

APLICACIONES DEL CONCEPTO DE FUERZAS CONFIGURACIONALES EN LA MECANICA DE FRACTURA.

Angel A. Ciarbonetti^a, Alfredo E. Huespe^a, Pablo J. Sánchez^b

^a CIMEC-INTEC-UNL, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina. www.cimec.org.ar

^b GIMNI-UTN-FRSF, Lavaisse 610, 3000 Santa Fe, Argentina

Palabras Clave: mecánica de fractura, fuerzas configuracionales, evaluación de la Integral-J.

Resumen. En este trabajo introduce el concepto de fuerzas configuracionales (Gurtin M.E. Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics. Springer: Berlin, New York), en un contexto general de defectos materiales y las ecuaciones de balance que gobiernan su distribución. Estas ecuaciones de balance se implementan en problemas elásticos cuasi-estáticos, utilizando el Método de los Elementos Finitos. Las fuerzas configuracionales nodales del sistema discreto se utilizan, para determinar los parámetros que provienen del campo de la Mecánica de Fractura, tal como la integral-J.

Se presenta un segundo procedimiento de cálculo de la Integral-J basado en el método de la integral de dominio.

Finalmente se realiza la validación numérica de ambas implementaciones comparando los valores de la integral-J con las soluciones provistas por ambos métodos en geometrías conocidas.

1 INTRODUCCIÓN

En la mayoría de componentes estructurales se presentan defectos de varios tipos y tamaños que pueden producirse durante la fabricación, montaje o servicio. Estos defectos pueden ser de distintas dimensiones tales como de punto (inclusiones), de línea (dislocaciones), o de superficies (cambios de fase, etc.). En lo que concierne a este trabajo, nos interesa específicamente los defectos estructurales debidos a fisuras y grietas.

En este caso, los criterios tradicionales de diseño estructural basados en una tensión crítica, no son suficientes para evaluar el comportamiento mecánico de dichos defectos.

La Mecánica de Fractura considera el fenómeno de fisuración y brinda herramientas para evaluar la resistencia frente a dicho fenómeno.

Uno de los parámetros fundamentales utilizados en esta aproximación para evaluar la intensidad de los campos alrededor de fisuras, es el Factor de Intensidad de Tensiones. Alternativamente, utilizando aproximaciones energéticas, el parámetro que juega ese rol es la tasa de energía liberada por unidad de área de fisura que se genera, y que está relacionado con la integral-J, tal como lo muestra la amplia bibliografía en la temática. La adopción de valores críticos de estos parámetros define criterios de falla.

Dichos criterios no están basados en la física de los fenómenos microscópicos que, son los que gobiernan el problema de propagación de fisuras en distintos tipos de materiales. Aún con esta limitación, las metodologías de análisis y criterios de falla basados en los parámetros arriba mencionados son ampliamente difundidos en la literatura. Están bien establecidos y determinados y continúan teniendo una influencia decisiva en aplicaciones tecnológicas de esta área de la Mecánica. Por ende, la determinación de estos parámetros, juega un papel fundamental en este tipo de problemas.

En este trabajo nos centraremos en el cálculo de la integral-J en forma numérica utilizando para ello dos métodos y comparando la convergencia de ambos a valores teóricos obtenidos de bibliografía (TL.Anderson, 2000).

Primeramente en las secciones 2 y 3 se introducen los conceptos teóricos que asocian a la integral-J con el Tensor de Tensiones de Eshelby y las Fuerzas configuracionales (Mueller, 2002). Luego en la sección 4 se presentan dos métodos para evaluar la integral-J en forma numérica.

El primer se basa en determinar la integral-J a través de una integral de contorno numérica como se menciona en (J.E.Ortiz, A.P. Cisilino, 2002) y (TL.Anderson,2000).

El segundo método determina la integral-J por medio de las fuerzas configuracionales un concepto que ha sido detalladamente estudiado y formalizado por Gurtin y coautores en varios trabajos desde hace al menos 15 años, (Gurtin M.E) y utilizado en varios contextos (Mueller, 2002) y (P.Steinmann, 2000). Este último método nos brinda además datos adicionales sobre la bondad de la discretización dato importante sobre todo a la hora de diseñar la topología de las mallas de elementos finitos.

Por otro lado además de las comparaciones de las convergencia de los distintos métodos se dan lineamientos para realizar el diseño de mallas de elementos finitos a fin de tener buenos resultados numéricos similar a como se muestra en (P.Steinmann, 2000).

2 EL TENSOR DE TENSIONES DE ESHELBY.

Consideremos un sólido con defectos móviles. En el contexto de la presente sección, estos defectos pueden ser de distintas dimensiones, tales como de punto (inclusiones), de línea (dislocaciones), o de superficies (contornos de grano, cambios de fases, etc.). El movimiento, o cambio de configuración, de estos defectos induce una variación en la energía de

deformación en el sólido que será explícitamente considerada al modelar la función energía de deformación $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{x})$. La dependencia explícita de esta función con el punto espacial \mathbf{x} , además de incluir la dependencia convencional con el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, toma en cuenta este hecho ver (Mueller, 2002).

Con esta forma de describir la dependencia de la energía de deformación, la ley de estado que expresa la relación entre la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y la deformación, $\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\varphi$ conserva su significado. Y utilizando la regla de la cadena, se puede determinar el gradiente espacial de la función de energía de deformación como sigue:

$$\nabla_x \varphi = \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} + (\partial_x \varphi)_{expl} \quad ; \quad [\varphi_{,k} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} + \varphi_{,k|expl}] \quad (1)$$

La notación: $\nabla_x(\cdot)$ se refiere al operador gradiente y $\partial_x \varphi$ es la derivada parcial de la función energía, fijando el argumento $\boldsymbol{\varepsilon}$. A la derecha de la expresión (1), entre corchetes, hemos escrito en notación indicial la expresión intrínseca de la izquierda. Mostraremos ambas notaciones en lo que sigue debido a que algunas operaciones tensoriales que aparecen no son estándar. En la notación indicial, los subíndices $i, j, k: 1, 2$ (asumimos que el espacio es \mathbb{R}^2)

El segundo término de la ecuación (1) puede reescribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \nabla \mathbf{u} \quad ; \quad [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} = (\sigma_{ij} u_{j,k})_{,i} + \sigma_{ij,i} u_{j,k}] \quad (2)$$

Donde utilizamos la ecuación de compatibilidad entre el desplazamiento \mathbf{u} y la deformación: $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$. De la ecuación de balance de la cantidad de movimiento para un problema cuasi-estático, se tiene la ecuación de Cauchy:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

siendo \mathbf{b} la fuerza por unidad de volumen y se desprecia los términos inerciales. Reemplazando esta relación en (2) y luego en (1), resulta:

$$\nabla_x \varphi - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{b} \nabla \mathbf{u} + (\partial_x \varphi)_{expl} \quad , \quad [\varphi_{,k} - \sigma_{ij,i} u_{j,k} = b_j u_{j,k} + \varphi_{,k|expl}] \quad (3)$$

y reagrupando términos:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{b} \nabla \mathbf{u} + (\partial_x \varphi)_{expl} \quad (4)$$

La expresión (4) se interpreta como una ecuación de balance de cantidad de movimiento generalizada, en forma local, dada por la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{g} = 0 \quad ; \quad [\Sigma_{ij,i} + g_j] \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ se denomina tensor de tensiones de Eshelby, y es definido como sigue:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varphi \mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u} \quad ; \quad [\Sigma_{ij} = \varphi \delta_{ij} - \sigma_{ik} u_{k,j}] \quad (6)$$

El segundo término de la derecha en (5) se denomina fuerza configuracional o material:

$$\mathbf{g} = -(\mathbf{b} \nabla \mathbf{u} + (\partial_x \varphi)_{expl}) \quad (7)$$

Observamos que dimensionalmente, el tensor de Eshelby es una tensión ($[\boldsymbol{\Sigma}] = \text{N/m}^2$), y que en general es no simétrico, aunque sí lo es para elasticidad isotrópica.

