

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DERIVADA NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

Gustavo J. Krause<sup>a,b</sup> y Sergio A. Elaskar<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, 5000-Córdoba, Argentina;  
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas – CONICET, Argentina*

<sup>b</sup>*gustavojavierkrause@gmail.com*

<sup>c</sup>*selaskar@uncor.efn.edu*

**Palabras Clave:** DNLS, ondas de Alfvén, métodos espectrales

**Resumen.** Interacciones no lineales de Ondas de Alfvén existen tanto en plasmas en el espacio como en laboratorios. En ingeniería aeroespacial, amarras electrodinámicas (tethers) generan emisión de Ondas de Alfvén. La Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) posee la capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela de Ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas, tanto en plasmas fríos como calientes. En el presente trabajo, dicha ecuación se soluciona numéricamente utilizando métodos espectrales para las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. En primer lugar se considera la DNLS sin efectos difusivos manteniendo los términos no lineal y dispersivo con condición inicial de una onda para verificar la solución obtenida con las condiciones analíticas de estabilidad modular, además de determinar el tiempo en el cual se produce la inestabilidad y la forma de la evolución posterior. En segundo término se analiza el caso con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia con el objetivo de evaluar la transferencia de energía entre los distintos modos. Finalmente se estudia este caso de tres ondas iniciales considerando efectos difusivos con una onda excitada y las otras dos amortiguadas, tomando distintos valores de difusión para comparar los resultados obtenidos con aquellos hallados mediante truncamiento a tres ondas.

## 1. INTRODUCCIÓN

Interacciones no lineales de ondas de Alfvén existen tanto para plasmas en el espacio como para plasmas de laboratorio. En ingeniería aeroespacial, la emisión de ondas de Alfvén se produce por la presencia de amarras electrodinámicas (tethers) interactuando con la ionosfera y el campo magnético terrestre, en forma de estructuras denominadas Alas de Alfvén. Esta interacción puede tener diversas aplicaciones, entre las que se destacan la producción de potencia eléctrica y la obtención de fuerza de empuje entre otras (Sanmartín et al., 2006). Las ondas de Alfvén generadas por un elemento conductor en el seno de un plasma fueron predichas por Drell et al. (1965) y observadas por primera vez en la magnetosfera de Júpiter (Acuna y Ness, 1981).

La estructura de Alas de Alfvén o del campo electromagnético que se genera por el movimiento de una amarra espacial sumergida en un plasma puede abordarse diferenciando las regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para el caso de campo lejano, es posible un estudio mediante un análisis lineal (Sanmartín y Estes, 1997), mientras que en las cercanías de elemento existe una serie de fenómenos que ameritan un estudio más detallado, ya que se esperan ondas de mayor intensidad con efectos no lineales más importantes. En este sentido, una posibilidad para el análisis de la evolución de los campos es a través de la ecuación “Derivative Non-Linear Schrödinger Equation – DNLS” la cual describe la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén circularmente polarizadas (Rogister, 1971).

En plasmas magnetizados las ondas de Alfvén son un rasgo característico. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith et al., 1995), por otro lado se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini et al., 1985), de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jetenco-Pereira, 1995), entre otros fenómenos.

## 2. METODOLOGÍA

La ecuación DNLS permite describir la propagación paralela o casi paralela a un campo magnético no perturbado de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. Dicha ecuación puede obtenerse a partir de las ecuaciones de la Magnetogasdinámica considerando plasma neutro, compuesto por dos fluidos, despreciando la inercia de los electrones y la corriente de desplazamiento (Baccelli et al., 1992); o desde las ecuaciones magnetogasdinámicas teniendo en cuenta el efecto Hall (Mjølhus, 1976).

Si el campo magnético  $B_0$  posee la dirección del eje  $z$  y el sistema de referencia se mueve con velocidad de Alfvén, la DNLS puede expresarse adimensionalmente de la siguiente manera (Rogister, 1971; Baccelli et al., 1992; Mjølhus, 1976).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \pm i \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \pm \frac{\partial}{\partial z} (\phi |\phi|^2) - \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \gamma_g \delta(k - k_1) \phi, \quad (1)$$

donde  $\phi$ ,  $t$ , y  $z$  son variables en forma adimensional tal que

$$\phi = \frac{B_x \pm iB_y}{B_0}, \quad \omega_{ci} t \rightarrow t, \quad \frac{\omega_{ci}}{V_A} z \rightarrow z, \quad (2)$$

siendo  $\omega_{ci}$  la frecuencia de ciclotrón iónica y  $V_A$  la velocidad de Alfvén. El signo superior en el término dispersivo de la Ec. (1) corresponde a ondas polarizadas a izquierda (LH), mientras que el inferior a ondas polarizadas a derecha (RH), propagándose en la dirección del eje  $z$ .

El signo del término no lineal puede ser negativo solamente para el caso de plasmas calientes considerando que se satisfaga la relación

$$\beta = \frac{c_s^2}{V_A} < 1, \quad (3)$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido (Mjølhus y Hada, 1997). En la Ec. (1)  $\gamma_g$  es el parámetro de excitación correspondiente a la onda 1.

La característica que hace atractiva a la DNLS es la gran cantidad de soluciones exactas que se conocen (Belashov y Vladimirov, 2005). Además esta ecuación ha sido estudiada por tres técnicas alternativas: búsqueda de soluciones exactas (Mjølhus y Hada, 1997), integración numérica (Splanger et al., 1985; Dawson y Fontan, 1988), y reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante dos procedimientos: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) y utilizando un número finito de modos (truncación) (Sanmartín et al., 2004; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007).

## 2.1. Solución mediante técnicas espectrales

En este trabajo se lleva a cabo la simulación numérica de la DNLS considerando métodos espectrales para la evaluación de las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo.

Para la utilización de métodos espectrales la solución de la Ec. (1) debe satisfacer en todas las simulaciones condiciones de contorno periódicas, es decir:

$$\phi(z, t) = \phi(z + L, t), \quad (4)$$

donde  $L$  es la longitud del dominio de integración.

El operador transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  y su inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  se definen como:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(k) &= \mathcal{F}[\phi(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) e^{-ikz} dz, \\ \phi(z) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{ikz} dk, \end{aligned} \quad (5)$$

por lo tanto, de acuerdo con con estas definiciones, las derivadas con respecto a la coordenada espacial  $z$  satisfacen la siguiente relación:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial z^n}\right) = (ik)^n \mathcal{F}[\phi(z)], \quad (6)$$

entonces la Ec. (1) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ ik(-1 \pm k) \mathcal{F}[\phi] \mp ik \mathcal{F}[\phi|\phi^2] \right\} + \\ &+ \mathcal{F}^{-1} \left\{ [\gamma_g \delta(k - k_1) - \eta k^2] \mathcal{F}[\phi] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Para la discretización espacial de la Ec. (7) se utiliza la Transformada de Fourier Discreta (DFT), la cual puede calcularse a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). La DFT

y su inversa están dadas por:

$$\bar{\phi}(k) = \sum_{j=1}^N \phi(z_j) e^{-ikz_j}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (8)$$

$$\phi(z_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{N/2} \bar{\phi}(k) e^{ikz_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

con lo que la Ec. (7) resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ (k_j \mp k_j^2) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_j) \pm k_j \mathcal{F} [\operatorname{Im}(\phi_j) |\phi_j|^2] \right\} + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1} \left\{ [\gamma_g \delta(k_j - k_1) - \eta k_j^2] \operatorname{Re}(\bar{\phi}_j) \right\}, \\ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ (-k_j \pm k_j^2) \operatorname{Re}(\bar{\phi}_j) \mp k_j \mathcal{F} [\operatorname{Re}(\phi_j) |\phi_j|^2] \right\} + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1} \left\{ [\gamma_g \delta(k_j - k_1) - \eta k_j^2] \operatorname{Im}(\bar{\phi}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Como se dijo anteriormente, esta técnica exige condiciones de periodicidad de la solución. En muchas simulaciones para la DNLS el fenómeno de interés no está influenciado por lo que sucede en el contorno por lo tanto simulaciones numéricas con condiciones de borde periódicas son una buena solución (Belashov y Vladimirov, 2005).

Durante la simulación el espacio físico es discreto y cerrado y entonces el espacio de Fourier será también discreto y cerrado. Subdividiendo el espacio físico en  $N$  puntos, siendo  $h$  la distancia entre dos puntos consecutivos y  $L$  la longitud del dominio de integración:

$$z \in \left( -\frac{L}{2} + h, -\frac{L}{2} + 2h, \dots, \frac{L}{2} - h, \frac{L}{2} \right),$$

por lo tanto el espacio de Fourier es

$$k \in \left[ \frac{2\pi}{L} \left( -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} \right) \right].$$

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos en la investigación. El primer análisis consiste en el estudio de la estabilidad modular y de la transferencia de energía entre modos para la DNLS no difusiva con diferentes condiciones iniciales. Posteriormente se consideran los efectos difusivos para comparar los resultados hallados por este método con aquellos obtenidos mediante técnicas de truncamiento (Sánchez-Arriaga et al., 2007).

