

IMPLEMENTACIÓN DEL ACOPLAMIENTO TERMO-MECÁNICO EN PROCESOS DE CONFORMADO MASIVO DE METALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE LAS PSEUDO-CONCENTRACIONES

Miguel A. Cavaliere, Marcela B. Goldschmit y Eduardo N. Dvorkin

Centro de Investigación Industrial, FUDETEC
Av. Córdoba 320, CP 1054, Buenos Aires, Argentina
<http://www.fudetec.com.ar>

Palabras Clave: Elementos Finitos, Conformado de Metales, Acoplamiento Termo-Mecánico, Formulación de Flujo, Método de las Pseudo-Concentraciones..

Resumen. En publicaciones previas, los autores han presentado una formulación para modelar procesos de conformado masivo de metales basada en la formulación de flujo (modelo de material rígido-viscoplástico) y en el método de las pseudo-concentraciones. La formulación resultante emplea una descripción euleriana del movimiento dentro de una malla fija de elementos finitos evitando efectuar los procedimientos de remallado requeridos cuando se utiliza una descripción lagrangeana del movimiento. Dicha formulación fue implementada en el código de elementos finitos METFOR y fue, por ejemplo, aplicada exitosamente al modelado del proceso de laminación en caliente de chapas de acero. Sin embargo, en ese caso se asumió como hipótesis de modelado una condición isotérmica con lo cual no es posible tener en cuenta en el modelo el acoplamiento termo-mecánico que, en este proceso, se manifiesta fundamentalmente a través de la energía de deformación plástica que en su mayor parte se transforma en calor y la dependencia con la temperatura de la resistencia a la deformación del material. En ese sentido y con el objetivo de mejorar la capacidad predictiva del modelado de los procesos de conformado masivo de metales, en este trabajo se presenta una implementación del acoplamiento termo-mecánico utilizando el método de las pseudo-concentraciones. En particular, se describe la metodología empleada para imponer las condiciones de borde de flujo de calor sobre la superficie libre obtenida aplicando el método de las pseudo-concentraciones y se presentan los resultados de la experimentación numérica efectuada para cuantificar el error de las aproximaciones heurísticas efectuadas.

1 INTRODUCCIÓN

El modelado de los procesos industriales de conformado de metales comprende, básicamente, la determinación del estado de deformación del material y de las tensiones desarrolladas en el mismo con el objetivo de predecir, por ejemplo, la forma del producto procesado, la magnitud de las fuerzas que deben soportar las herramientas de conformado, la potencia consumida, etc. En la actualidad, el modelado mediante elementos finitos de los procesos de conformado masivo de metales (forja, extrusión, laminación, etc.) constituye una herramienta de análisis imprescindible para la optimización de estos procesos. Su utilización en aplicaciones industriales se ha generalizado gracias al constante aumento de la potencia de cálculo disponible sumado a las mayores exigencias de calidad y productividad.

En la década del 70 fue propuesta la formulación de flujo¹ la cual permite resolver, con gran eficiencia computacional, aquellos problemas de conformado de metales en los cuales es posible despreciar las deformaciones elásticas y no se requiere modelar la restitución elástica ni las tensiones residuales. Muchos modelos se han desarrollado, desde ese entonces, basados en esta formulación y en varios casos se ha optado por utilizar una descripción lagrangeana en la cual la malla de elementos finitos se deforma conjuntamente con el material. Esta elección tiene el inconveniente de que requiere el uso y el desarrollo de estrategias de remallado automático² para evitar que la excesiva distorsión de los elementos finitos debida a las grandes deformaciones que deben modelarse, deteriore la calidad de los resultados o impida la prosecución del cálculo.

Las ventajas de adoptar una descripción euleriana, en la cual el material fluye a través de una malla fija de elementos finitos, son obvias cuando se utiliza la formulación de flujo. Pero, en ese caso, se debe enfrentar, entre otras, la dificultad de determinar la evolución de la superficie que define la forma del producto. Una de las alternativas propuestas para implementar la formulación de flujo eulerianamente es la técnica de las pseudo-concentraciones³. Por las dificultades inherentes a su implementación computacional esta técnica no ha tenido, hasta ahora, mucha difusión.