3 FLUJO ENERGÍA EN LA PUNTA DE UNA FISURA (INTEGRAL -J).

En esta sección analizamos el flujo de energía hacia la punta de una fisura que propaga en un medio sólido \mathcal{B} con una velocidad \mathbf{v} , como se observa en la Figura 1. En este trabajo sólo tratamos con un medio elástico iso-entrópico, sin flujo de energía térmica. Por lo tanto el

balance de energía sólo se limita a la parte mecánica. Seguimos el trabajo de (Moran and Shih, 1987).

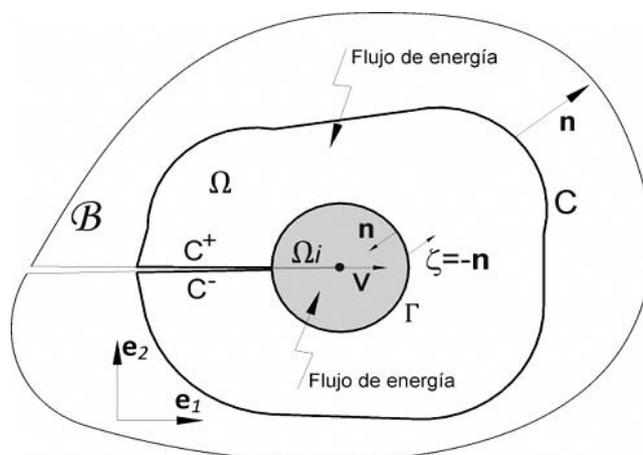


Figura 1 Sólido con una fisura propagando a una velocidad v

Definimos el dominio Ω como la parte del cuerpo delimitada por los contornos C , C^+ , C^- , Γ . El contorno Γ es interior al cuerpo rodea a la punta de la fisura los contornos C^+ y C^- representan las caras de la fisura (el signo está relacionado con la posición del vector normal en ese contorno). La aproximación que consideramos en este apartado, asume que el dominio Ω_i , delimitado por la curva Γ , se mueve conjuntamente con la punta de la fisura sin cambio de forma. De tal modo que, para un observador montado en la punta de la fisura, el volumen Ω_i representa un volumen espacial fijo. Este observador detecta una velocidad del punto material que es $\omega = -v$ y por lo tanto, los flujos que evaluamos a través de Γ , corresponden con esa velocidad relativa, ver Figura 2. Mientras que el contorno C es un contorno material. Asumimos, además, que este observador detecta campos que son localmente estacionarios (en regiones próximas a la punta de la fisura).

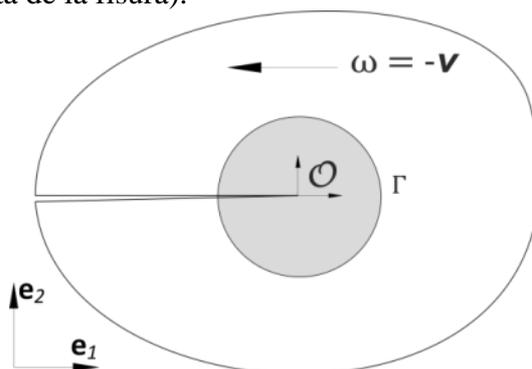


Figura 2: Sólido con una fisura propagando a una velocidad v . El observador O está montado en la punta de la fisura. El balance de energía en el volumen espacial Ω y Ω_i es descrito por este observador

Evaluamos el balance de energía en Ω . Esto es, los flujos de energía (mecánica) a través de las superficies y la energía almacenada en Ω . En particular, nos interesa determinar el flujo de energía a través de Γ , cuando esta superficie tiende a un punto coincidente con la punta de la fisura. Este concepto está asociado con la integral-J y el tensor Σ , como vemos a seguir.

Partiendo del Teorema de las Fuerzas Vivas, ver Oliver, 2000, aplicándolo a la parte del cuerpo Ω y despreciando la energía cinética y su derivada temporal, resulta:

$$\int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \, dV \quad (8)$$

Donde, el término de la izquierda de la ecuación (8) representa la potencia mecánica que el medio externo le ejerce a la parte Ω , a través del producto del vector tracción \mathbf{T} por la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ en el contorno. El término de la derecha representa el cambio (derivada material) de la energía de deformación contenida en el volumen de control Ω .

Considerando que la fisura está libre de tracciones ($\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$ en $C^+ \cup C^-$), el término de la potencia externa se puede reescribir como:

$$\int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA = \int_{\Gamma} -(\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \, dA + \int_C (\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (9)$$

Observar que el primer término se evalúa con la normal $\boldsymbol{\zeta}$ saliente de Ω_i ($\boldsymbol{\zeta} = -\mathbf{n}$). Mientras que el término de la derecha de la ecuación (8), aplicando el teorema de Reynolds, resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \, dV = \int_{\Omega} \dot{\varphi} \, dV + \int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \varphi (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \, dA \quad (10)$$

Donde, el término de flujo en $\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-$ lo evaluamos con la velocidad relativa del material respecto al volumen de control ($\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$), que por las suposiciones adoptadas resulta nula en el contorno C y ortogonal a \mathbf{n} en los contornos $C^+ \cup C^-$. Por lo que el término de flujo se puede reescribir como:

$$\int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \varphi (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{\Gamma} \varphi (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \, dA \quad (11)$$

Reemplazando (9) y (11) en (8) y reacomodando términos, obtenemos:

$$\int_C (\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\Omega} \dot{\varphi} \, dV + \int_{\Gamma} [\varphi \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}] \cdot \boldsymbol{\zeta} \, dA \quad (12)$$

El término de la izquierda se interpreta como el flujo de energía mecánica que el medio (cuerpo \mathcal{B}) le realiza a Ω . El primer término de la derecha se interpreta como el cambio de energía de deformación experimentado por la parte del sólido Ω , por lo tanto, el último término, se interpreta como el flujo de energía mecánica que Ω_i le realiza a Ω . La velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ en el contorno Γ para el observador \mathcal{O} , siguiendo una descripción euleriana en el formato estándar (según este observador, los campos son estacionarios), se escribe:

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \nabla \mathbf{u} = -\mathbf{v} \nabla \mathbf{u} = -(\mathbf{e}_1 \nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \quad ; \quad [\dot{u}_i = -u_{i,1} \boldsymbol{\nu}] \quad (13)$$

donde, la velocidad de la punta de la fisura: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} \mathbf{e}_1$ con $\boldsymbol{\nu}$ su magnitud.

Por lo tanto, el término: $\mathcal{F} = [\varphi \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}] \cdot \boldsymbol{\zeta}$, que es el segundo término a la derecha de (12), con la expresión: $(\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\zeta}$ en notación indicial dada por $-\sigma_{ij} u_{j,1} \zeta_i$, puede reescribirse como:

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\nu} \int_{\Gamma} (\varphi \delta_{1i} - \sigma_{ij} u_{j,1}) \zeta_i \, dA \quad (14)$$

Llamando tasa de relajación de energía al término:

$$\mathcal{G} = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}}{\boldsymbol{\nu}} = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\varphi \delta_{1i} - \sigma_{ij} u_{j,1}) \zeta_i \, dA \quad (15)$$

que se interpreta, debido al signo negativo, como el flujo de energía que el medio le realiza a la parte del cuerpo Ω_i para extender la fisura una unidad de área (las unidades están dadas por $[\mathcal{G}] = [\text{N/m}]$).

