.*, 2005] y empleando funciones ortogonales determinar los coeficientes de peso de cada sumando de la serie. Como primera medida, se definen las siguientes funciones auxiliares para representar tanto la función de desplazamientos estáticos como la función de Airy:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \quad (3)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \quad (4)$$

Las funciones  $\varphi_X(x, n)$  y  $\varphi_Y(y, m)$  pueden ser funciones trigonométricas o polinómicas y, como las ecuaciones 3 y 4 constituyen series infinitas, permiten acercarse tanto como se quiera al valor verdadero.

En base a estas expresiones, es posible realizar el cálculo de las frecuencias naturales por medio de la ecuación 5:

$$\lambda_{nm}^2 = \frac{\beta_D(n, m, \Omega) - \beta_C(n, m, \Omega) \frac{\beta_B(n, m, \Omega)}{\beta_A(n, m, \Omega)}}{\iint_{\Omega} (\rho h + \rho_a) \varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \Psi(x, y, n, m) d\Omega} = \frac{K_{nm}^*}{M_{nm}^* + M_a^*} \quad (5)$$

La ecuación 5 simplemente es el cociente entre la rigidez generalizada ( $K_{nm}^*$ ) y la masa generalizada ( $M_{nm}^* + M_a^*$ ). Las funciones  $\beta_A; \beta_B; \beta_C$  y  $\beta_D$  se determinan a partir de una integración, en el ámbito de la misma placa laminada en estudio, que incluye productos de las funciones de forma  $\varphi_X(x, n)$  y  $\varphi_Y(y, m)$  y de la función ortogonal  $\Psi(x, n, y, m)$ , sin embargo su detalle excede los objetivos del presente trabajo [Zaradnik *et al.*, 2008a].

Es importante notar que en el denominador, la masa generalizada se compone de la masa propia de la placa laminada (asociada al término  $\rho h$ ) y de la masa adicionada por el acelerómetro (asociada al término  $\rho_a$ ) que se considera concentrada en un punto de la placa y de coordenadas conocidas, aportando sólo inercia traslacional.

Como el acelerómetro se ubica en una posición definida de la placa y abarca un área finita, es posible calcular la influencia de la masa empleando la ecuación 6:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \rho_a \varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \Psi(x, y, n, m) d\Omega = \\ & = \rho_a \int_{y_0 - \frac{d}{2}}^{y_0 + \frac{d}{2}} \left[ \int_{x_0 - \frac{d}{2}}^{x_0 + \frac{d}{2}} (\varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \Psi(x, y, n, m)) dx \right] dy \quad (6) \end{aligned}$$

$$\rho_a = \frac{m}{d^2}$$

Donde el acelerómetro posee una masa “m”, abarca un área cuadrada de lado “d” y su punto de ubicación está identificado por sus coordenadas ( $x_0, y_0$ ).

### 2.3. Desviación entre frecuencias naturales coordinadas.

En un trabajo anterior se ha demostrado que el estudio de evolución de las frecuencias

naturales debe realizarse considerando la similitud de las formas modales [Zaradnik *et al.*, 2008b]. Así es posible analizar cualquier cambio que se refleje en la frecuencia natural para una misma forma modal bajo análisis.

Si se considera que la frecuencia natural de una placa laminada se determina como la raíz cuadrada de  $\lambda_{nm}^2$ , mientras que la frecuencia natural medida empleando un acelerómetro conocido se determina a partir de la raíz cuadrada de  $\overline{\lambda_{nm}^2}$ , se podría calcular la diferencia relativa entre ambas por medio de la ecuación 7:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\sqrt{\overline{\lambda_{nm}^2}} - \sqrt{\lambda_{nm}^2}}{\sqrt{\overline{\lambda_{nm}^2}}} = 1 - \frac{\sqrt{\lambda_{nm}^2}}{\sqrt{\overline{\lambda_{nm}^2}}} = 1 - \sqrt{\frac{\lambda_{nm}^2}{\overline{\lambda_{nm}^2}}} = 1 - \sqrt{\frac{M_{nm}^* + M_a^*}{M_{nm}^*}} = 1 - \sqrt{1 + \frac{M_a^*}{M_{nm}^*}} \quad (7)$$

La ecuación 7 refleja el concepto de desviación de la frecuencia natural debida al efecto de la carga másica pero expresado en forma adimensional. Introduciendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 7 se obtiene:

$$\varepsilon(\lambda) = 1 - \sqrt{1 + \frac{m}{\rho h d^2} \frac{\int_{y_0 - \frac{d}{2}}^{y_0 + \frac{d}{2}} \left[ \int_{x_0 - \frac{d}{2}}^{x_0 + \frac{d}{2}} (\varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \Psi(x, y, n, m)) dx \right] dy}{\iint_{\Omega} \varphi_X(x, n) \varphi_Y(y, m) \Psi(x, y, n, m) d\Omega}} \quad (8)$$

La expresión conseguida es genérica para placas y las funciones de forma incorporan la información de la sustentación adoptada<sup>2</sup>.

Sin embargo, lo más importante es notar que la diferencia entre las frecuencias reales y las determinadas empleando un acelerómetro tienen una ley de variación coincidente con la forma modal. Esto quiere decir que, para una frecuencia dada, cuando el acelerómetro es colocado en un punto de máximo desplazamiento modal (punto anti-nodal), la diferencia será máxima y cuando se coloque en un punto sobre cualquier línea nodal de la forma modal asociada a la frecuencia en estudio, la diferencia será nula debido a que la doble integral del numerador bajo la raíz de la ecuación 8 será cero.