En publicaciones previas⁴, los autores han presentado una formulación para modelar procesos de conformado masivo de metales basada en la formulación de flujo (modelo de material rígido-viscoplástico) y en el método de las pseudo-concentraciones. Dicha formulación fue implementada en el código de elementos finitos METFOR y fue, por ejemplo, aplicada exitosamente al modelado isotérmico del proceso de laminación en caliente de chapas de acero⁵.

En los procesos de conformado masivo de metales la evolución térmica y metalúrgica del material que se está conformando determinan las fuerzas de conformado y la geometría del producto por lo que se necesita incorporar estos acoplamientos en los modelos^{6,7,8}. Como un primer paso en este sentido, en el presente trabajo se presenta una estrategia para resolver problemas acoplados termo-mecánicamente usando el método de las pseudo-concentraciones.

2 FORMULACIÓN DE FLUJO VÍA LA TÉCNICA DE LAS PSEUDO-CONCENTRACIONES

El planteo se basa en una descripción euleriana según la cual el material fluye dentro de una malla de elementos finitos fija o que se desplaza con una velocidad arbitraria impuesta por el analista. Para la determinación de las superficies libres se define una variable escalar auxiliar “ c ”, denominada pseudo-concentración, cuya distribución espacial indica la presencia o ausencia

de material real. Por ejemplo, en un punto cualquiera de la malla

$c \geq 0$ indica la presencia de material real mientras que

$c < 0$ indica que no hay material real en ese punto.

La solución del problema viene dada a través del campo de velocidades y de la distribución de “pseudo-concentraciones” que deben satisfacer, respectivamente, las ecuaciones de equilibrio y de transporte que se presentan a continuación.

2.1 Ecuaciones de equilibrio

Asumiendo que la distribución de pseudo-concentraciones es conocida, el campo de velocidades en la región que corresponde al material real debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio. Utilizando el principio de las potencias virtuales tenemos que:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dv = \mathcal{R} \quad (1)$$

donde:

σ_{ij} : son las componentes cartesianas del tensor de tensiones de Cauchy,

$\dot{\epsilon}_{ij}$: son las componentes cartesianas del tensor de velocidades de deformación,

V : es el volumen ocupado por el material real y

\mathcal{R} : son las potencias virtuales de las fuerzas exteriores.

Al considerar que las deformaciones elásticas son despreciables el comportamiento del material puede ser descrito utilizando una relación constitutiva viscoplastica. Siguiendo los trabajos de ⁹ y ¹ la descripción del comportamiento del material se completa usando una ley de fluencia de Von Mises y una ley de flujo asociativa. Por ejemplo, para el caso de un material isótropo perfectamente plástico, se obtiene la siguiente relación constitutiva

$$s_{ij} = 2 \mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad \mu = \frac{\sigma_y}{3 \dot{\epsilon}} \quad \dot{\epsilon} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

siendo σ_y la tensión de fluencia del material. La viscosidad μ tiende a infinito en aquellas zonas donde $\dot{\epsilon}$ tiende a cero por lo cual a los efectos de los cálculos numéricos es necesario limitar la viscosidad asumiendo que $\mu \leq \mu_{corte}$. De esta forma en aquellas regiones que no han entrado en fluencia (comportamiento rígido o casi rígido) la viscosidad tiene un valor finito permitiendo el cálculo de tensiones.

En las expresiones anteriores se utilizan las componentes desviadoras e hidrostáticas de los tensores $\underline{\underline{\sigma}}$ y $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ de acuerdo con la siguiente notación (se asume la convención de que índices repetidos indican una sumatoria) :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} p \quad \text{siendo} \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_v \quad \text{siendo} \quad \dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} \quad (4)$$

Como consecuencia de la función de fluencia que se utiliza y de la hipótesis de ley de flujo asociativa, la deformación resulta incompresible, es decir,

$$\dot{\epsilon}_v = 0. \quad (5)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, la ecuación 1 puede ser escrita de la siguiente forma

$$\int_V 2 \mu \dot{\epsilon}'_{ij} \delta \dot{\epsilon}'_{ij} dv + \int_V p \delta \dot{\epsilon}_v dv = \int_V f_i^v \delta \dot{u}_i dv + \int_{S_\sigma} t_i \delta \dot{u}_i ds \quad . \quad (6)$$

donde

$\dot{\mathbf{u}}$: es el vector de velocidades del material,

\mathbf{f}^v : es el vector de fuerzas externas volumétricas (en el cual, según lo discutido arriba, no están incluidas las fuerzas de inercia) y

\mathbf{t} : es el vector de fuerzas externas superficiales.