Introduciendo la definición (6) en (15), observamos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_1) \cdot \boldsymbol{\zeta} dA = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\Sigma} d\Gamma \right) \cdot \mathbf{e}_1 dA \\ &= \left(-\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} dV \right) \cdot \mathbf{e}_1 dA \end{aligned} \quad (16)$$

En la última igualdad hemos aplicado el teorema de Green; y de la ecuación de balance para las tensiones de Eshelby, finalmente nos queda:

$$\mathcal{G} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{g} dV \right) \cdot \mathbf{e}_1 dV \quad (17)$$

Puesto que el volumen tiende a cero, para que la expresión (17) tenga un valor finito no nulo, \mathbf{g} debe ser no limitado en la punta de la fisura ($\mathbf{g} \sim \mathcal{O}(1/r^2)$). Este desarrollo tiene sentido para una fisura progresando en un medio sólido. Alternativamente, un análisis equivalente se puede realizar para casos cuasi-estáticos, asumiendo avances virtuales de la fisura.

4 DOS APROXIMACIONES PARA EVALUAR LA INTEGRAL-J UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

En esta sección presentamos dos aproximaciones intrínsecamente relacionadas para determinar en forma numérica la integral-J: *i*) la primera se basa en la evaluación de las fuerzas configuracionales, en particular la fuerza configuracional de superficie que surge en la punta de la fisura (como punto singular), *ii*) el segundo método está basado en integrales de dominio.

A pesar de que ambas parten de un contexto teórico idéntico, una ventaja de la primera aproximación sobre la segunda es que evalúa un término vectorial en la punta de la fisura, en comparación al término puramente escalar (integral-J) provisto por la segunda aproximación. Se considera que este vector provee mayor información del estado mecánico en las vecindades de la punta de la fisura, como también da una idea del nivel de error introducido por la discretización de la malla de elementos finitos. Como se verá en la sección siguiente.

En esta sección consideramos un campo $\boldsymbol{\Sigma}$ con divergencia nula en cualquier punto, excepto en la punta de la fisura. Esto sucede en problemas cuasi-estáticos, sin propagación de fisura, con fuerza volumétrica nula, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y material homogéneo, $((\partial_x \varphi)_{\text{expl}} = 0)$. En dominios cerrados, que no incluyen la punta de la fisura, la integral de la ecuación (15) es idénticamente cero. Lo que le da sentido físico a la integral definida en (16) ya que esta medida resulta independiente del camino de integración Γ .

4.1 Evaluación de las fuerzas configuracionales.

Consideramos ahora el dominio \mathcal{B} de un sólido que incluye a la punta de la fisura. El contorno de \mathcal{B} tiene dos partes, una regular $\partial \mathcal{B}^r$ y una singular $\partial \mathcal{B}^s$ que coincide con la punta de la fisura, y tal que: $\partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}^r \cup \partial \mathcal{B}^s$ y $\partial \mathcal{B}^r \cap \partial \mathcal{B}^s = \emptyset$, he introduzcamos un método de residuos ponderados para evaluar la ecuación de balance de fuerzas configuracionales dada por la ecuación (5):

$$\int_{\mathcal{B}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = \mathbf{0} ; \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V_0 \quad (18)$$

Elegimos V_0 como el espacio de funciones de test suficientemente suaves que son homogéneas en el contorno regular $\partial \mathcal{B}^r$.

Debilitando (18), y aprovechando la definición de las funciones en V_0 , podemos reescribir esta ecuación como sigue:

$$-\left(\int_{\partial \mathcal{B}^s} (\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA\right) = \left(\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\Sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, dV\right) ; \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V_0 \quad (19)$$

Aproximamos por el Método de los Elementos Finitos al campo virtual de desplazamientos, $\delta \mathbf{u} = N^I \delta \hat{\mathbf{u}}^I$, con N^I la función de forma estándar asociada al nodo I de la malla de elementos finitos y $\delta \hat{\mathbf{u}}^I$ el vector de desplazamiento virtual del nodo I . E introduciendo esta aproximación en (19) y realizando las operaciones de montajes elementales, la ecuación (19) se reescribe en forma discreta como:

$$\mathbf{J} \cdot [\delta \hat{\mathbf{u}}] = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\Sigma}_{kj} N_{,k}^I \delta \hat{\mathbf{u}}_j^I \, dV ; \quad \forall \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (20)$$

Donde $[\delta \hat{\mathbf{u}}]$ es el desplazamiento virtual en el nodo correspondiente a la punta de la fisura. Además, la componente \mathbf{e}_1 del vector \mathbf{J} en (20) es la integral-J y es la expresión que se utiliza para la aproximación numérica de esta magnitud.

Es importante observar que el Método de los Elementos Finitos evalúa la fuerza configuracional \mathbf{J} en un sentido débil.

4.2 Método de la integral de dominio (Moran and Shih, 1987)

Para calcular la integral dada por (18), primeramente definimos una función arbitraria de peso $q = q(x)\mathbf{e}_1$. Por otro lado, definimos el dominio Ω como se muestra en la Figura 1. Ω no incluye Ω_i , por lo tanto no incluye el punto singular. Recordamos que siguiendo las suposiciones de la sección previa, en la región regular Ω , el campo $\boldsymbol{\Sigma}$ es de divergencia nula. Ω se define como se muestra en la Figura 1.

El campo $q(x)$ está definido por la expresión siguiente:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } C \cup \mathcal{B} \setminus \Omega \\ 1 & \text{en } x \in \Omega_i \cup \Gamma \end{cases} \quad (21)$$

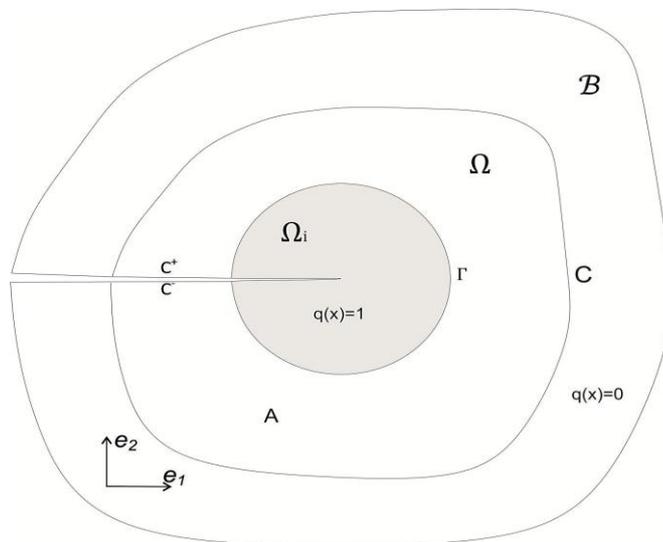


Figura 3: definición de la función $q(x)$

Luego de aplicar el Teorema de Green, resulta:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{q} \, dV = \int_{\partial \Omega} ((\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{e}_1) q \, dV - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_1) \nabla q \, dV = 0 \quad (22)$$

De donde, aplicando (21) en todo el contorno $\partial \Omega$, más la condición de tracción libre

en C^+UC^- , llegamos a la siguiente identidad:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_1) \nabla q \, dV = \int_{\Gamma} ((\mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{e}_1) \, dA \quad (23)$$

Por lo que, de (16), y asumiendo la integración independiente del camino, \mathcal{G} resulta igual al término de la derecha de (23), o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{G} = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_1) \nabla q \, dV = - \int_{B \cup \Omega \cup \Omega_i} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_1) \nabla q \, dV \quad (24)$$

Observar que la integración del término del medio en la ecuación (24) se define sobre Ω y que por la definición del campo q es equivalente a extender la integración en todo el dominio $((B \cup \Omega \cup \Omega_i)$, $q(x)$ se aproxima por el Método de Elementos Finitos (MEF) como:

$$q = N_x^I \hat{q}^I \quad (25)$$

y \mathcal{G} se determina de (24), como un post-proceso muy fácil de evaluar una vez conocidos $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{u} y $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada punto de Gauss.