Para todas las simulaciones, a excepción que se indique lo contrario, se utiliza un paso de tiempo  $dt = 1 \times 10^{-3}$ , una longitud de dominio  $L = 64$  con una discretización de  $N = 256$  puntos considerando ondas polarizadas a izquierda con  $\beta < 1$ .

#### 3.1. Ecuación DNLS no difusiva

Para comenzar se considera el caso de la ecuación DNLS sin efectos difusivos, con el término no lineal y el dispersivo, utilizando dos condiciones iniciales diferentes: (i) una onda; (ii) tres ondas cerca de resonancia ( $2k_1 = k_2 + k_3$ ). El estudio se realiza para plasmas fríos y calientes

y se efectúa un análisis de la influencia del número de puntos utilizados en la discretización, del sentido de polarización de las ondas y del nivel y distribución de energía en las ondas iniciales. Considerando la Ec. (1) con  $\eta = 0$  y  $\gamma_g = 0$ , la Ec. (7) se escribe como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1} \{ ik(-1 \pm k) \mathcal{F}[\phi] \mp ik \mathcal{F}[\phi |\phi|^2] \}, \quad (11)$$

y entonces las Ecs. (10) resultan

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) &= \mathcal{F}^{-1} \{ (k_j \mp k_j^2) \operatorname{Im}(\bar{\phi}_j) \pm k_j \mathcal{F}[\operatorname{Im}(\phi_j) |\phi_j|^2] \}, \\ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) &= \mathcal{F}^{-1} \{ (-k_j \pm k_j^2) \operatorname{Re}(\bar{\phi}_j) \mp k_j \mathcal{F}[\operatorname{Re}(\phi_j) |\phi_j|^2] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3.1.1. Una Onda

El objetivo de este análisis es verificar numéricamente las condiciones analíticas de estabilidad modular y determinar en qué forma evoluciona el sistema luego de que la inestabilidad se produce.

Para el primer análisis se sigue el desarrollo de Fla (1992), quien estableció condiciones de estabilidad modular para la DNLS con condiciones de contorno periódicas, con condición inicial de una onda de la forma

$$\phi(z, 0) = \phi_0 = A_0 e^{ik_0 z} = A_0 [\cos(k_0 z) + i \sin(k_0 z)], \quad (13)$$

donde

$$k_0 = \frac{2\pi n_0}{L} \quad (14)$$

siendo  $n_0$  el número de onda inicial y  $L$  la longitud del dominio de integración

Considerando que la solución base consiste en un tren de ondas de amplitud constante el cual es perturbado levemente:

$$\phi(z, t) = A_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} [1 + \varepsilon(z, t)], \quad \omega = A_0^2 k_0 - k_0^2, \quad (15)$$

donde la función perturbación  $\varepsilon(z, t)$  y la función base  $\phi(z, t)$  son complejas y  $L$ -periódicas sobre el intervalo  $[-L/2, L/2]$ . Además se verifica que  $|\varepsilon|^2 \ll 1$  y que la amplitud  $A_0$  es un número real.

Si se acepta que la función  $\varepsilon(z, t)$  puede expandirse en serie de Fourier resulta

$$\varepsilon(z, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j(t) e^{i\mu_j z}, \quad \alpha_j(t) = \alpha_j(0) e^{\lambda_j t}, \quad (16)$$

donde  $\mu_j = 2\pi n_j/L$  son los números de onda, entonces considerando las Ecs. (15) y (16) en la ecuación DNLS se obtiene que

$$\lambda_j = i 2 (A_0^2 - k_0) \mu_j \pm |\mu_j| \sqrt{(2k_0 - A_0^2) A_0^2 - \mu_j^2}. \quad (17)$$

La Ec. (17) muestra que la onda de amplitud constante es inestable cuando  $2k_0 > A_0^2$  y marginalmente estable cuando  $2k_0 < A_0^2$ , es decir que de acuerdo a la Ec. (14) los valores de amplitud para los cuales existirá inestabilidad dependen del número de onda inicial.

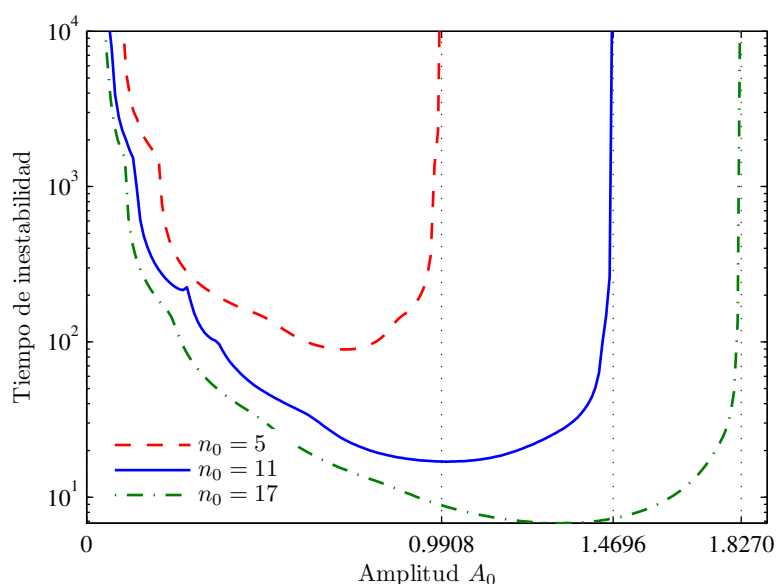


Figura 1: Tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial  $A_0$

Para establecer un criterio de estabilidad se define el parámetro  $E_{k_0}$ , el cual representa la relación entre la energía transportada por la onda inicial y la energía total del sistema

$$E_{k_0} = \frac{|\bar{\phi}_{k_0}|}{\sum_{j=1}^N |\bar{\phi}_j|}, \quad (18)$$

donde  $N$  es el número total de modos utilizados en la simulación,  $\bar{\phi}$  es la transformada de Fourier discreta del campo magnético y el subíndice  $j$  indica el número de onda. Se considera que se produce inestabilidad si en algún momento durante la simulación  $E_{k_0} \leq 0,9999$ , es decir que la onda inicial pierde el 0,01 % de su energía. Con este criterio se realiza el gráfico de la Figura 1, donde se especifica el tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial para  $n_0 = 5$  y  $n_0 = 11$ , cuyos valores de amplitud para que exista inestabilidad resultan  $A_0 < 0,991$ ,  $A_0 < 1,470$  y  $A_0 < 1,827$  respectivamente.

Observando la figura, se deduce en primera instancia que el tiempo para que se produzca la inestabilidad depende fuertemente de la amplitud de la onda inicial, además se verifica la condición de inestabilidad  $A_0 < \sqrt{2k_0}$  en todos los casos analizados, ya que considerando valores mayores de amplitud no se produjo inestabilidad para simulaciones de hasta  $t = 1 \times 10^5$ . Por otro lado, para amplitudes  $A_0 \rightarrow 0$  la mínima amplitud a partir de la cual se genera inestabilidad depende del valor de  $k_0$  utilizado así, por ejemplo para el caso de  $n_0 = 11$  y  $k_0 \approx 1,08$  con  $A_0 < 0,06$  no se produjo inestabilidad en simulaciones de hasta  $t = 1 \times 10^5$ .

Siguiendo con el análisis se estudia la evolución de la onda luego de alcanzada la inestabilidad. Los resultados encontrados indican que al igual que el tiempo al cual se produce la inestabilidad, la forma de la evolución también depende de la amplitud, ya que en función de su valor aparecen soluciones cuasi periódicas o que evolucionan de una forma caótica. A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron considerando  $n_0 = 11$ .