En las zonas de la malla donde la pseudo-concentración indica que no hay material ($c < 0$) se asume una viscosidad artificial varios órdenes de magnitud menor que la del material real y de este modo se extienden las integrales que aparecen en la ecuación 6 a todo el dominio de cálculo³.

La discretización mediante el método de los elementos finitos de la ecuación 6 suele efectuarse mediante una formulación $\dot{\mathbf{u}} - p$ o por penalización¹⁰. La segunda integral de la ecuación 6 puede considerarse como el resultado de la imposición de la condición de incompresibilidad ($\dot{\epsilon}_v = 0$) usando el método de los multiplicadores de Lagrange, donde p es el correspondiente multiplicador de Lagrange. Por lo tanto, a los efectos de evitar tener a la presión como variable independiente en la formulación y evitar también las dificultades numéricas producidas por la penalización clásica, se ha optado por emplear la técnica de los lagrangeanos aumentados¹¹ para imponer la incompresibilidad. Mediante esta técnica, a diferencia de la penalización clásica, se construye a la presión en forma iterativa (ver ecuación 8d) a la par que se impone la condición de incompresibilidad. Este proceso iterativo se detiene cuando la norma que mide la incompresibilidad alcanza la tolerancia deseada.

Para explicar la implementación del procedimiento de los lagrangeanos aumentados se analiza en primer término un caso simple correspondiente a un flujo de Stokes de un fluido newtoniano (viscosidad constante). A partir de valores de arranque $s_{ij}^{(k-1)}$; $\dot{u}_i^{(k-1)}$; $p^{(k-1)}$; y utilizando en la ecuación 6 la técnica de lagrangeanos aumentados se obtiene:

$$\int_V 2 \mu \Delta \dot{\epsilon}'_{ij} \delta \Delta \dot{\epsilon}'_{ij} dv + \int_V \kappa \Delta \dot{\epsilon}_v \delta \Delta \dot{\epsilon}_v dv = \int_V f_i^v \delta \Delta \dot{u}_i dv + \int_{S_\sigma} t_i^* \delta \Delta \dot{u}_i ds - \int_V s_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta \dot{\epsilon}'_{ij} dv - \int_V \left(p^{(k-1)} + \kappa \dot{\epsilon}_v^{(k-1)} \right) \delta \Delta \dot{\epsilon}_v dv \quad (7)$$

donde κ : coeficiente de penalización.

Cada vez que se resuelve la ecuación 7 se actualizan las variables de la siguiente manera:

$$\dot{u}_i^{(k)} = \dot{u}_i^{(k-1)} + \Delta \dot{u}_i ; \quad (8a)$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij}{}^{(k)} = \dot{\epsilon}'_{ij}{}^{(k-1)} + \Delta \dot{\epsilon}'_{ij} ; \quad (8b)$$

$$\dot{\epsilon}_v^{(k)} = \dot{\epsilon}_v^{(k-1)} + \Delta \dot{\epsilon}_v ; \quad (8c)$$

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} + \kappa \dot{\epsilon}_v^{(k)} ; \quad (8d)$$

iterando hasta alcanzar valores suficientemente bajos de $\dot{\epsilon}_v^{(k)}$ y $\Delta \dot{u}_i$ (por ejemplo, $\left\| \dot{\epsilon}_v^{(k)} \right\|_{\infty} \leq 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ para problemas en que las velocidades características de deformación son mayores que 1.0 s^{-1} y $\left\| \Delta \dot{\mathbf{u}} \right\|_2 \leq 10^{-3} \left\| \dot{\mathbf{u}} \right\|_2$). Mediante la última de las ecuaciones anteriores se construye el campo de presiones iterativamente .

Para los casos de modelos de material rígido-viscoplásticos en los cuales la viscosidad no es constante, en el mismo ciclo iterativo se resuelven las no-linealidades provenientes de la relación constitutiva y se construye el campo de presiones.

Para modelar problemas bidimensionales se ha desarrollado el elemento QMITC-3F que está basado en la interpolación de tres campos: velocidades, velocidades de deformación y presiones. Un análisis del elemento QMITC-3F, siguiendo las líneas expuestas en¹², muestra que el elemento no presenta modos rígidos espurios, satisface el "Patch Test" de Irons y no bloquea en situaciones incompresibles¹⁰.