5 EJEMPLOS.

En esta sección mostramos los resultados obtenidos para la integral-J a partir del método de fuerzas configuracionales y el método de la integral de dominio.

Nos enfocaremos en la importancia y la influencia que implica un buen diseño de malla en los resultados. En el primer ejemplo se muestra la obtención de G_f para una viga entallada a flexión simple (SENB- single edge notched bend) y en el segundo se muestra una probeta compacta normalizada (Compact Specimen), ambos casos analizados en el campo lineal elástico y con hipótesis de deformación plana.

5.1 Viga a flexión simple con fisura de borde (SENB).

Sea un espécimen SENB, con la geometría que se muestra en la [Figura 4](#). Con las siguientes dimensiones: $s = 28$ cm, $w = 8$ cm, $a = 2.50$ cm y espesor unitario.

Se evalúa la integral-J mediante el factor de Intensidad de tensiones K_I :

$$J = \frac{K_I^2}{E'}; \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \text{ en deformación plana} \quad (26)$$

El factor K_I se obtiene de tabla ([Anderson, 2000](#)) (27),(28) E = módulo de Young del material, ν = coeficiente de Poisson del material.

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{w}} f(a/w) \quad (27)$$

$$f(a/w) = \frac{3^s \sqrt{\frac{a}{w}}}{2(1+2\frac{a}{w})(1-\frac{a}{w})^{3/2}} \left[1.99 - \frac{a}{w} \left(1 - \frac{a}{w} \right) \left\{ 2.15 - 3.93 \frac{a}{w} - 2.7 \left(\frac{a}{w} \right)^2 \right\} \right] \quad (28)$$

Donde en (27) y (28) w =altura de la viga, a = longitud de la fisura, B =espesor de la probeta.

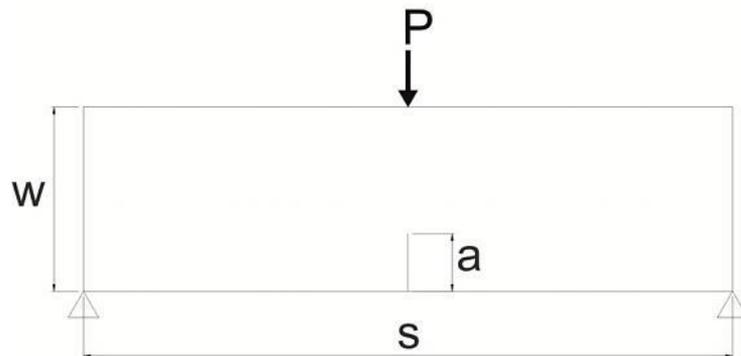
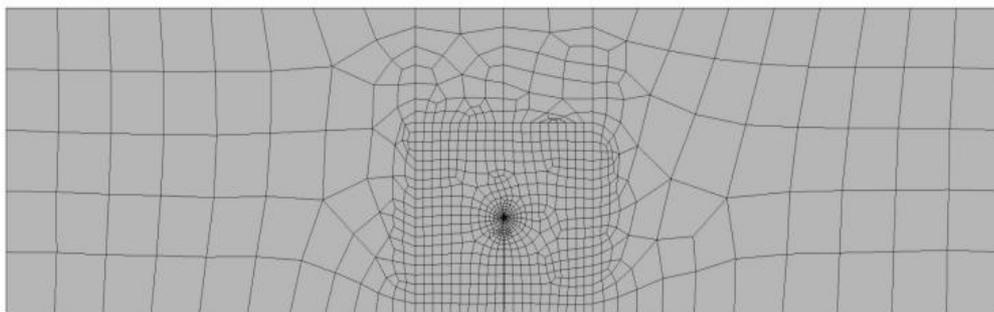


Figura 4: probeta SENB, con dimensiones $a=2.5$ cm; $w=8$ cm, $S=28$ cm y espesor unitario.

Esta geometría se discretiza con una malla de elementos finitos utilizando elementos serendipitos S2 de ocho nodos. La malla se densifica en los alrededores de la punta de la fisura a través de una estructura radial como se muestra en la [Figura 5b](#). Además en la punta de la fisura todos los elementos se colapsan a una forma triangular con los nodos medios de los lados, que convergen al lado colapsado corridos hacia la punta de fisura a la posición αl , ver [Figura 6](#). Variamos el coeficiente α entre 0 y 1 para determinar la posición de ese nodo que y dar mejores resultados numéricos. Es sabido que colocando el nodo en la posición que corresponde a $\alpha=0.25$, el elemento finito cuadrático produce deformaciones $\varepsilon=O(1/\sqrt{r})$, tendiendo a los nodos colapsados, que es la singularidad que se tiene en la solución lineal elástica para la zona que rodea la punta de la fisura ([Anderson, 2000](#)).

El material es elástico lineal con módulo de Young $E = 2.1e6$ (kN/cm²), $\nu=0.30$. Se aplica una carga de 100 kN, de la ecuación (26) se puede observar que los resultados de J están normalizados por E y ν .

En la [Figura 5](#) puede observarse el diseño de la malla en la zona de los alrededores de la punta de la fisura y el tamaño de elemento más pequeño en relación a la altura de la viga w [Figura 5c](#). Claramente, mientras más pequeño el elemento, más altas son las tensiones y deformaciones que se obtienen en los puntos de cuadratura cercanos a la punta de la fisura.



a)

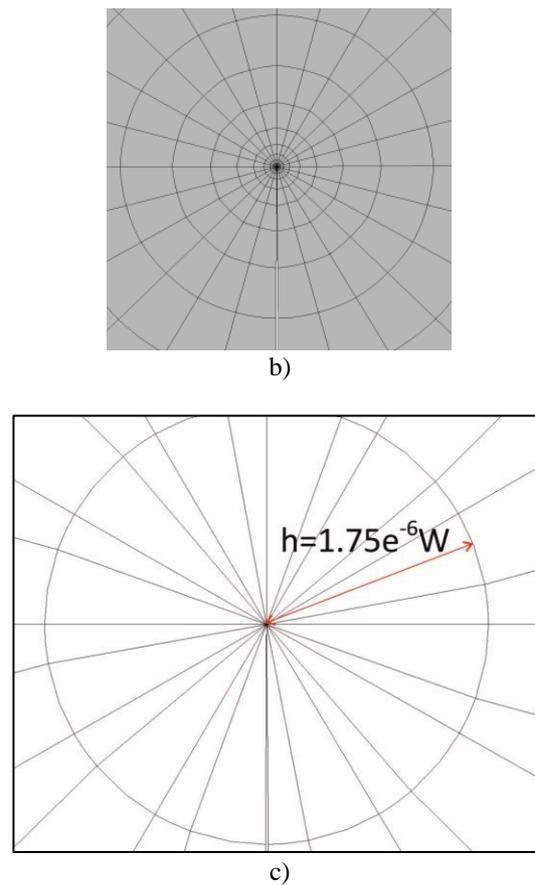


Figura 5: Malla de elementos finitos sobre probeta SENB. a) Vista general de la malla, b) concentración radial de elementos hacia la punta de la fisura; c) relación de tamaño de elemento más pequeño en la punta de la fisura con respecto a W (altura de la viga)

Para este ejemplo se realiza un análisis de convergencia de los diferentes métodos implementados en función de α ver [Figura 6](#).