Para valores de amplitud  $A_0 < 0,135$  se produce una variación cuasi periódica de la transferencia de energía representada en el parámetro  $E_{k_0}$ , la cual se grafica en la Figura 2 para  $A_0 = 0,08$ ,  $A_0 = 0,10$  y  $A_0 = 0,13$ . Puede observarse que los intervalos de tiempo entre valores extremos decrecen lentamente y su longitud disminuye con el aumento de la amplitud. Por

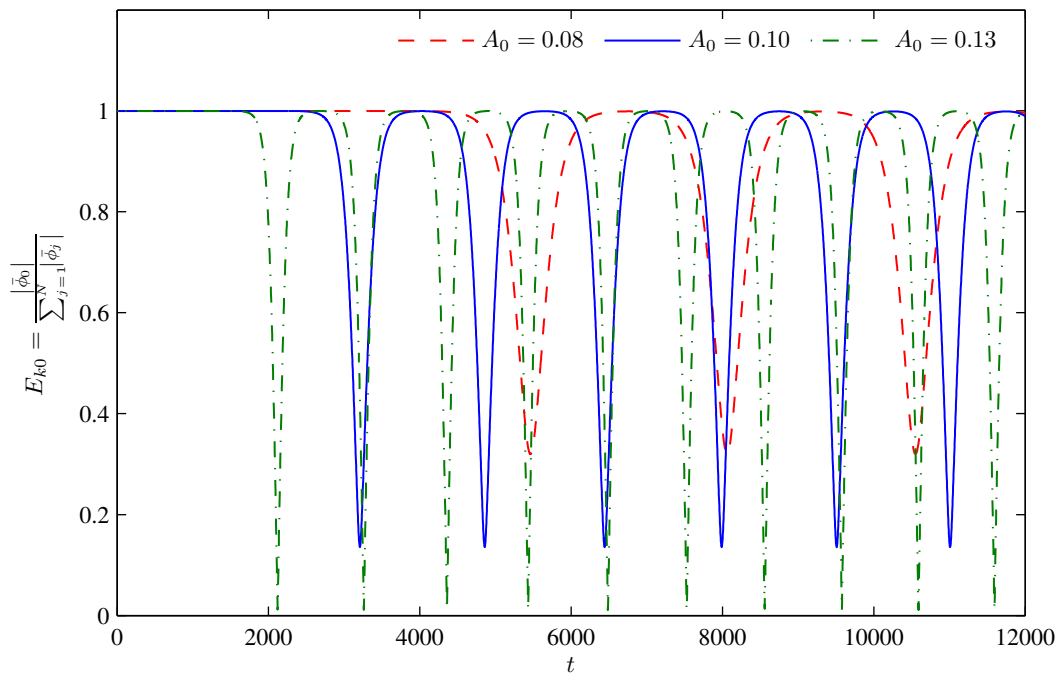


Figura 2: Evolución de la distribución de energía en función del tiempo

otro lado, el valor mínimo de  $E_{k_0}$  no es igual para todas las amplitudes, sino que se aproxima más a cero para mayores amplitudes iniciales.

Para conocer cómo se distribuye la energía luego de producida la inestabilidad, se confecciona la Figura 3. Allí se muestra la distribución de la energía de la transformada de Fourier para  $A_0 = 0,10$  considerando tres tiempos distintos, el primero para cuando aún no se produjo la inestabilidad, el segundo correspondiente a un punto intermedio entre los valores extremos del nivel de energía de la onda inicial, y el restante para el mínimo valor de  $E_{k_0}$ . Puede observarse claramente que la energía se distribuye fundamentalmente entre tres ondas: la onda original o madre, y dos ondas hijas, verificando la relación  $2k_0 = k_1 + k_2$ .

Los resultados para  $0,135 < A_0 < 1,47$  difieren de los analizados anteriormente, ya que dentro de ese rango la forma cuasi periódica de la solución comienza a desaparecer, dando lugar a un proceso de transferencia de energía que se torna más irregular con el aumento de la amplitud  $A_0$ . En la Figura 4 puede observarse un caso representativo de este comportamiento, correspondiente a  $A_0 = 0,4$ . Allí se aprecia que luego de producida la inestabilidad, la onda inicial recupera parcialmente su energía original, completando un ciclo similar a los de las soluciones de la Figura 2, pero continúa con ciclos más irregulares hasta llegar a una evolución caótica.

La distribución de energía para este caso no es sustancialmente diferente a la representada en la Figura 3. Este aspecto puede observarse en la Figura 5 donde se muestra la distribución de la energía de la transformada de Fourier para diferentes tiempos, tal como se hizo en la figura mencionada. Como se aprecia, también en esta situación se verifica una distribución de energía principalmente entre tres ondas, la onda madre y las dos hijas con  $2k_0 = k_1 + k_2$ . Este comportamiento se cumple dentro del rango donde la solución presenta una evolución regular.

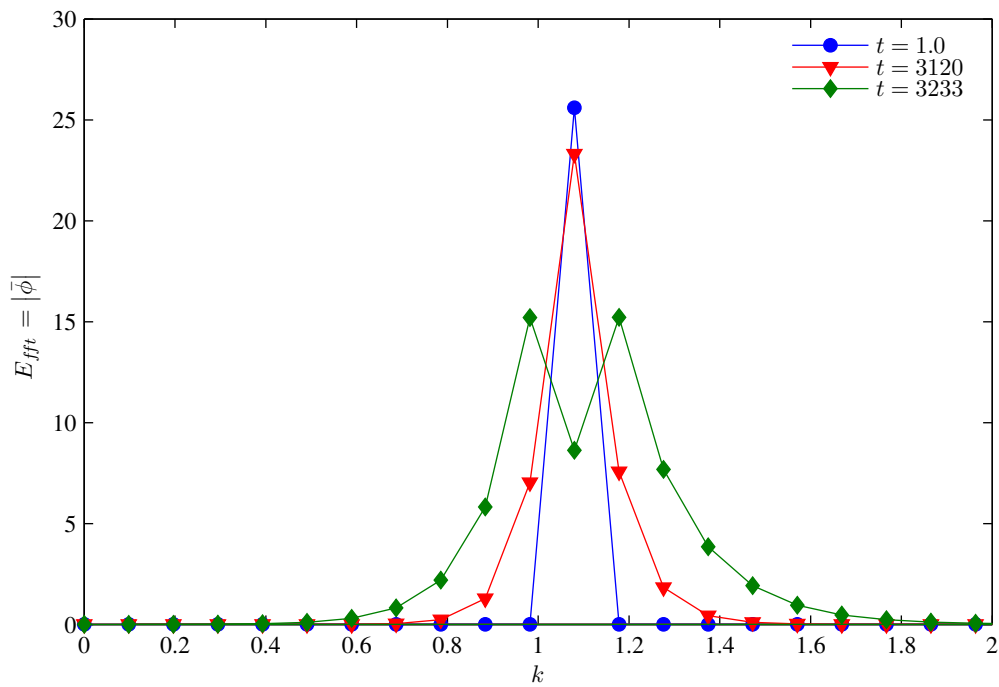


Figura 3: Distribución de la energía de la transformada de Fourier para  $A_0 = 0,10$