Sin embargo a no confundirse, al colocar un acelerómetro en un punto de una línea nodal, la frecuencia de la misma forma modal no puede ser captada. Luego, la idea es colocar el acelerómetro en un punto y definir la máxima diferencia con respecto a las frecuencias que sí puede captar, de forma que pueda decidirse si tal medición es aceptable dentro de los límites normativos.

### 3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

A continuación se aplica la ecuación 8 sobre algunos ejemplos teóricos y se confirman los resultados empleando el método de los elementos finitos.

<sup>2</sup> Fácilmente la ecuación 8 puede ser expresada para representar el mismo fenómeno en cualquier elemento estructural, con la única precaución de corregir el ámbito de integración y considerar apropiadamente las funciones del integrando.

### 3.1. Ejemplos analíticos

A continuación se consideran dos placas homogéneas, una cuadrada y otra rectangular, con dos posibles formas de sustentación cada una, perfectamente empotrada en todos sus bordes (EEEE) y simplemente apoyada en todos sus bordes (AAAA). Tanto sus dimensiones como demás parámetros de análisis se resumen en la [Tabla 2](#).

Luego, cada una de las variantes de placa es ensayada numéricamente empleando cada uno de los acelerómetros de la [Tabla 1](#), obteniéndose como máximas desviaciones relativas de la frecuencia natural debida al efecto de la carga másica a las mostradas en las tablas [3](#) y [4](#). Para obtener las máximas desviaciones en frecuencias naturales, la ubicación del acelerómetro se cambia y en cada caso es colocado en el punto de máximo desplazamiento modal, según se muestra en la [Tabla 5](#) para el análisis de la placa cuadrada y en la [Tabla 6](#) para la placa rectangular. Debe observarse que en todos los casos, la relación de masas es inferior al 10% recomendado en la bibliografía [[Hatini et al., 2009](#)].

Placa	L	H	h	$\rho$
	(m)	(m)	(m)	(kg/m <sup>3</sup> )
1	1	1	0.02	1551
2	3	1.5	0.05	1600

Tabla 2: Dimensiones de las placas bajo análisis

Acel.	Placa	Relación de masas	Primera forma modal		Segunda forma modal	
			AAAA	EEEE	AAAA	EEEE
1	1	0.05803%	0.116%	0.206%	0.116%	0.206%
1	2	0.00500%	0.010%	0.018%	0.010%	0.018%
2	1	0.00548%	0.011%	0.019%	0.011%	0.019%
2	2	0.00047%	0.001%	0.002%	0.001%	0.002%
3	1	0.67698%	1.344%	2.374%	1.344%	2.374%
3	2	0.05833%	0.117%	0.207%	0.117%	0.207%

Tabla 3: Desviaciones entre cada frecuencia medida y la verdadera frecuencia natural no amortiguada para la primera y segunda forma modal

Acel.	Placa	Relación de masas	Cuarta forma modal		Séptima forma modal	
			AAAA	EEEE	AAAA	EEEE
1	1	0.058%	0.116%	0.206%	0.116%	0.206%
1	2	0.005%	0.010%	0.018%	0.010%	0.018%
2	1	0.005%	0.011%	0.019%	0.011%	0.019%
2	2	0.000%	0.001%	0.002%	0.001%	0.002%
3	1	0.677%	1.344%	2.374%	1.344%	2.374%
3	2	0.058%	0.117%	0.207%	0.117%	0.207%

Tabla 4: Desviaciones entre cada frecuencia medida y la verdadera frecuencia natural no amortiguada para la cuarta y séptima forma modal

Analizando detenidamente las tablas [3](#) y [4](#), es posible construir una gráfica que vincule la relación de masas, definida como el cociente de la masa del acelerómetro y de la placa, versus la máxima desviación, obteniéndose una relación cuadrática tal como la mostrada en la [Figura 1](#):

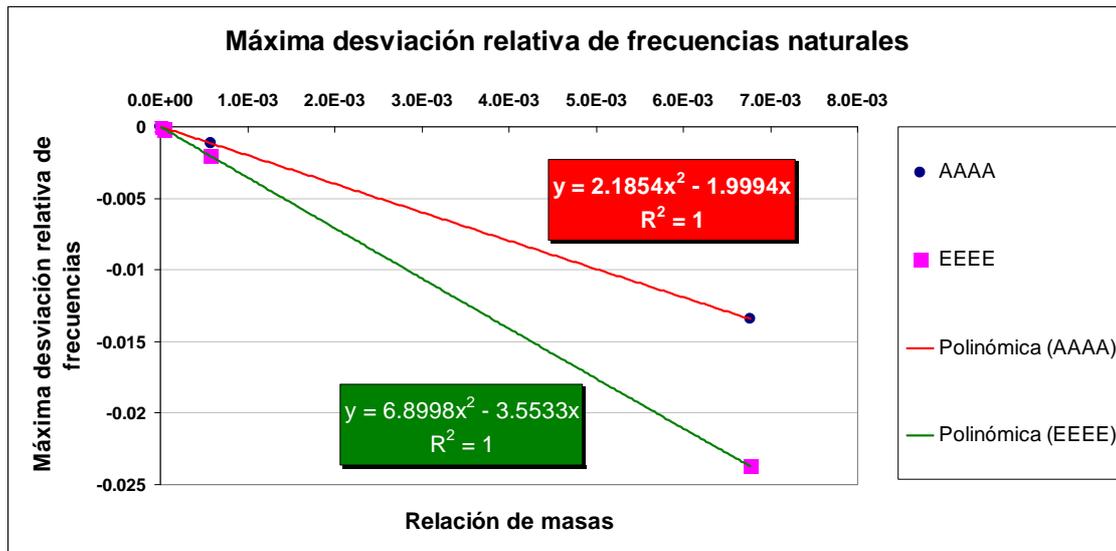


Figura 1: Máxima desviación relativa de frecuencias naturales versus relación de masas