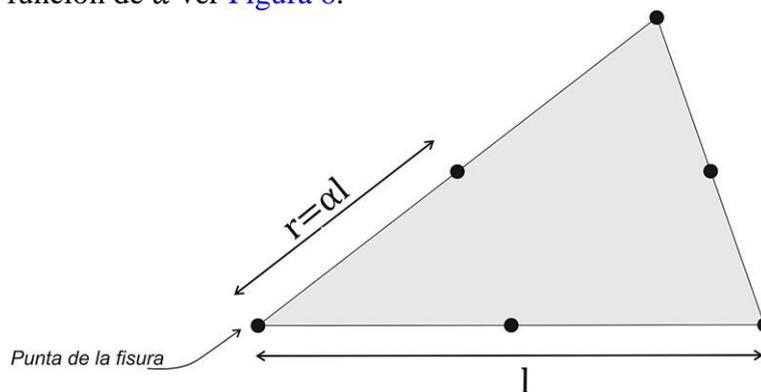
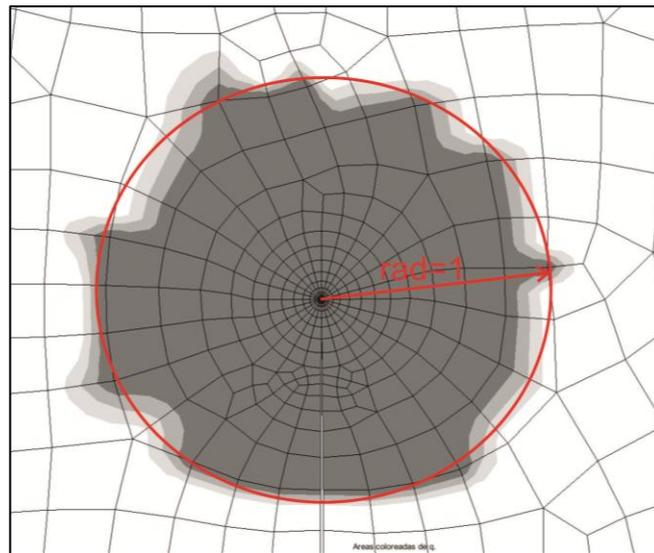
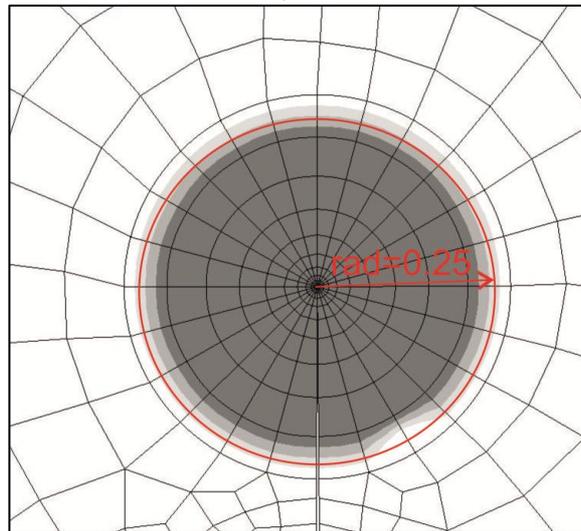


Figura 6: elemento serendipito S2 colapsado a triángulo, puede verse r y l

La metodología basada en la integral de dominio está representado por el dominio de integración delimitado por función dada en la fórmula (21) y que se muestra en la [Figura 7](#). El dominio Ω_i se asigna, sin importar la topología de la malla, fijando la distancia a la punta de la fisura a través de un “radio” asignado [Figura 7](#).



a)



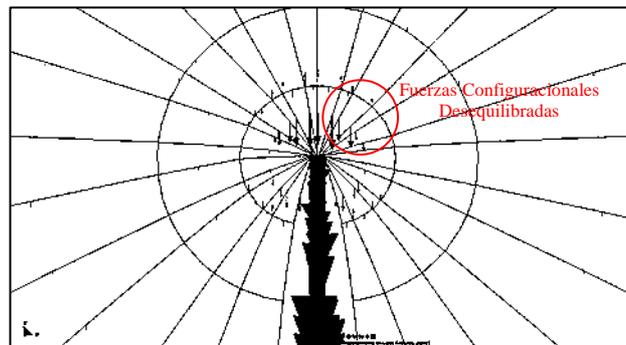
b)

Figura 7: .a) radio=1, b) radio = 0.25

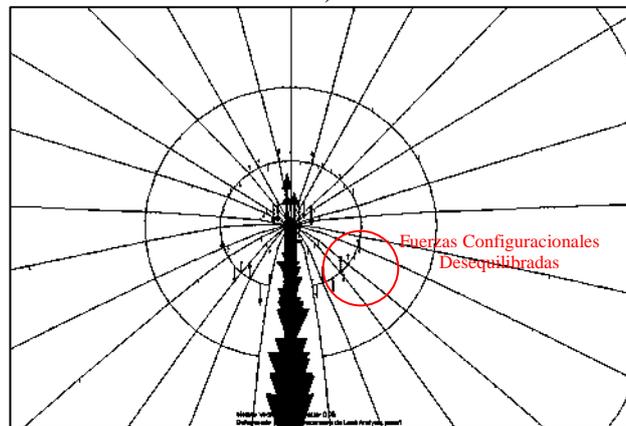
Las fuerzas configuracionales dadas por (20) se muestran en la [Figura 8](#). Las fuerzas de módulo más significativo son las que aparecen en la punta de la fisura, sumando las componentes en dirección contraria a la propagación de la fisura se obtiene el valor de G . Además, este método nos aporta un índice de la calidad de la discretización debido a (17), ya que las únicas fuerzas configuracionales que deben permanecer son las que aparecen en la punta de la fisura, quedando el resto de fuerzas que aparecen en el interior del cuerpo como un residuo, este fenómeno está relacionado en forma directa con la topología de la malla y con la sensibilidad con que se resuelve el problema. Dicho de otro modo el residuo de las fuerzas configuracionales en los nodos internos del dominio dan una idea del nivel de error introducido por la discretización de la malla de elementos finitos al surgir fuerzas no equilibradas en el interior del cuerpo que deberían ser nulas.