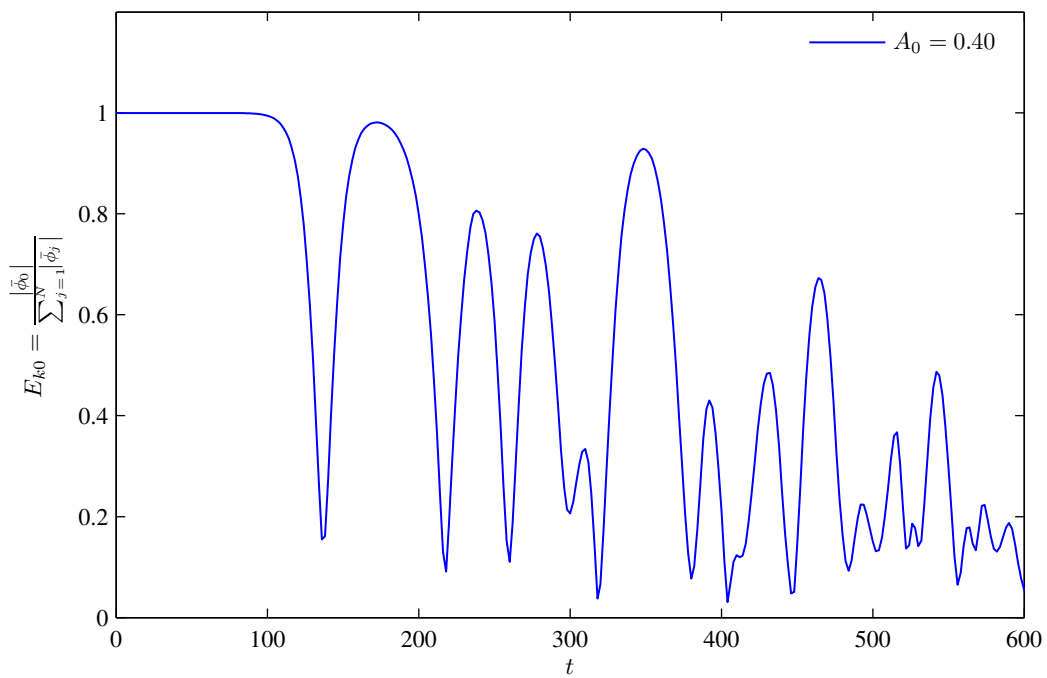


Figura 4: Evolución de la distribución de energía en función del tiempo



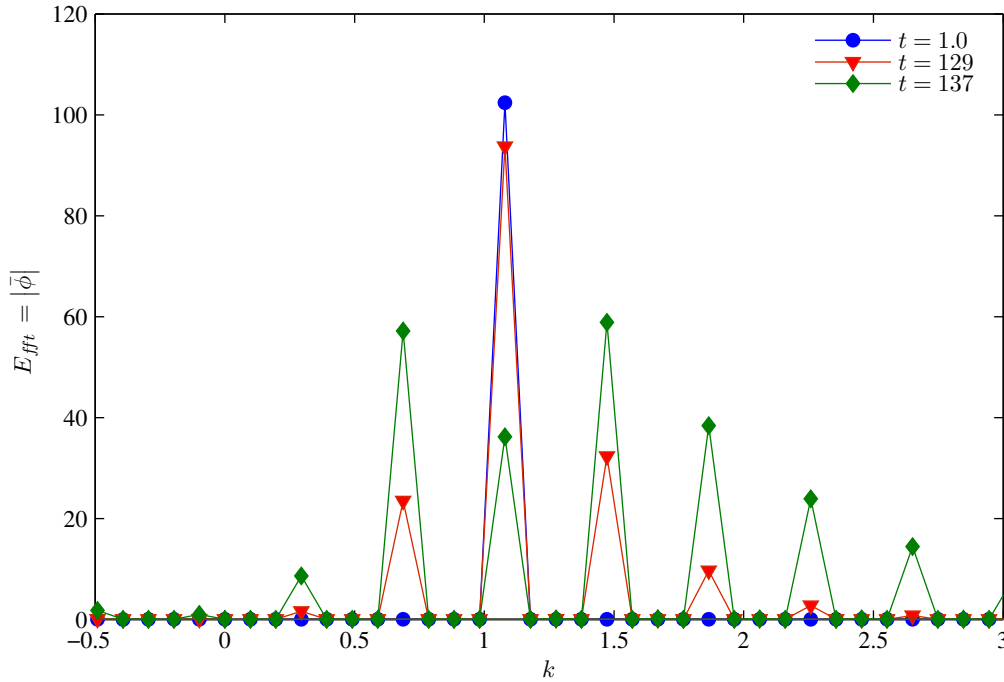


Figura 5: Distribución de la energía de la transformada de Fourier para  $A_0 = 0,40$

### 3.1.2. Tres Ondas

Observando los resultados obtenidos en la sección anterior puede inferirse la importancia en la transferencia de energía cuando existen tres ondas actuando en forma simultánea. En esta sección se presentan resultados numéricos de la DNLS cuando se utiliza como condición inicial tres ondas monocromáticas de la forma:

$$\phi(z, 0) = \phi_0 = \sum_{j=1}^3 A_j e^{ik_j z}; \quad A_j = \sqrt{k_j M_j}, \quad (19)$$

donde los parámetros  $M_j$  que determinan la amplitud quedan definidos mediante:

$$M_1 = q m, \quad M_{2,3} = \frac{1-q}{2} m, \quad (20)$$

siendo  $m$  un parámetro que representa la cantidad de energía ingresada al sistema y  $q$  indica cómo se distribuye la energía entre las tres ondas. Los números de onda se definen como  $k_j = 2\pi n_j/L$ . Para estas simulaciones se elige  $n_1 = 10$  y  $n_{2,3} = (1 \mp \delta) n_0$ , donde el parámetro  $\delta$  se toma

$$\delta = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} n_1\right) n_1} \quad (21)$$

de manera de maximizar la velocidad de crecimiento de la inestabilidad modular para ondas polarizadas a izquierda, verificándose de esta manera la relación de resonancia  $2k_1 = k_2 + k_3$ . Se destaca desde las Ecs. (19) y (20) que la función  $\phi_0$  es  $L$ -periódica y satisface la restricción impuesta en la Ec. (4).

De manera similar a lo realizado en la sección anterior, para cuantificar la transferencia de energía y poder analizar su evolución se define el parámetro  $E_k$  como en la Ec. (18), pero ahora

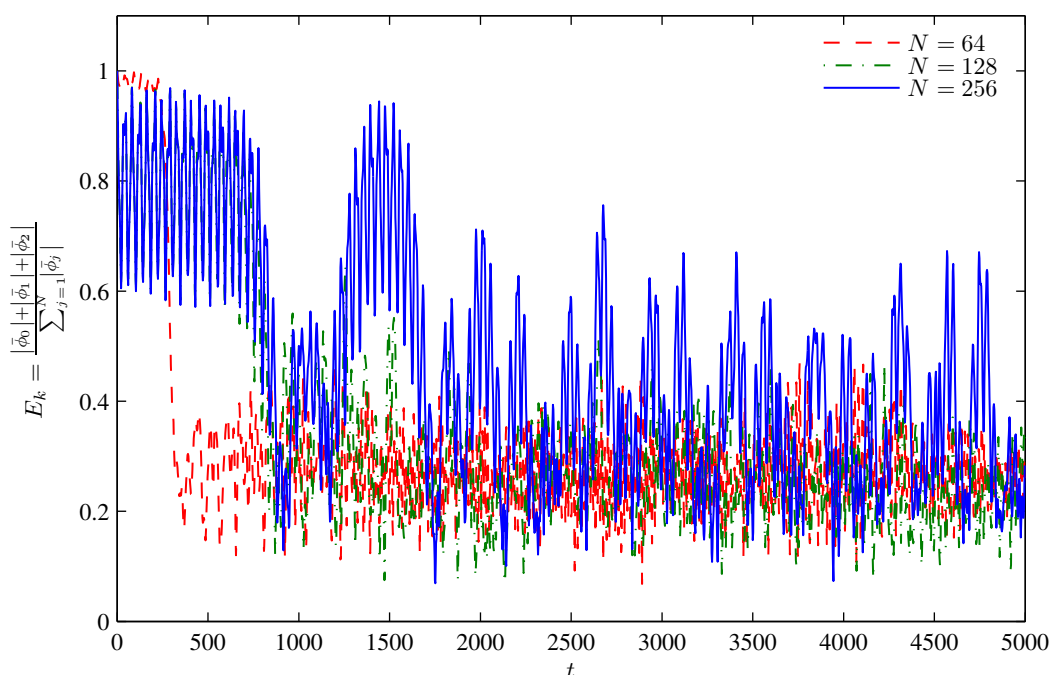


Figura 6: Sensibilidad al número total de modos para ondas polarizadas a izquierda con  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$

considerando las tres ondas iniciales:

$$E_k = \frac{|\bar{\phi}_1| + |\bar{\phi}_2| + |\bar{\phi}_3|}{\sum_{j=1}^N |\bar{\phi}_j|}, \quad (22)$$

siendo  $N$  el número total de modos utilizado en la simulación,  $\bar{\phi}$  la transformada de Fourier discreta del campo magnético y el subíndice  $j$  indica el número de onda.  $E_k$  representa qué cantidad de energía es transportada por los tres modos resonantes con respecto a la energía total del sistema. Valores de  $E_k$  próximos a la unidad indican que la energía está repartida fundamentalmente entre los tres modos resonantes, y en este caso los modelos de truncamiento a tres ondas describirían mejor la dinámica no lineal de la DNLS (Sanmartín et al., 2004; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007). Por otro lado, si el valor de  $E_k$  es bajo la energía se encuentra en otros modos.

En este estudio se consideran distintos niveles de energía del sistema (parámetro  $m$ ) con diferentes formas de distribución de la misma (parámetro  $q$ ), tanto para ondas polarizadas a izquierda como a derecha, para plasmas fríos y calientes.

El primer análisis consiste en evaluar la influencia del número total de modos  $N$  utilizado para la simulación. Para ello se consideran ondas polarizadas a izquierda y a derecha con valores  $N = 64$ ,  $N = 128$  y  $N = 256$ . Con estas consideraciones, en las Figuras 6 y 7 se grafica la evolución del parámetro  $E_k$  en función del tiempo para  $m = 0,1$ ,  $q = 0,9$  y signo positivo en el término dispersivo de la DNLS, es decir  $\beta < 1$ . Observando los gráficos se destaca que los resultados para  $N = 64$  son sustancialmente diferentes de los hallados para  $N = 128$  y  $N = 256$ , por lo tanto se utiliza este último para las simulaciones restantes.