Como se aprecia en la [Figura 1](#) la máxima desviación relativa de frecuencias naturales, depende de la relación de masas y del tipo de sustentación de la placa.

### 3.2. Comprobación empleando el método de elementos finitos

Empleando el método de los elementos finitos es posible analizar la incidencia de la masa del acelerómetro ubicado en cualquier punto de la placa. Como ejemplo, se analiza el caso de determinar las frecuencias naturales de la placa rectangular de la [Tabla 2](#) (placa número 2) empotrada en todos sus bordes, empleando para ello un acelerómetro de 5.0 kg de masa. Dado que la relación de masas es 1.389%, la máxima desviación esperable según la [Figura 1](#) resulta del -4.802%. En la [Tabla 7](#) se resume el análisis de las desviaciones calculadas empleando el método de los elementos finitos para los seis (6) primeros modos teniendo presente que el acelerómetro se ubica en el centro de la placa empotrada en todos sus bordes.

Nº	Frecuencia referencia (Hz)	Frecuencia modificada coordinada (Hz)	Desviación relativa
1	55.147	53.518	-2.95%
2	69.438	69.438	0.00%
3	88.416	85.253	-3.58%
4	100.960	100.960	0.00%
5	109.370	109.370	0.00%
6	109.480	109.480	0.00%

Tabla 5: Máxima desviación obtenida por el MEF para la placa rectangular con empotramiento en todos sus bordes

Las diferencias en las máximas desviaciones esperadas de frecuencias naturales entre los resultados analíticos empleando la ecuación [8](#) y los hallados por el método de los elementos finitos se atribuyen principalmente a que las expresiones de las deformadas utilizadas en las ecuaciones [3](#) y [4](#) no incluyen los efectos de las deformaciones de corte.

Placa1: Cuadrada

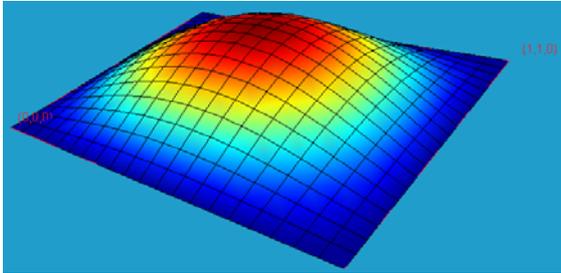
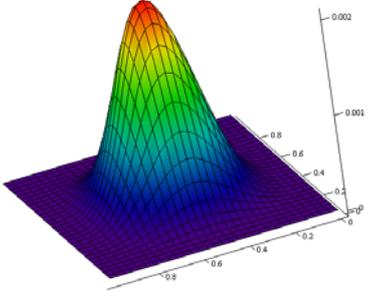
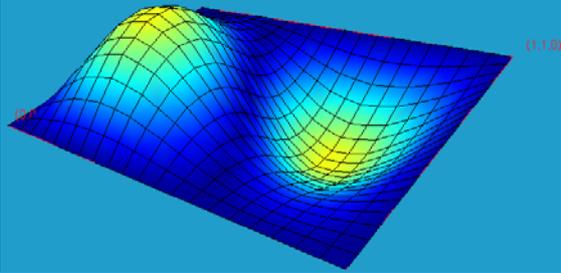
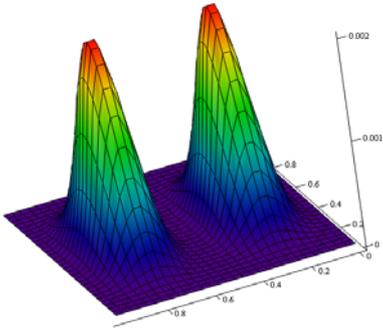
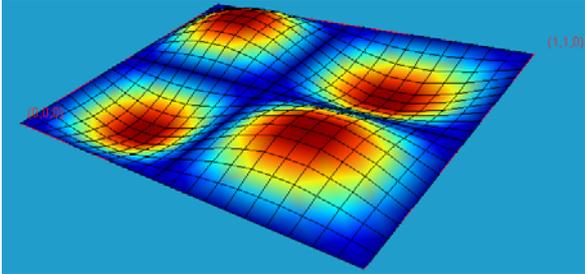
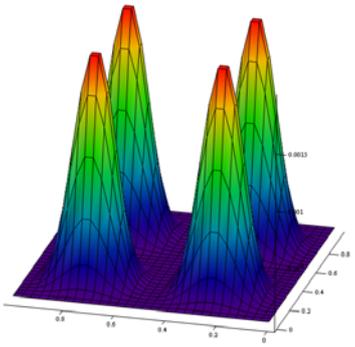
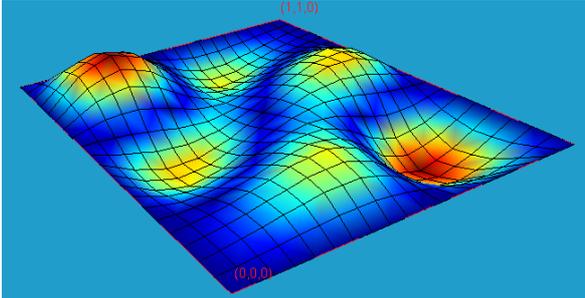
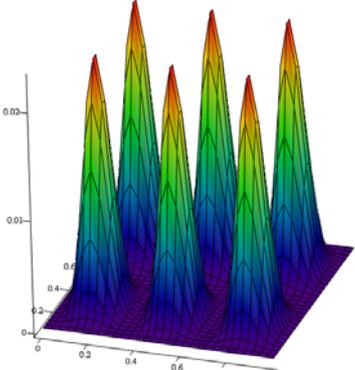
	Forma modal	x0	y0	Gráfica de desviación <sup>3</sup>
Fundamental		0.5	0.5	
Segunda		0.5	0.25	
Cuarta		0.25	0.25	
Séptima		0.5	0.25	