En la [Figura 8](#), se muestra el comportamiento de las fuerzas configuracionales para distintas posiciones de los puntos medios de los elementos colapsados donde se observa que para

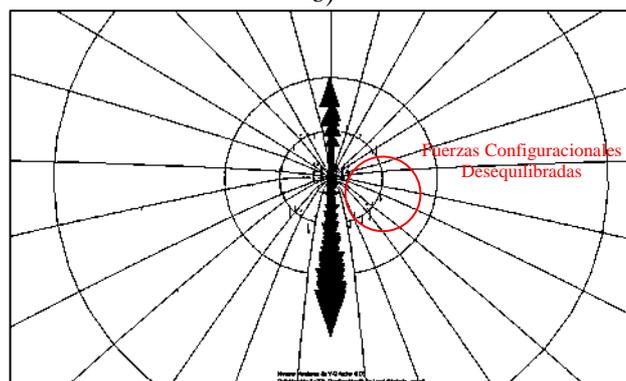
$r/l=0.25$ se obtiene un mínimo desequilibrio de las fuerzas configuracionales en el interior del cuerpo y en los nodos de la vecindad de la punta de la fisura.



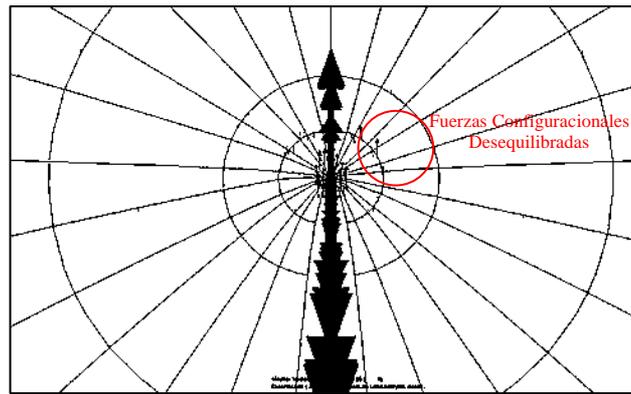
a)



b)



c)



d)

Figura 8: Comportamiento de las fuerzas configuracionales según distintos valores de r/l . a) $r/l=0.60$; b) $r/l=0.40$; c) $r/l=0.30$ y d) $r/l=0.25$

En la Figura 9 se muestra la convergencia de los dos métodos para este ejemplo en función de la posición de los nodos medios de los lados de los elementos.

Se observa que el valor más exacto se consigue para los nodos en la posición $r/l = 0.25$ con una error frente al valor analítico de 2.23 % para valores menores de la relación r/l el valor de obtenido a través las fuerzas configuracionales cae drásticamente a un valor menor al 50% para la relación $r/l=0.15$. Para valores mayores a 0.25 el error aumenta hasta un 9.09 % para la relación $r/l=0.60$.

El método de la integral de dominio muestra no ser demasiado influenciado por la posición de los nodos en general aunque se obtuvo el valor más exacto para $r/l=0.30$.

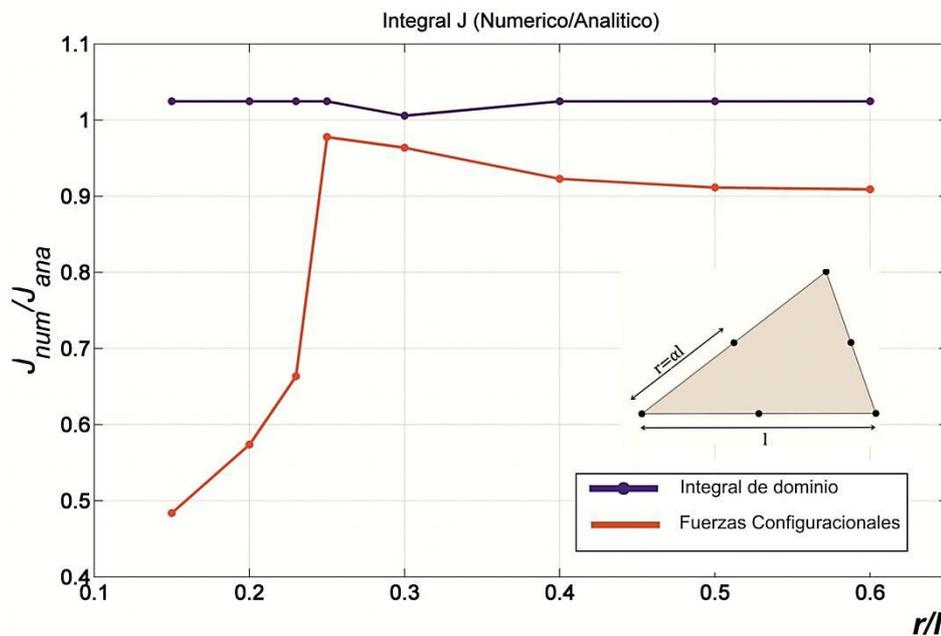


Figura 9: Comparación para el valor de la integral-J obtenido por los métodos de integración y fuerzas configuracionales en función de la relación r/l . El método de las fuerzas configuracionales nos brinda información sobre los puntos en donde se obtiene el mejor valor de la integral-J.

5.2 Probeta compacta

Analizamos seguidamente el modelo de una probeta compacta. La probeta tiene la geometría que se muestra en la [Figura 10](#), cuyas dimensiones para este caso son $w=5$ cm, $a=2,5$ cm y espesor unitario. El material es lineal elástico con las siguientes características: modulo de Young $E = 2.1e6$ (kN/cm²), $\nu=0.30$.

En este caso se cotejan los valores obtenidos numericamente para tres mallas con el valor analítico dados como en el caso anterior por formulas de tablas dadas por (26), (27) y (29). El diseño de la malla de elementos finitos (serendipitos S2) responde a características similares a la del ejemplo anterior, mayor densidad de elementos en las proximidades de la punta de la fisura distribuidos en forma radial y los elementos que rodean a la punta de la fisura se colapsan en triángulos con los nodos medios de los lados que convergen a los nodos colapsados corridos a $0.25l$.

$$f(a/w) = \frac{2 + \frac{a}{w}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{3/2}} \left[0.88 + 4.64 \left(\frac{a}{w}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 - 5.60 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \quad (29)$$

Donde en (29) w =ancho de la probeta; a = longitud de la fisura.

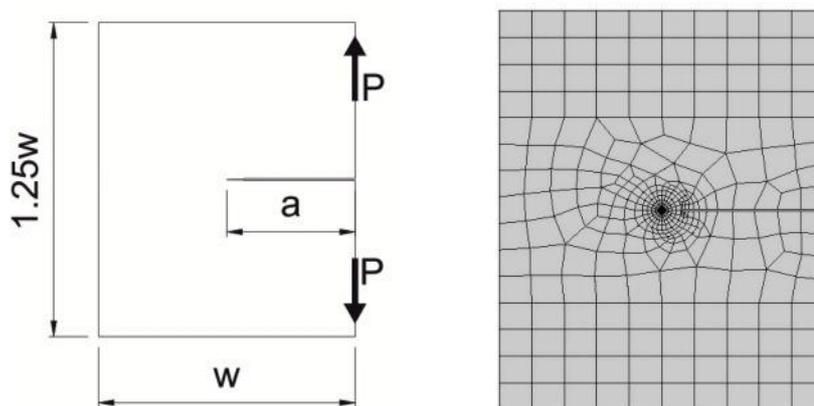
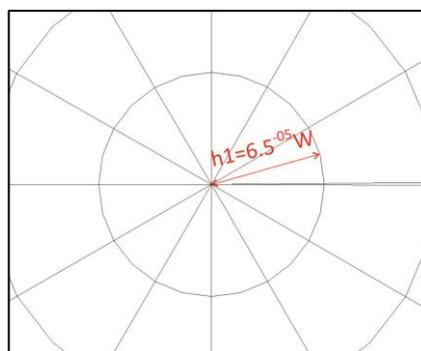


Figura 10: Probeta compacta; izq: esquema de CI; der: modelo discreto con malla FEM