A continuación se analiza cómo repercute el nivel de energía y la distribución de la misma en la evolución de la solución. Para ello se presenta primeramente la Figura 8, en la cual se muestra la variación del parámetro  $E_k$  para tres niveles distintos de energía,  $m = 0,1$ ,  $m = 0,25$  y  $m = 0,4$ , considerando ondas polarizadas a izquierda,  $\beta < 1$  y  $q = 0,9$ . Se observa que a

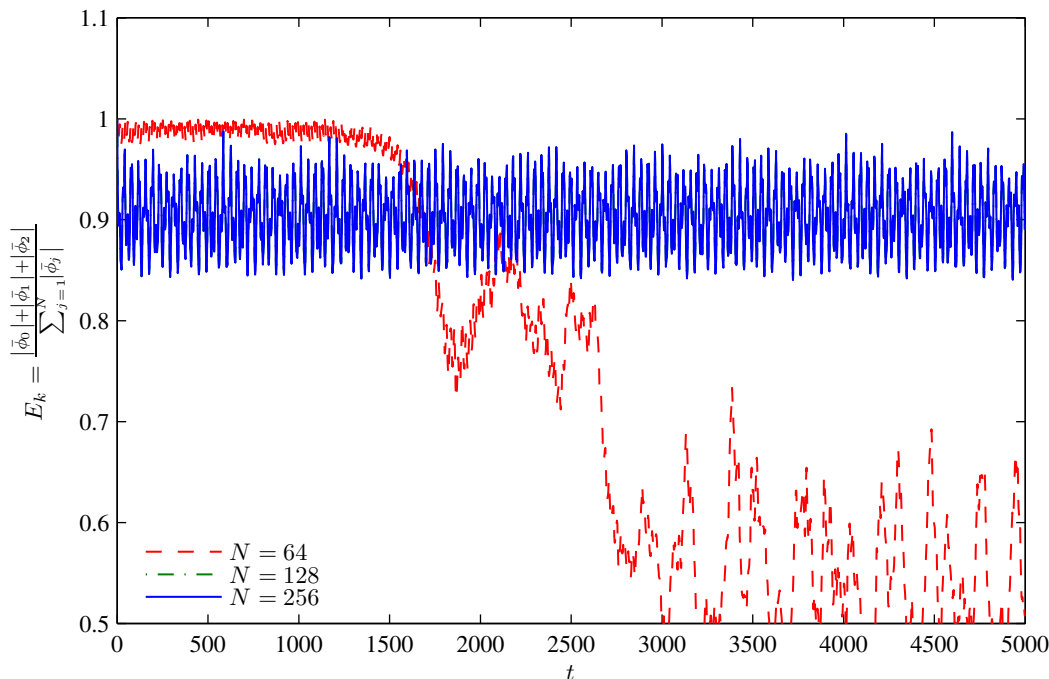


Figura 7: Sensibilidad al número total de modos para ondas polarizadas a derecha con  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$

mayores niveles de energía, el sistema se desestabiliza más rápidamente y los modos resonantes no vuelven a recuperar sus niveles iniciales de energía.

Un estudio similar se realiza en la Figura 9, donde se muestra la evolución en el tiempo del parámetro  $E_k$  para distintas formas de distribución de energía, considerando  $q = 0,1$ ,  $q = 0,5$  y  $q = 0,9$ , para plasmas en las mismas condiciones que las de la figura anterior, con  $m = 0,1$ . Se observa una fuerte influencia de la distribución de la energía, que cuando ella está almacenada mayormente en la onda madre ( $q \rightarrow 1$ ), los tres modos resonantes acaparan un mayor porcentaje de la misma.

Otro aspecto importante a conocer además de la influencia de la distribución y nivel inicial de la energía es cómo evoluciona la distribución de energía entre los tres modos resonantes. En la Figura 10 se presenta la variación de la energía de cada una de las ondas consideradas inicialmente, para  $m = 0,1$ ,  $q = 0,9$  y las mismas condiciones utilizadas anteriormente.

El último análisis correspondiente a esta parte de la investigación consiste en la evaluación de la influencia del sentido de polarización de las ondas y del valor del parámetro de plasma  $\beta$ . En las Figuras 11 y 12 se muestra la variación de  $E_k$  para ondas polarizadas a izquierda y a derecha, con  $\beta < 1$  y  $\beta > 1$ , con  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$  en ambos casos.

En las figuras se observa que tanto el tiempo para que se produzca la inestabilidad como la evolución posterior del sistema están fuertemente influenciados por el sentido de polarización de las ondas y el valor del parámetro de plasma. Puede verse que para  $\beta < 1$ , las ondas con polarización izquierda son modularmente inestables, mientras que a derecha tienen una evolución estable. Por otro lado, si el plasma es caliente con  $\beta > 1$ , el comportamiento es opuesto, presentándose inestabilidad para ondas polarizadas a derecha, sin embargo el rango de validez de aplicación de la Ec. (1) para este caso es reducido (Mjølhus y Hada, 1997).

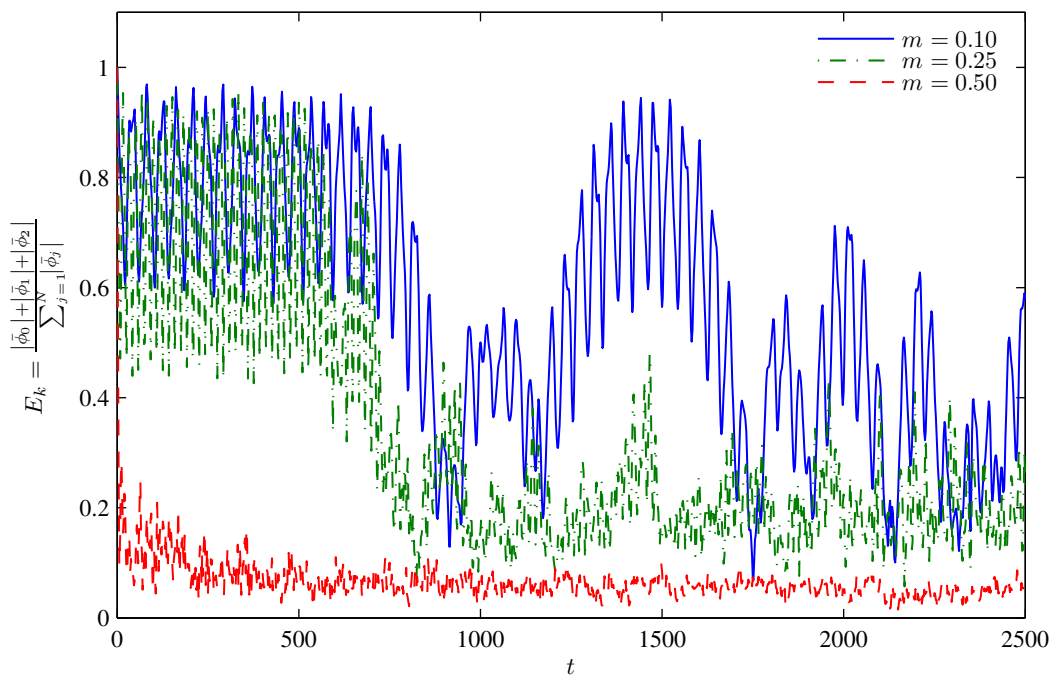


Figura 8: Sensibilidad al al nivel de energía para polarización izquierda,  $\beta < 1$  y  $q = 0,9$

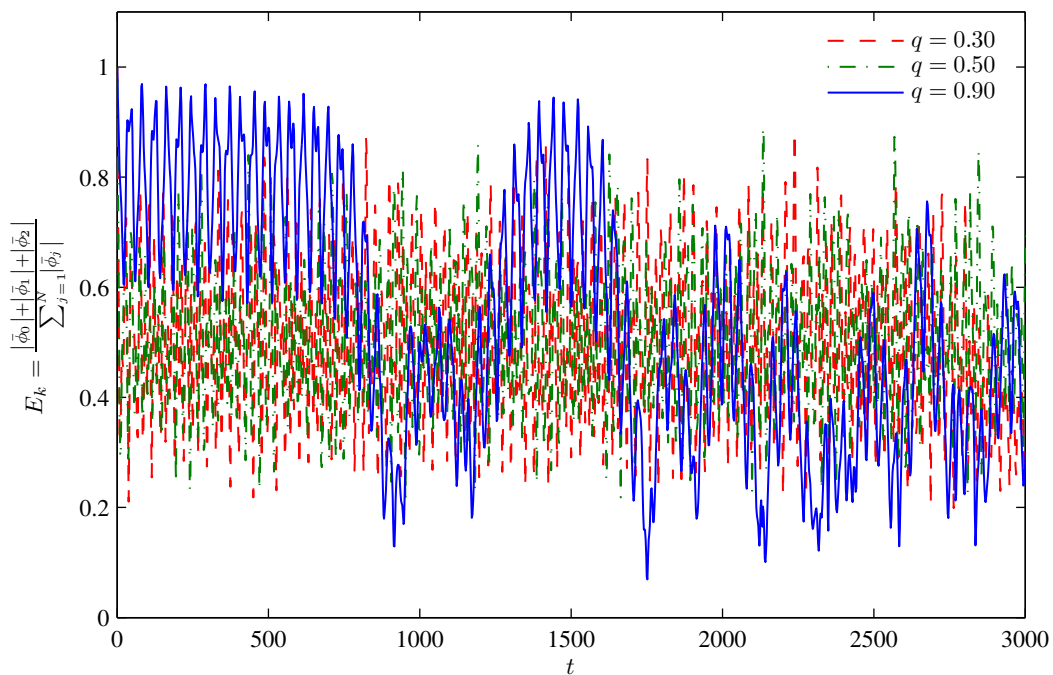


Figura 9: Sensibilidad a la distribución inicial de energía para polarización izquierda,  $\beta < 1$  y  $m = 0,1$