Tabla 6: Puntos de máxima desviación (caso de placa cuadrada con empotramiento en todos sus bordes)

<sup>3</sup> Las diferencias se han graficado positivas por claridad, pero numéricamente resultan negativas.

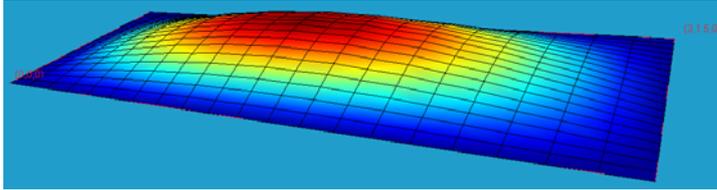
Placa2: Rectangular

Forma modal

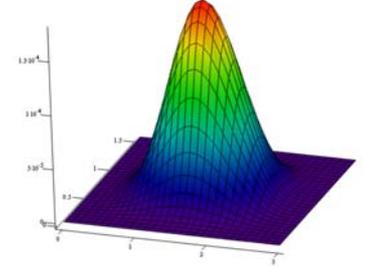
x0 y0

Gráfica de desviación

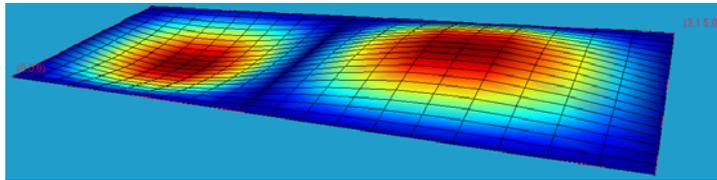
Fundamental



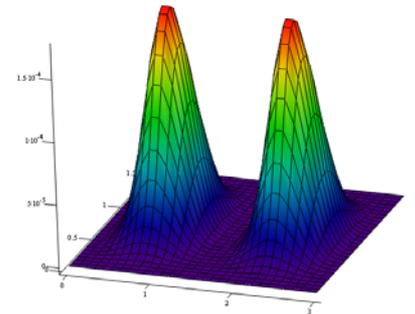
1.5 0.75



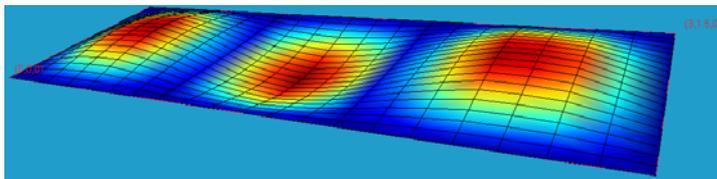
Segunda



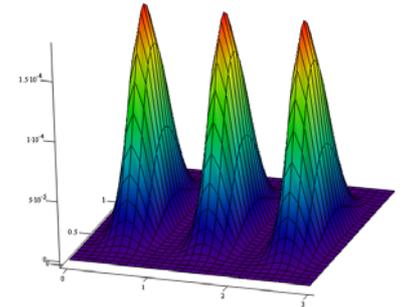
0.75 0.75



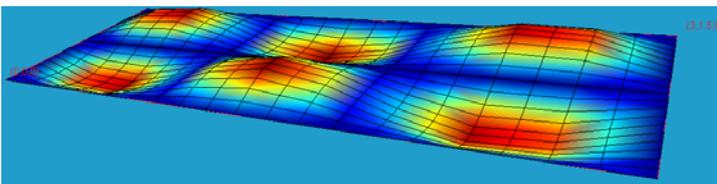
Tercera



0.5 0.75



Séptima



1.5 0.375

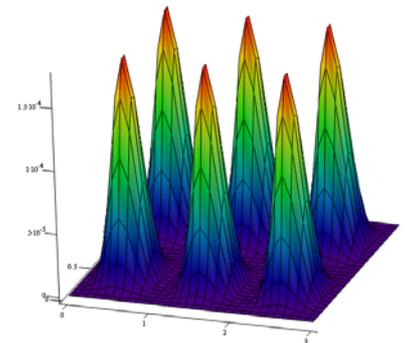


Tabla 7: Puntos de máxima desviación (caso de placa rectangular con empotramiento en todos sus bordes)