En la [Figura 11](#), se muestran los tamaños mas pequeños de elementos que convergen a la punta de la fisura.



a)

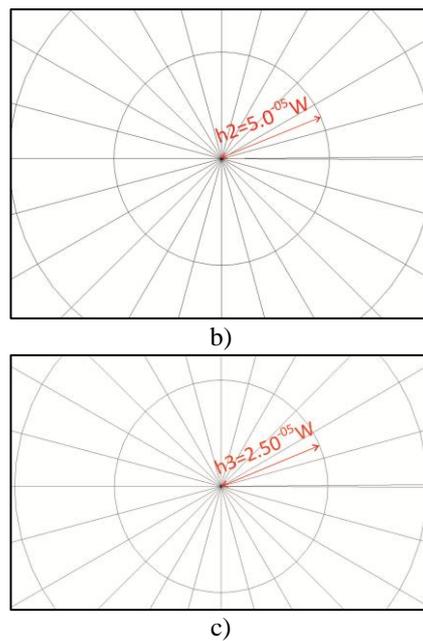


Figura 11: Tamaño de elementos finitos más pequeños utilizados en el ejemplo (relación con la dimensión w de la probeta), a) malla 1; b) malla 2, c) malla 3

En este modelo se analiza la convergencia de los dos métodos introducidos anteriormente para cada una de las mallas mostradas en función de la cantidad de elementos de cada malla.

La curva de la figura [Figura 12](#) muestra los resultados obtenidos para el análisis mencionado.

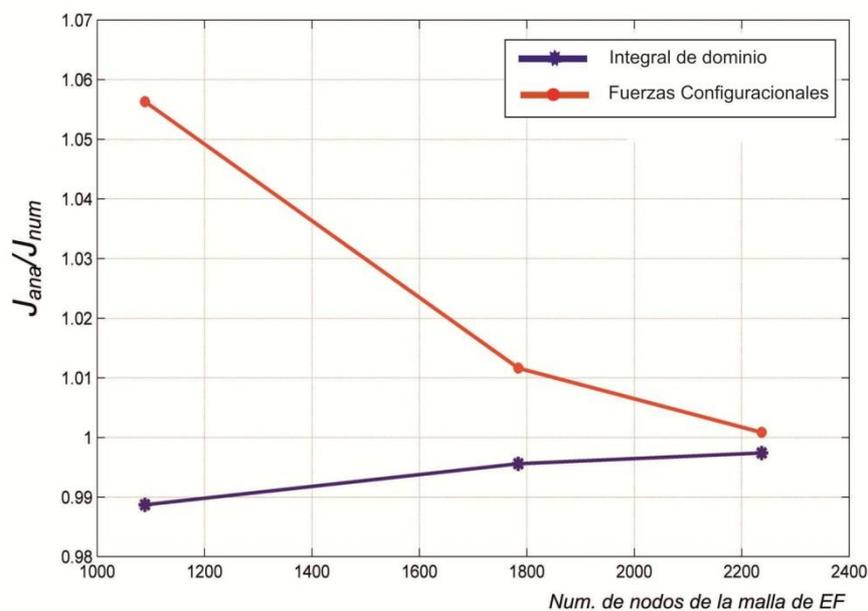


Figura 12: Resultados de los dos métodos presentados en este trabajo en función de la cantidad de nodos de las distintas mallas de elementos finitos serendipitos S2.

Para este caso, ambos métodos convergen al mismo valor, se observa que el método de fuerzas configuracionales nos brinda información mas sertera de la calidad de discretización.

Este fenómeno puede observarse en la [Figura 13](#) en la que se muestran las fuerzas configuracionales para las tres mallas en la punta de la fisura. Las fuerzas predominantes son las que intervienen en el valor de G , mientras que las de menor valor circundantes son las desequilibradas que por error de discretización no son nulas. El comportamiento observado es que a medida que se concentran elementos en la región de la punta de la fisura las fuerzas desequilibradas (residuos de discretización) se reducen y las fuerzas, que intervienen en forma directa en el valor de G , se hace mas importantes, es decir se disminuyen los valores residuales y se mejora el valor de interes, tal cual se refleja en la curva de la [Figura 12](#).

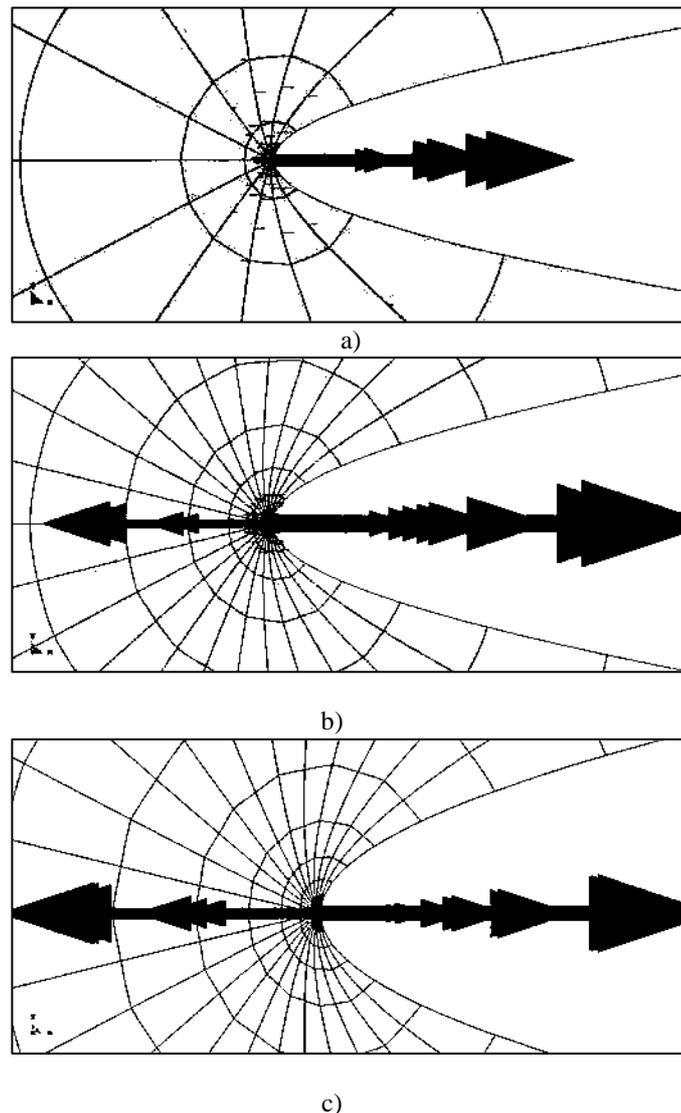


Figura 13: Fuerzas configuracionales en la punta de la fisura de una probeta compacta en distintas mallas (elementos finitos S2). a) Malla1, b) Malla2 y c) Malla3. Muestra del aumento en la densidad de elementos en la zona de la punta de la fisura y la disminución de fuerzas residuales a medida que la malla se refina.

Otro análisis que se hizo fue el de reemplazar los elementos serendipitos S2 manteniendo la topología de cada malla con elementos finitos Q1 (lineales) a fin de tener una idea de convergencia para dichos elementos.

Para realizar dicho análisis se tomaron las tres mallas anteriores, con la misma forma y con el mismo colapso de los elementos rectangulares a triángulos en la punta de la fisura.