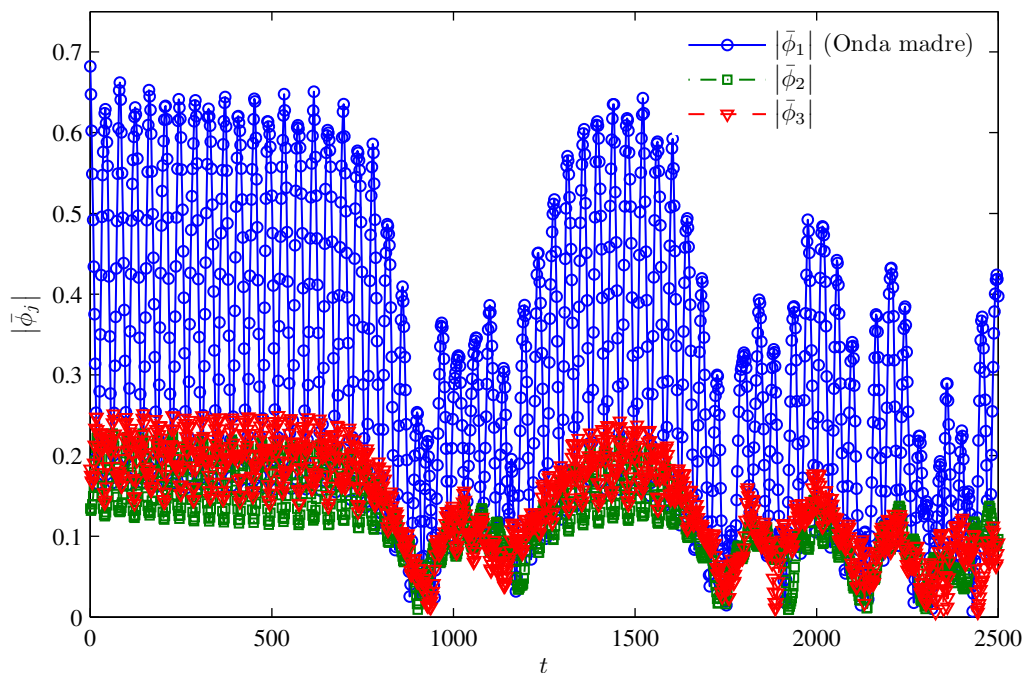


Figura 10: Distribución de energía entre los tres modos resonantes para polarización izquierda,  $\beta < 1$ ,  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$

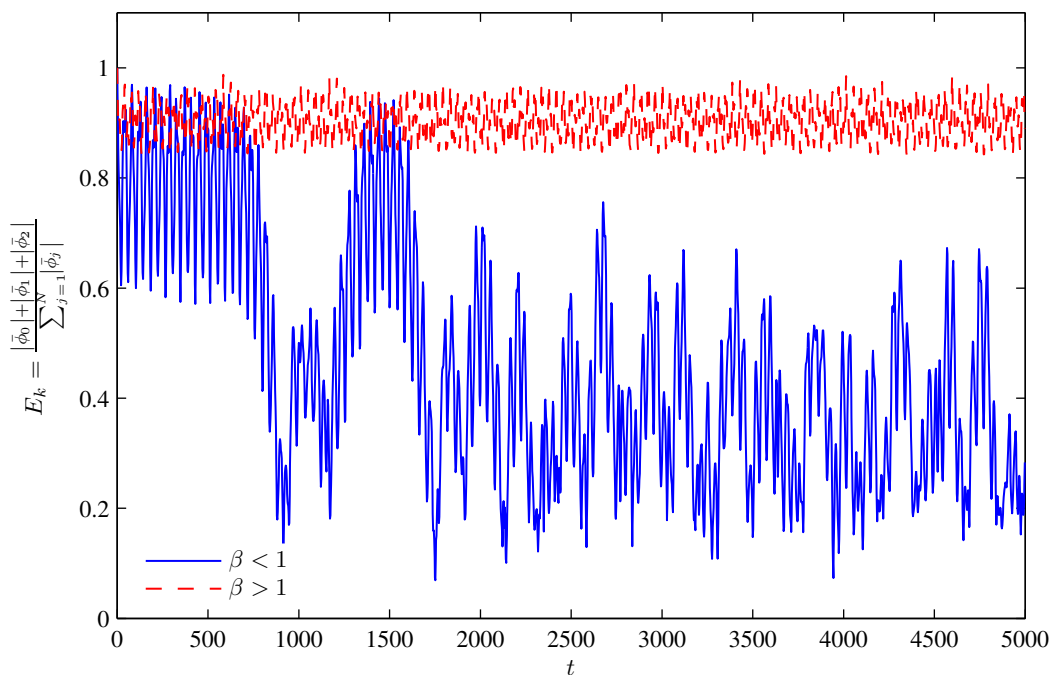


Figura 11: Evolución de  $E_k$  para ondas polarizadas a izquierda con  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$

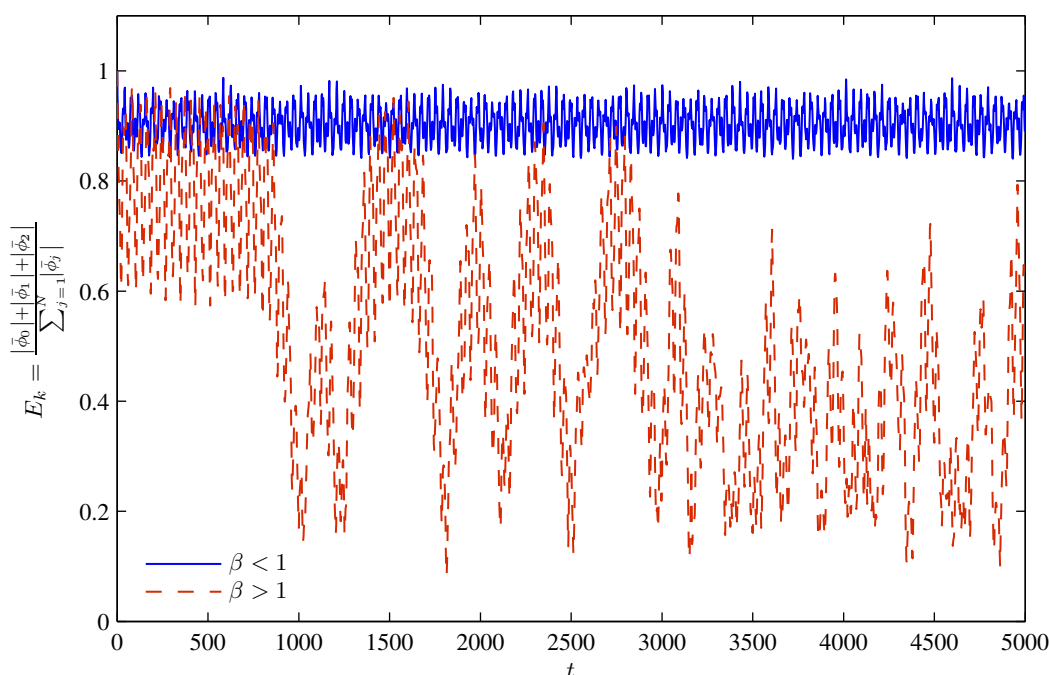


Figura 12: Evolución de  $E_k$  para ondas polarizadas a derecha con  $m = 0,1$  y  $q = 0,9$

### 3.2. Ecuación DNLS con efectos difusivos

En esta sección se considera el caso de la ecuación DNLS con efectos difusivos, con término no lineal y dispersivo, para estudiar la transferencia de energía entre los diferentes modos tomando distintos valores de difusión.