En la [Figura 2](#) se aprecian las formas modales 1 y 3, que resultan ser las más afectadas por la posición del acelerómetro:

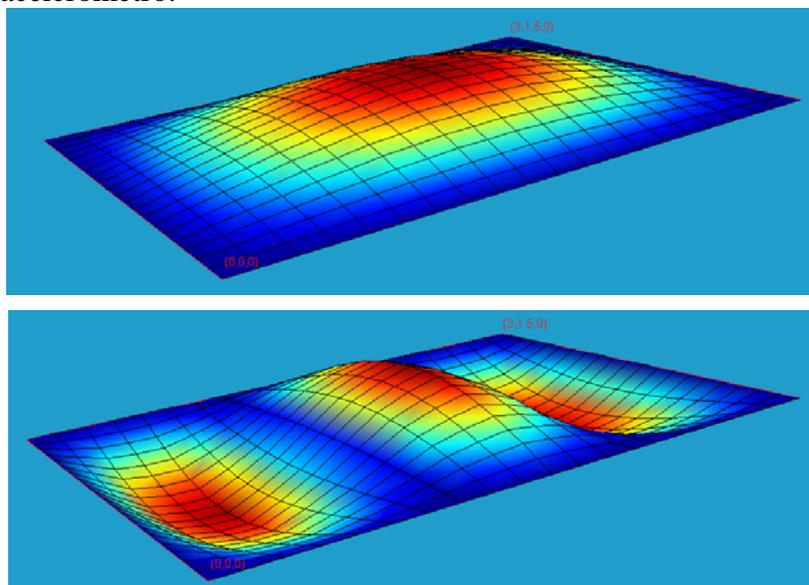


Figura 2: Formas modales más afectadas por el acelerómetro en el centro de la placa<sup>4</sup>

#### 4 APLICACIONES EN PLACAS MULTILAMINADAS

A continuación se estudia la influencia que un acelerómetro de 5.0 kg de masa induce en los valores de las frecuencias naturales de placas multilaminadas de material compuesto. Tal como predice la ecuación 8, la orientación en las fibras de refuerzo no representa una variable que influya sobre las desviaciones entre las frecuencias teóricas y las experimentales, ya que la orientación de las fibras de refuerzo en los materiales multilaminados condiciona la rigidez de la placa y no su masa total.

Para demostrarlo numéricamente, se propone analizar una placa rectangular ([Figura 3](#)) de 3m x 1.5m x 0.05m, empotrada en todos sus bordes y compuesta de diez (10) láminas con las propiedades detalladas en la [Tabla 8](#). La relación de masas resulta 1.389%.

Parámetro	Valor	Unidad
Espesor de la lámina	5	mm
Módulo de elasticidad longitudinal en la dirección del refuerzo ( $E_{11}$ )	54	GPa
Módulo de elasticidad longitudinal en la dirección normal al refuerzo ( $E_{22}$ )	5.4	GPa
Módulo de elasticidad transversal ( $G_{12}$ )	2.6	GPa
Coefficiente de Poisson	0.25	Adim.
Densidad ( $\rho$ )	1 600	Kg/m <sup>3</sup>

Tabla 8: Propiedades básicas de cada lámina

<sup>4</sup> Las graficas han sido obtenidas empleando GMSH® [[Geuzaine et al., 2005](#)]

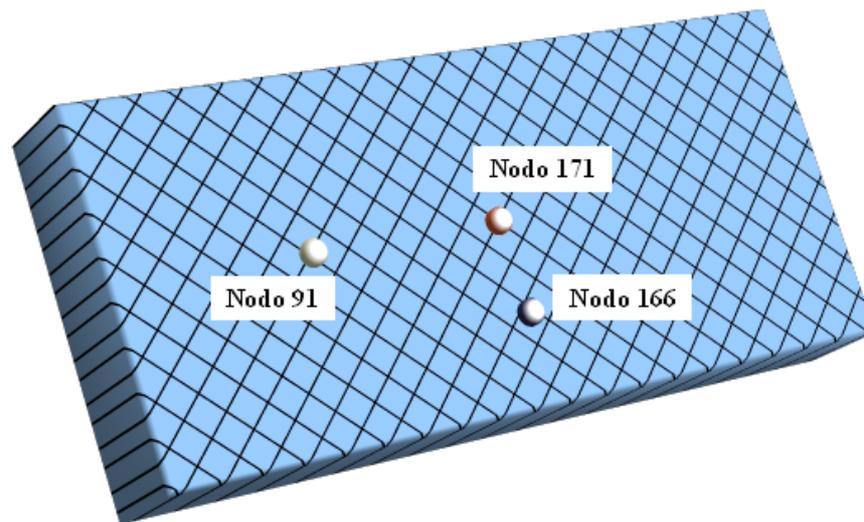


Figura 3: Esquema de placa analizada y ubicaciones de los acelerómetros

Se analizan dos esquemas de laminados compensados<sup>5</sup>, uno con ángulo de 45° (Tabla 9) y otro con ángulo de 60° (Tabla 10) y además, se analiza una placa laminada con laminados no compensados bajo un ángulo de 45° para todas las láminas (Tabla 11).

Las tablas 9 a 11 presentan los valores de las frecuencias naturales de referencia que se obtienen sin considerar adosado un acelerómetro y las modificadas que corresponden a las determinadas considerando al acelerómetro adosado a la placa y aportando sólo inercia traslacional, en los nodos de coordenadas especificadas.