Si bien no se realizó un análisis exhaustivo por grados de libertad de la malla, se hizo un análisis en función de la cantidad de nodos, los resultados de este se muestran en la [Figura 14](#). En donde vemos que en un principio ambos métodos tienden a converger con buenos resultados (malla 1 y 2), sin embargo al aumentar la cantidad de elementos (malla 3), la curva tiende a ser horizontal es decir en primera instancia nos da la sensación que llega a un valor alcanzable y este se mantendría a pesar de aumentar la cantidad de elementos.

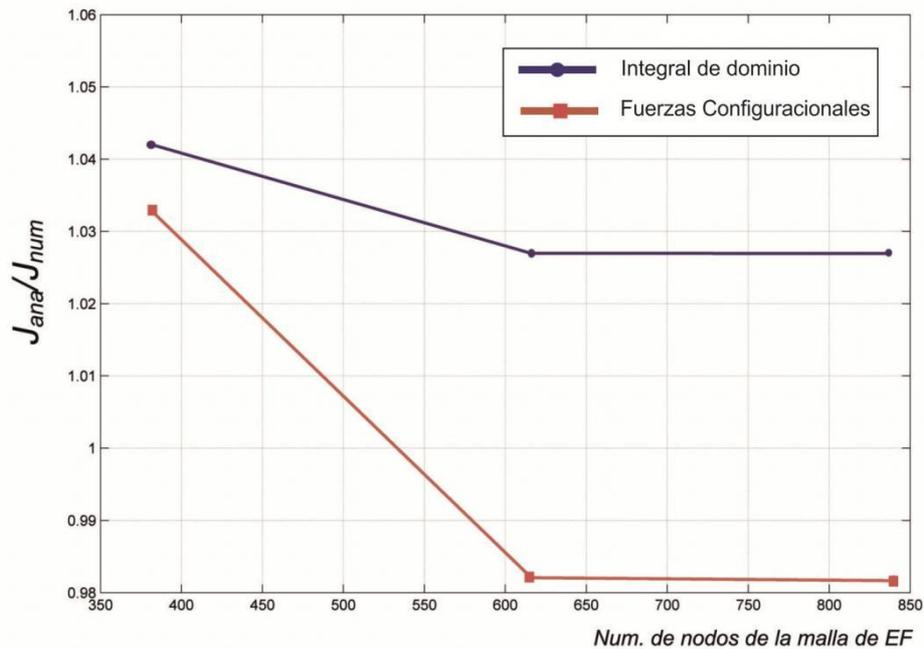
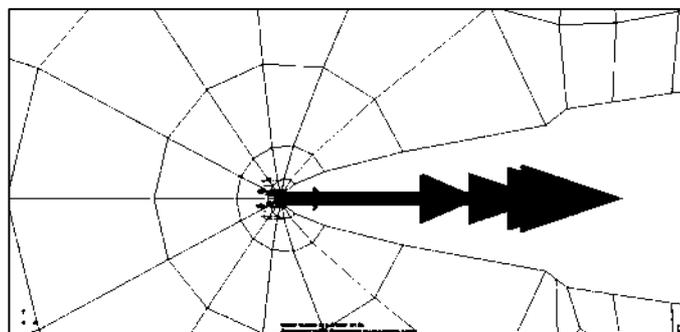


Figura 14: Convergencia de los métodos, para tres mallas de elementos finitos lineales Q1.

La [Figura 15](#), muestra las fuerzas configuracionales en la punta de la fisura, se observa una mayor concentración de las mismas en la punta de la fisura al no tener nodos intermedios este tipo de elementos presenta menos residuos en las proximidades de la punta, tal como sucede con los S2, aunque este último demuestra tener mejor convergencia al valor analítico a través de ambos métodos.



a)

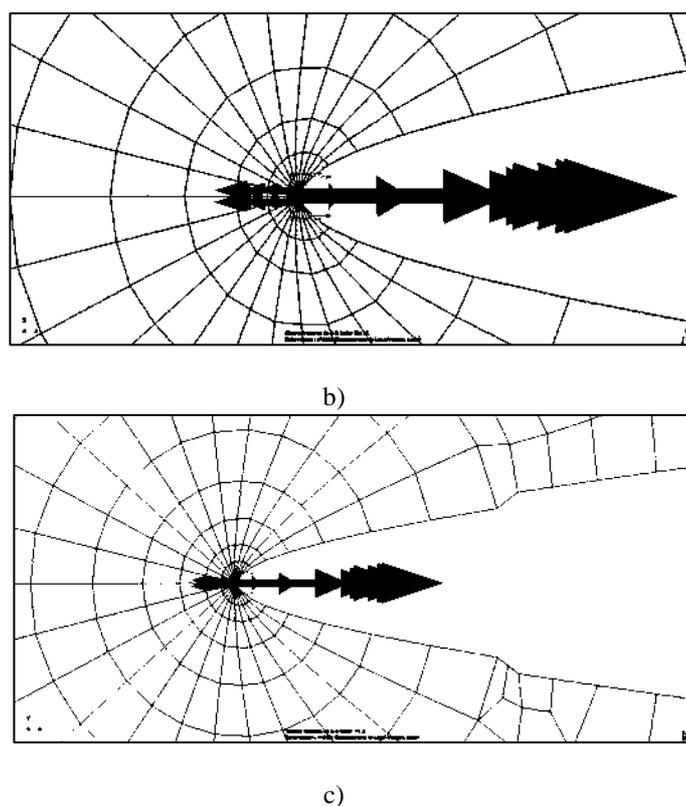


Figura 15: Fuerzas configuracionales en la punta de la fisura para mallas de elementos finitos Q1 a) Malla1, b) Malla2 y c) Malla 3. Las mallas van aumentando la densidad de elementos hacia la punta de fisura.

6 CONCLUSIONES

Se han presentado dos metodologías numéricas para evaluar el parámetro integral-J. Ambas están íntimamente relacionadas con el concepto del tensor de tensiones de Eshelby.

Se ha presentado la validación de los resultados mediante dos ensayos estándar de la literatura para problemas 2D. Generalizar ambas metodologías a 3D resulta directo. Concluimos que para los ejemplos que presentamos, se obtuvieron valores aceptables con ambos métodos.

El método basado en la determinación de las fuerzas configuracionales provee mayor información que el método basado en la integral de dominio y a un costo computacional similar. Esto es, porque las fuerzas configuracionales dan un indicio de la calidad de la malla de elementos finitos utilizada, mediante la magnitud de las fuerzas configuracionales desequilibradas que aparecen en los nodos internos.

7 REFERENCIAS.

Gurtin M.E. *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*. Springer: Berlin, New York.

Mueller R., Kolling S., Gross D. On configurational forces in the context of the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2002; 53:1557–1574.

Ortiz J.E., Cisilino A.P., Oteglí J.L. Calculo del Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras de interfase 3D, aplicando la integral de energía de dominio y el método de los elementos de contorno. *Mecánica Computacional vol.XXI*, pp.1032-1044. Octubre 2002

Anderson T.L. *Fracture Mechanics Fundamentals and applications*. CRC Press. Second Edition. 2000

Steinmann P. Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics I. *International Journal of Solids and Structures* 37. March 2000.

Steinmann P. Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics II. *International Journal of Solids and Structures* 38. September 2000.

Moran B., Shih C.F. Crack tip associated domain integrals from momentum and energy balance. *Eng. Frac. Mech.*, 27, (1987), 6, pp: 615-642.

Mueller R., Maugin G.A. On material forces and finite element discretizations, *Comp. Mech.*, 29, (2002), pp. 52-60.

Oliver J., Agelet C. Mecánica de Medios Continuos. *Edición UPC, Barcelona, 2000.*