Para las simulaciones se considera el caso con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia ( $2k_1 = k_2 + k_3$ ), con la primera onda correspondiente a  $k_1$  excitada y las restantes amortiguadas, de modo de poder realizar las comparaciones con los resultados hallados mediante técnicas de truncamiento (Sánchez-Arriaga et al., 2007). Teniendo en cuenta la Ecs. (1) y (7), se define la función de amortiguamiento de la siguiente manera:

$$A = \gamma_g \delta(k - k_1) - \eta k^2, \quad (23)$$

de donde se desprende que existe amortiguamiento para todo valor de  $k$ , excepto para  $k = k_1$ , donde el sistema está excitado.

Con el uso de técnicas de truncamiento se busca una solución aproximada de la ecuación DNLS, consistente en tres ondas viajeras que satisfacen la condición de resonancia

$$\phi = \sum_{j=1}^3 a_j(t) e^{i[\psi_j(t) + k_j z - \omega_j t]}, \quad (24)$$

siendo  $a_j$  y  $\psi_j$  números reales. Los números de onda  $k_j$  y las frecuencias  $\omega_j$  están relacionadas por medio de la expresión de dispersión lineal (sin pérdidas) para ondas de Alfvén circularmente polarizadas:

$$\omega_j = k_j \mp \frac{1}{2} k_j^2. \quad (25)$$

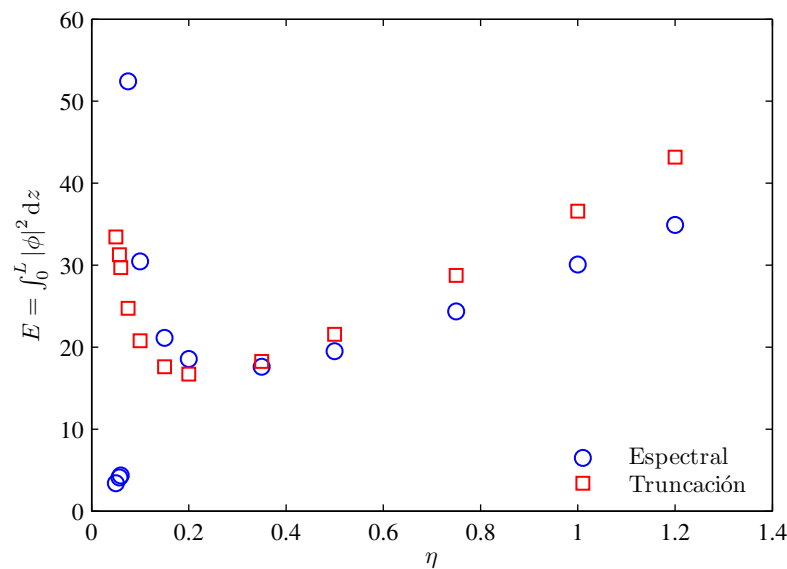


Figura 13: Comparación entre técnicas espectrales y por truncamiento a tres ondas con  $A(k_1) = 0,02$ ,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 17$

Para la comparación de resultados se define la energía del campo magnético en todo el dominio:

$$E = \int_0^L |\phi|^2 dz. \quad (26)$$

En el caso de truncamiento, se verifica lo siguiente

$$E = \int_0^L |\phi|^2 dz = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) L. \quad (27)$$

En este trabajo se realizan comparaciones para dos atractores hallados tanto por integración numérica por técnicas espectrales como por truncamiento a tres ondas. El primero de ellos corresponde a los números de onda  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 17$ , quedando  $k_j$  definido por la Ec. (14).

En la Figura 13 se presenta la variación de la energía en función del coeficiente de amortiguamiento obtenida por medio de ambas técnicas. La existencia de este atractor se verifica para valores de  $\eta > 0,04$ , con  $A(k_1) = 0,02$ . Puede observarse en la figura que para  $\eta \geq 0,10$  los resultados muestran una correlación aceptable, sin embargo por debajo de ese valor de amortiguamiento existen discrepancias significativas entre los resultados hallados por cada método, presentándose dentro de ese rango dos comportamientos diferentes, uno para  $0,065 \leq \eta < 0,1$  donde la energía obtenida por métodos espectrales es significativamente mayor que la determinada por truncamiento, y otro para  $\eta < 0,065$  en el cual la energía resulta sustancialmente menor. Este aspecto se discute más adelante cuando se analiza la distribución de energía correspondiente a los distintos valores de amortiguamiento.

El segundo atractor se obtuvo para los siguientes parámetros:  $A(k_1) = 0,02$ ,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 3$  y  $n_3 = 15$ . En este caso el atractor se verifica para  $0,06 \leq \eta \leq 0,09$ . En la Figura 14 se presentan los resultados obtenidos por las dos técnicas consideradas. En esta ocasión puede observarse una muy buena correlación entre los valores de energía hallados por ambos métodos para todo el intervalo de amortiguamiento considerado.



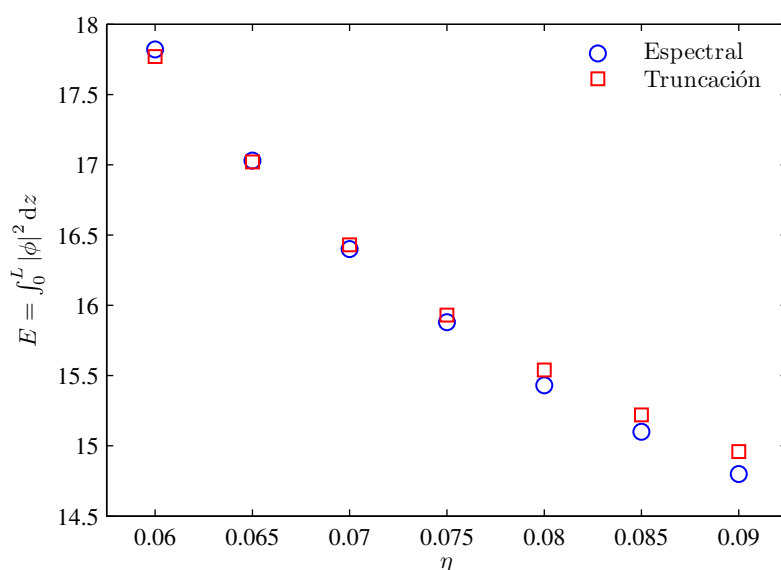


Figura 14: Comparación entre técnicas espectrales y por truncamiento a tres ondas con  $A(k_1) = 0,02$ ,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 3$  y  $n_3 = 15$

Para una mejor comprensión de los diferentes comportamientos que se presentaron en el caso del primer atractor (Figura 13), se analiza cómo se distribuye la energía a lo largo del dominio de integración. Para ello se presenta la Figura 15, en la cual se muestra esta distribución para valores de amortiguamiento  $\eta = 0,5$  y  $\eta = 1,2$ , donde se observa que el atractor posee un comportamiento similar en ambos casos. El mismo procedimiento se realiza en la Figura 16, considerando en esta ocasión  $\eta = 0,0625$ ,  $\eta = 0,06$  y  $\eta = 0,2$ .

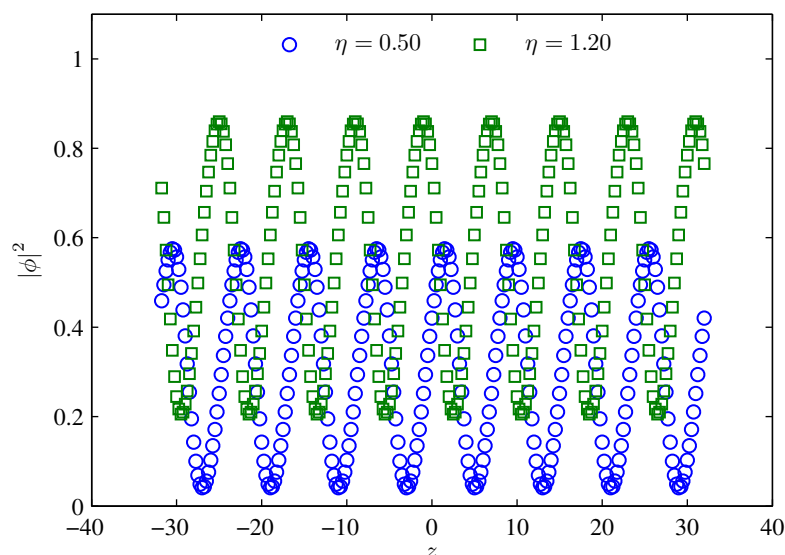


Figura 15: Distribución de energía para  $A(k_1) = 0,02$ ,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 17$