Nodo de ubicación del acelerómetro		171		91		166	
Coordenadas		1.50 ; 0.75		0.75 ; 0.75		1.50 ; 0.375	
Nº	Frecuencia referencia (Hz)	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa
1	59.14	57.37	-3.1%	58.49	-1.1%	58.49	-1.1%
2	74.59	74.59	0.0%	73.07	-2.1%	74.59	0.0%
3	95.11	91.81	-3.6%	94.12	-1.0%	93.71	-1.5%
4	108.44	108.44	0.0%	108.44	0.0%	105.71	-2.6%
5	118.02	118.02	0.0%	118.02	0.0%	118.02	0.0%
6	118.52	118.51	0.0%	118.52	0.0%	118.51	0.0%
7	132.86	132.86	0.0%	132.86	0.0%	128.76	-3.2%
8	141.83			139.58	-1.6%	140.26	-1.1%
9	149.87	149.86	0.0%	149.87	0.0%	149.87	0.0%
10	160.20						
11	165.62	165.62	0.0%			165.63	0.0%
12	166.60	166.60	0.0%			166.60	0.0%
13	168.50	168.50	0.0%	168.49	0.0%		
14	176.56			175.27	-0.7%	174.80	-1.0%
15	187.82	187.83	0.0%	187.83	0.0%	187.83	0.0%

Tabla 9: Desviaciones en las frecuencias naturales para laminado compensado a 45°

<sup>5</sup> El laminado compensado presenta alternativamente láminas con refuerzo a un ángulo  $\theta$  y  $-\theta$ , con simetría respecto al plano medio del mismo laminado.

Nodo de ubicación del acelerómetro		171		91		166	
Coordenadas		1.50 ; 0.75		0.75 ; 0.75		1.50 ; 0.375	
Nº	Frecuencia referencia (Hz)	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa
1	59.27	57.47	-3.1%	58.63	-1.1%	58.60	-1.1%
2	73.66	73.66	0.0%	72.16	-2.1%	73.66	0.0%
3	93.40	90.26	-3.5%	92.41	-1.1%	92.11	-1.4%
4	109.64	109.64	0.0%	109.64	0.0%	106.74	-2.7%
5	115.93	115.93	0.0%	115.93	0.0%	115.93	0.0%
6	118.99	118.99	0.0%	118.99	0.0%	118.99	0.0%
7	132.67	132.67	0.0%	132.67	0.0%	128.53	-3.2%
8	139.66			137.63	-1.5%	138.33	-1.0%
9	149.19	149.19	0.0%	149.19	0.0%	149.19	0.0%
10	161.25						
11	163.54	163.54	0.0%			163.54	0.0%
12	167.40	167.40	0.0%				
13	167.52	167.52	0.0%				
14	177.06			175.68	-0.8%		
15	186.58						

Tabla 10: Desviaciones en las frecuencias naturales para laminado compensado a 60°

Nodo de ubicación del acelerómetro		171		91		166	
Coordenadas		1.50 ; 0.75		0.75 ; 0.75		1.50 ; 0.375	
Nº	Frecuencia referencia (Hz)	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa	Frecuencia modificada (Hz)	Desviación relativa
1	57.12	55.37	-3.2%	56.50	-1.1%	56.49	-1.1%
2	71.83	71.83	0.0%	70.36	-2.1%	71.82	0.0%
3	92.00	88.96	-3.4%	91.00	-1.1%	90.75	-1.4%
4	105.93	105.93	0.0%	105.93	0.0%	103.28	-2.6%
5	114.92	114.92	0.0%	114.92	0.0%	114.81	-0.1%
6	116.00	115.94	-0.1%	115.99	0.0%	115.96	0.0%
7	130.37	130.37	0.0%	130.36	0.0%	126.55	-3.0%
8	138.86			136.84	-1.5%	137.44	-1.0%
9	147.50			147.47	0.0%	147.35	-0.1%
10	157.77						
11	162.75	162.75	0.0%				
12	164.26	164.26	0.0%				
13	166.53	166.53	0.0%	166.25	-0.2%		
14	174.45			173.16	-0.7%	172.68	-1.0%
15	185.08						

Tabla 11: Desviaciones en las frecuencias naturales para laminado no compensado

En todos los casos presentados en las tablas 9 a 11 sólo aparecen las frecuencias coordinadas, correspondientes a iguales formas modales<sup>6</sup>, así como la máxima desviación relativa entre la frecuencia de referencia y la obtenida con el acelerómetro. En las figuras 4 a 6 se resumen los valores de las máximas desviaciones para diferentes ubicaciones del acelerómetro y para los primeros siete (7) modos naturales, que resultan coordinados en todos los casos<sup>7</sup>.

Como se aprecia en las figuras 4 a 6, las desviaciones máximas dependen del modo en análisis y de la ubicación del acelerómetro, pero no depende de la orientación de los refuerzos laminares (dentro de la precisión empleada en la modelación).

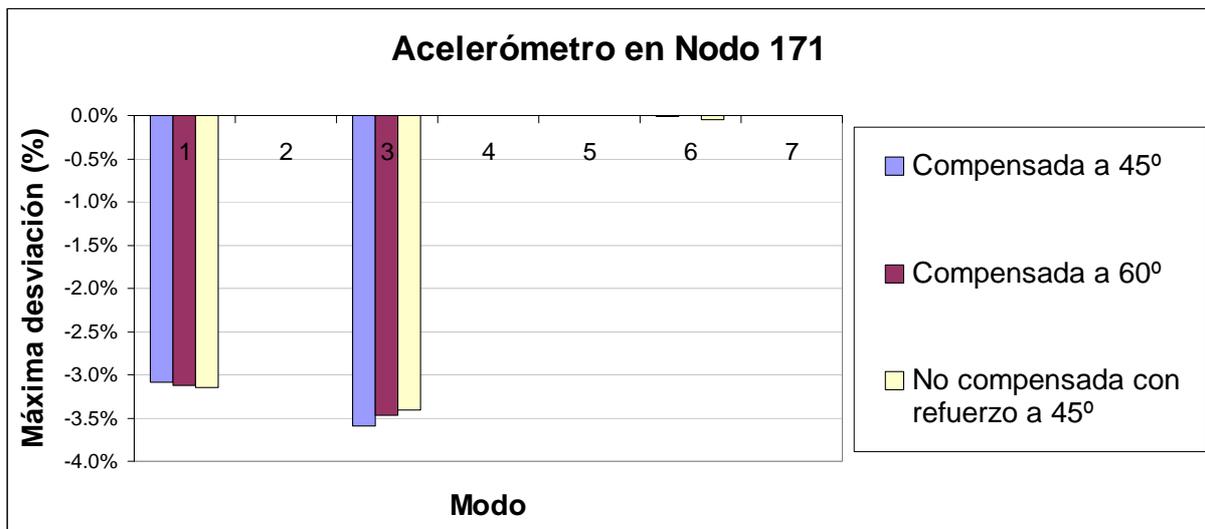


Figura 4: Máximas desviaciones para el acelerómetro ubicado en el centro de la placa (Nodo 171- Figura 3)

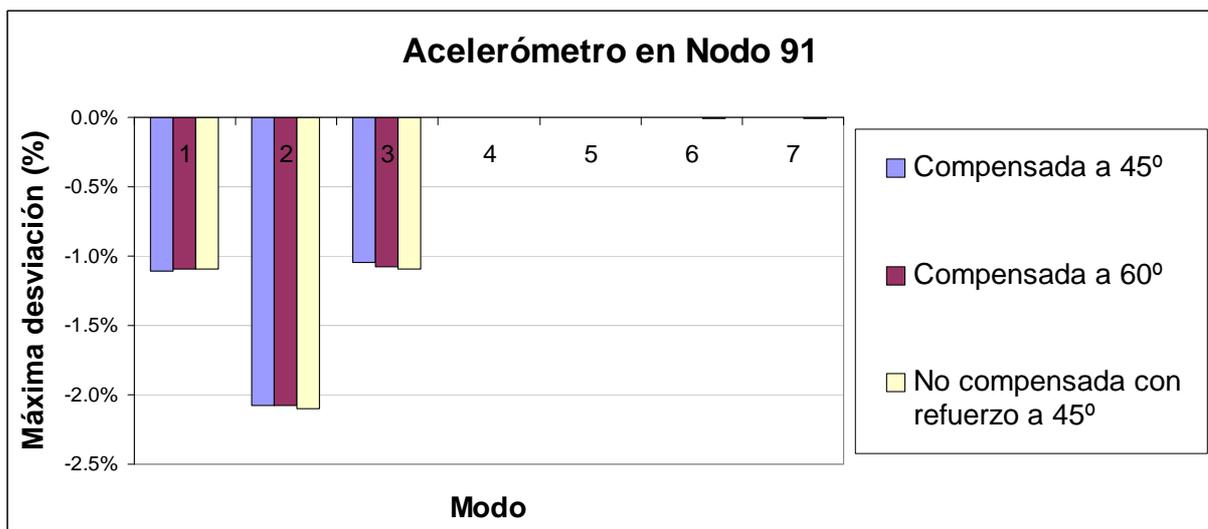


Figura 5: Máximas desviaciones para el acelerómetro ubicado en el Nodo 91 (ver Figura 3)

<sup>6</sup> Con un 90% de coordinación.

<sup>7</sup> Esta cantidad depende del grado de detalle en el mallado de elementos finitos.