Se observa en las figuras que las distribuciones de energía son similares en los casos donde  $\eta \geq 0,065$ , pero se diferencia notablemente cuando  $\eta = 0,0625$ . De esta manera puede explicarse la aparición de dos comportamientos diferentes en el caso de la Figura 13, en el cual para  $0,065 \leq \eta < 0,10$ , si bien la energía calculado por métodos espectrales es considerablemente



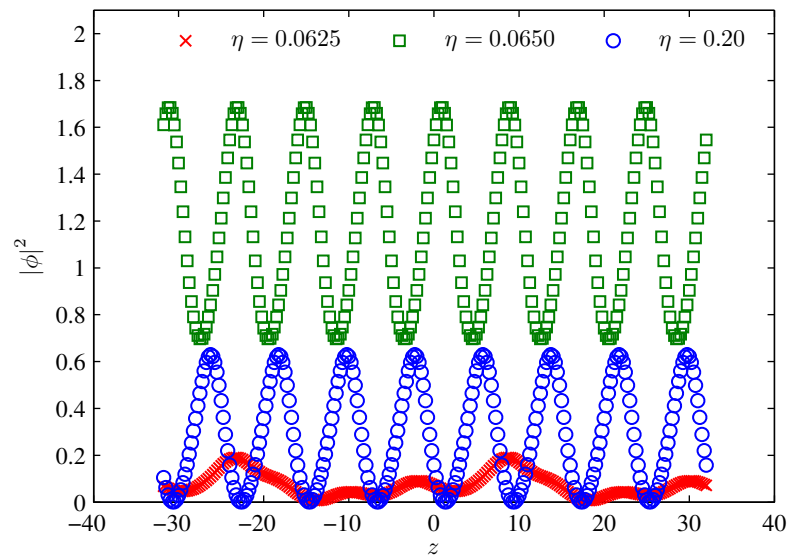


Figura 16: Distribución de energía para  $A(k_1) = 0,02$ ,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 17$

mayor que la obtenida por truncamiento, ambas técnicas evalúan el mismo atractor, mientras que para  $\eta < 0,065$  la obtención de valores de energía sustancialmente menores en el caso de métodos espectrales puede atribuirse a la aparición de un nuevo atractor para esta técnica.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) ha sido solucionada numéricamente utilizando métodos espectrales para las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. Primeramente se consideró el caso de la DNLS no difusiva con dos tipos de condiciones iniciales diferentes: una onda y tres ondas cerca de resonancia; para luego incorporar los efectos difusivos y realizar comparaciones de los resultados.

En el caso de la DNLS no difusiva con condición inicial de una onda, fue posible verificar numéricamente las condiciones analíticas de estabilidad modular, además de hallar el tiempo en el cual comienza la inestabilidad y conocer en qué forma evoluciona el sistema una vez que ésta es alcanzada. En este estudio se encontró que tanto el tiempo de inestabilidad como la evolución posterior del sistema depende fuertemente de la amplitud de la onda inicial. Por otro lado también se observó que en un determinado rango de valores de amplitud, la inestabilidad de la onda inicial da lugar a un intercambio de energía fundamentalmente entre tres ondas, la onda inicial o madre y dos ondas hijas, satisfaciendo la relación de resonancia  $2k_0 = k_1 + k_2$ .

Continuando con el análisis de la DNLS no difusiva, se estudió el caso con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia para evaluar la influencia de los distintos parámetros que definen la simulación. En ese sentido se analizó cómo influye el nivel y la distribución de energía entre las tres ondas iniciales, el sentido de polarización de las ondas y el valor del parámetro de plasma  $\beta$ . De acuerdo con los resultados obtenidos, todos estos parámetros tienen una influencia significativa en la evolución del sistema, destacándose que se produce inestabilidad para los donde hay polarización izquierda con  $\beta < 1$ , o polarización derecha con  $\beta > 1$ , aunque la aplicabilidad de las ecuaciones utilizadas para esta última situación es discutible.

Finalmente se llevó a cabo el estudio de la DNLS considerando efectos difusivos para realizar comparaciones con resultados hallados mediante técnicas de truncamiento a tres ondas

cerca de resonancia, con una onda excitada y las demás amortiguadas considerando diferentes valores de amortiguamiento. Para este análisis se estudiaron dos atractores que se encuentran por ambas técnicas, el primero para números de onda  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 17$  y un rango de amortiguamiento de  $\eta \geq 0,04$ ; y el segundo con  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 3$  y  $n_3 = 15$  y  $0,06 \leq \eta \leq 0,09$ . Los resultados hallados por métodos espectrales mostraron una buena correlación con aquellos obtenidos mediante truncamiento en la mayor parte de los valores de amortiguamiento considerados, sin embargo, se presentaron discrepancias para el primer caso estudiado, en el cual aparecieron soluciones que no pudieron ser alcanzadas por esta técnica para  $\eta < 0,10$ . A su vez, por debajo de este valor de amortiguamiento se presentaron dos comportamientos diferentes, uno para el rango  $0,065 \leq \eta < 0,10$  donde la energía obtenida por métodos espectrales es considerablemente mayor que la hallada por truncamiento, y otro con  $\eta < 0,065$  para el cual se produjo el resultado inverso, con un valor de energía mucho menor en el caso de los métodos espectrales. La aparición del segundo comportamiento se atribuye a que el método encuentra un atractor distinto cuando  $\eta < 0,065$ , y consecuentemente la energía calculada resulta significativamente inferior a la obtenida mediante truncamiento.

## REFERENCIAS

- Acuna M. y Ness F. Standing alfvén wave current system at io: Voyager i observations. *Journal of Geophysics Research*, 86:8513, 1981.
- Baccelli G., Cohen G., Olsder G., y J. Q. *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Even Systems*. Wiley and Sons, 1992.
- Belashov V. y Vladimirov S. *Solitary Waves in Dispersive Complex Media*. Springer, Berling, 2005.
- Dawson S. y Fontan C. Soliton decay of nonlinear alfvén waves numerical studies. *Physics of Fluids*, 31(1):83–89, 1988.
- Drell S., Foley H., y Ruderman M. Drag and propulsion of large satellites in the ionosphere: An alfvén propulsion engine in space. *Journal of Geophysics Research*, 70:3131, 1965.
- Elaskar S., Sánchez-Arriaga G., y Sanmartín J. Chaos in nonlinear alfvén waves using the dnls equation. *International Symposium on Electrohydrodynamics – 2006 ISEHD Buenos Aires, 4-6 de diciembre, Publicado en los Proceeding del Congreso*, ISBN 950-29-0964-X:131–134, 2006.
- Fla T. A numerical conserving method for the dnls equation. *Journal of Computational Physics*, 101:71–79, 1992.
- Hada T., Kennel C., Buti B., y Mjølhus E. Chaos in driven alfvén systems. *Physics of Fluids*, B2(11):2581–2590, 1990.
- Jetenco-Pereira V. Alfvén waves in astrophysical plasmas. *Physics Scripta*, 60:113, 1995.
- Mjølhus E. On the modulation instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field. *Journal of Plasma Physics*, 16:321–334, 1976.
- Mjølhus E. y Hada T. *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*. edited by T. Hada and H. Matsumoto (Terrapub, Tokio), 1997.
- Pettini M., Nocera L., y Vulpiani A. Compressible mhd turbulence; an efficient mechanism to heat stellar coronae. *Chaos in Astrophysics, Eds. J. Bucler et al., Dorochet Reidel*, 1985.
- Rogister A. Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high- $\beta$  plasma. *Physics of Fluids*, 1971.
- Sánchez-Arriaga G., Sanmartín J., y Elaskar S. Damping models in the truncated dnls equation. *Physics of Plasmas*, 14:082108, 2007.
- Sanmartín J., Charro M., Peláez J., Tíno I., Elaskar S., Hilgers A., y Martínez-Sánchez A.

- Electrically floating bare-tether as upper atmosphere probe. *Journal of Geophysics Research*, 111:A11310, 2006.
- Sanmartín J. y Estes R. Alfvén wave far field form steady-current tethers. *Journal of Geophysics Research*, 102-A7(14):625, 1997.
- Sanmartín J., López-Rebollal O., del Río E., y Elaskar S. Hard transition to chaos dynamics in alfvén wave-front. *Physics of Plasmas*, 11(5):2026–2035, 2004.
- Smith E., Balogh A., Neugebauer M., y McComas D. Ulysses observations of alfvén waves in the southern and northern hemispheres. *Geophysical Research Letters*, 22:3381, 1995.
- Splanger S., Sheerin J., y Payne G. A numeric study of nonlinear alfvén waves and solitons. *Physics of Fluids*, 28:104–109, 1985.