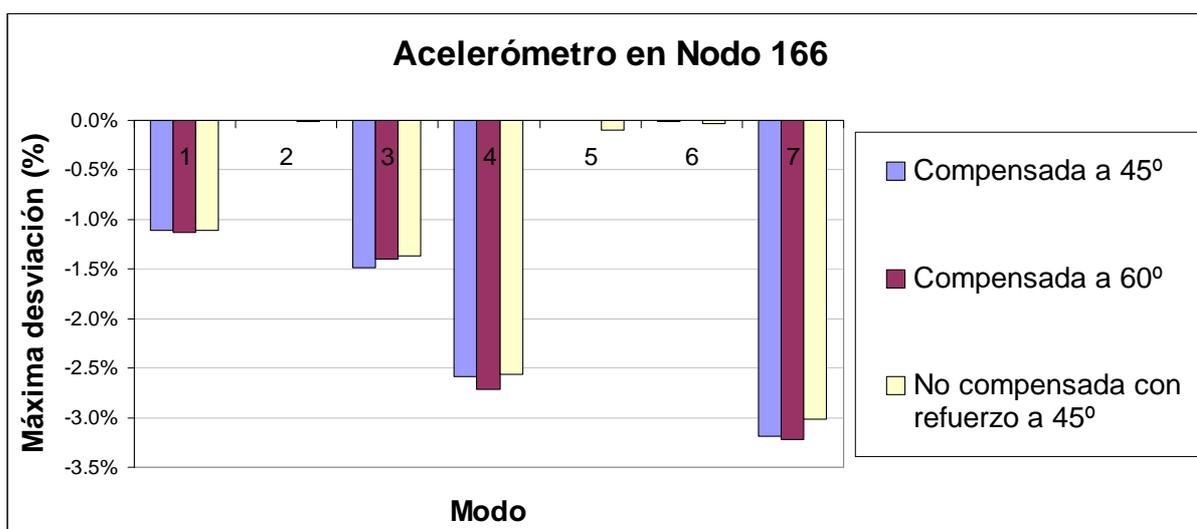


Figura 6: Máximas desviaciones para el acelerómetro ubicado en el Nodo 166 (ver Figura 3)

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado una expresión genérica basada en funciones de forma para calcular la desviación relativa esperable para las frecuencias naturales no amortiguadas que se determinan en placas por medio del empleo de acelerómetros, la cual es sólo dependiente del valor de la masa adosada y de su ubicación, con la limitación que considera a la masa concentrada aportando sólo inercia traslacional al conjunto.

La ecuación deducida para placas laminadas puede ser modificada fácilmente para representar el mismo fenómeno en elementos estructurales unidimensionales, con la única precaución de corregir el ámbito de integración y las funciones de forma asociadas.

La máxima desviación de las frecuencias naturales no amortiguadas depende principalmente de la relación entre la masa adosada del acelerómetro y la masa de la placa, comprobándose que valores del orden del 1.5% ya producen desviaciones importantes que en casos reales deberían ser consideradas y corregidas.

El tipo de sustentación de la placa es otra condición que influye sobre las desviaciones de las frecuencias naturales, siendo mayor la influencia cuanto mayor sea el grado de empotramiento de la placa.

La ubicación del acelerómetro sólo influye selectivamente según el modo que se analice, ya que las desviaciones de frecuencia alcanzan su máximo cuando la ubicación del acelerómetro coincide con un punto anti-nodal (de máximo desplazamiento nodal) y llega a ser nulo si el punto coincide con una línea nodal, aunque estos puntos no resultan aptos para mediciones de la propia frecuencia modal. Este aspecto es la ventaja que permite seleccionar una ubicación adecuada del acelerómetro en relación al error máximo aceptable al momento de realizar mediciones.

Las discrepancias encontradas entre los valores reportados empleando la técnica analítica de las funciones de forma y del método de los elementos finitos puede atribuirse a que las funciones de forma elegidas para simular las deformaciones posibles en las placas no consideran el efecto de deformación por corte, resultando por tanto más confiables los valores obtenidos empleando la técnica de elementos finitos.

Para las placas de composite, puede considerarse que el ángulo del refuerzo en las láminas no influye sensiblemente en la máxima desviación esperable.

**REFERENCIAS**

- Agarwall, B; Broutman, L.; “Analysis and Performance of Fiber Composites, Second Edition”, John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- P.M. Ciancio y C.A. Rossit, “Vibraciones libres de placas rectangulares Anisótropas empotradas que soportan una masa concentrada”, *Mecánica Computacional Vol XXIV* pp 827-844, A. Larretguy (Editor), Buenos Aires, Argentina, Noviembre 2005
- Mariano Febbo, Diana V. Bambill y Raúl E. Rossi, “Análisis de las vibraciones libres de una placa rectangular simplemente apoyada con una masa de dimensiones finitas adosada elásticamente”, *Mecánica Computacional Vol XXVIII*, págs. 455-465 (artículo completo), Cristian García Bauza, Pablo Lotito, Lisandro Parente, Marcelo Vénere (Eds.), Tandil, Argentina, 3-6 Noviembre 2009
- Daniel H. Felix, Diana V. Bambill y Carlos A. Rossit, “Vibraciones libres de una placa rectangular: influencia de una masa adosada”, *Mecánica Computacional Vol XXI* pp 2194-2200, S.R. Idelsohn, V.E. Sonzogni & A. Cardona (Eds.), Santa Fé-Paraná, Argentina, October 2002
- Christophe Geuzaine & Jean-Francoise Remacle: “GMSH: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”, version 1.61.3., 2005.
- Halpin, John; “Primer On Composite Materials Analysis”, Second Edition Revised, Technomic Publishing Co. Inc., 1992, 0-8776-2754-1.
- Nor Hatini Baharin & Roslan Abdul Rahman, “Effect of accelerometer mass on thin plate vibration”, *Jurnal Mekanikal*, December 2009, No.29, 100-111.
- Nallim, L. y Grossi, R.: On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates, *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003) 1201–1207.
- Nallim, L.; Oller, S. and Grossi, R.: Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005) 1797–1822.
- Raúl Zaradnik, Silvia Raichman & Anibal Mirasso: “Comportamiento Estático y Frecuencias Naturales de Placas Rectangulares Anisótropas de Material Compuesto”, XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Santiago de Chile, Chile, Mayo 2008, (a).
- Raúl Zaradnik, Silvia Raichman & Anibal Mirasso, “Comparación de soluciones de problemas de valores propios generalizados de gran orden originados en formulaciones equivalentes de elementos finitos”, EMCI 2008, (b).