2.2 Ecuaciones de transporte

Conocido el campo de velocidades la distribución de la "pseudo-concentración" c se calcula integrando las siguientes ecuaciones de transporte:³

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla c = 0 \quad (\text{caso estacionario}) , \quad (9a)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_M) \cdot \nabla c = 0 \quad (\text{caso transitorio}) \quad (9b)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}_M$ es una velocidad de malla definida arbitrariamente.

Asimismo las deformaciones plásticas equivalentes $\bar{\epsilon}$ se obtienen a partir de la velocidad de deformación efectiva $\dot{\epsilon}$ integrando las siguientes ecuaciones de transporte:

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\epsilon} = \left\langle \frac{c}{|c|} \right\rangle \dot{\epsilon} \quad (\text{caso estacionario}) , \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_M) \cdot \nabla \bar{\epsilon} = \left\langle \frac{c}{|c|} \right\rangle \dot{\epsilon} \quad (\text{caso transitorio}) \quad (10b)$$

donde $\langle . \rangle$ es el corchete de Macauley, que toma el valor de su argumento si es positivo y el valor cero si el argumento es negativo (lo cual en el caso analizado significa ausencia de material real).

Para la integración de las ecuaciones de transporte 9 y 10, que contienen un término advectivo, se utiliza la técnica SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin)¹³. En los casos transitorios las ecuaciones de transporte se integran utilizando algoritmos implícitos¹⁰.

2.3 Contacto con las herramientas de conformado

Para resolver el problema del contacto entre las herramientas de conformado y el material procesado se implementaron¹² condiciones de borde dependientes del valor de la pseudo concentración, c , en aquellos nodos ubicados sobre el contorno de la herramienta de conformado, de ahora en más denominados “nodos de contacto”, de format tal que si:

$$c < 0 \implies \dot{U}_n = \text{libre} \quad (11)$$

$$c \geq 0 \implies \dot{U}_n = 0 \quad (12)$$

donde \dot{U}_n es la componente de la velocidad del material procesado normal a la superficie de la herramienta de conformado.

2.4 Modelado del rozamiento

El algoritmo desarrollado para modelar la acción de la fricción no está basado en ninguna conexión cinemática ficticia entre las herramientas de conformado y el material procesado sino únicamente en la aplicación de los esfuerzos friccionales en la zona de contacto.

Para evaluar las tensiones tangenciales debidas a la fricción se utilizan dos modelos distintos (fricción constante y Coulomb) dado que no existe un único modelo que pueda aplicarse en forma general. Cada uno de los modelos brinda una expresión de cálculo para el módulo del esfuerzo tangencial debido a la fricción, τ_f .

Ley de fricción constante:

$$\tau_f = m \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

donde $0 < m < 1$ es el factor de fricción.

Ley de Coulomb:

$$\tau_f = \eta \sigma_{nn} \leq \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

donde η es el coeficiente de fricción y σ_{nn} es la componente normal de la tensión (presión de contacto con la herramienta).

Para calcular los esfuerzos friccionales superficiales, \underline{t}_f , que se desarrollan en la zona de contacto entre el material procesado y las herramientas de conformado se adoptó la siguiente expresión¹⁴

$$\underline{t}_f = -\tau_f \frac{\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r}{\|\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r\|_2} \quad (15)$$

donde $\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r = \underline{\dot{\mathbf{u}}} - \underline{\dot{\mathbf{u}}}_H$ es la velocidad relativa entre el material procesado y la herramienta de conformado. Es importante aclarar que tanto la velocidad del material, $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$, como la velocidad de la herramienta $\underline{\dot{\mathbf{u}}}_H$ son tangentes a la superficie de contacto, con lo cual \underline{t}_f constituye un esfuerzo tangencial. Aquellos casos en los que la herramienta de conformado tiene una componente de velocidad normal a la superficie de contacto no nula son analizados imponiendo una velocidad

arbitraria, $\underline{\dot{\mathbf{u}}}_M$, a la malla de elementos finitos (ver ecuaciones 9, 10). A los efectos de evitar dificultades numéricas cuando $|\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r| \rightarrow 0$, la ecuación 15 es reformulada de la siguiente manera⁴:

$$\underline{\mathbf{t}}_f = \mu_f \underline{\dot{\mathbf{u}}}_r \quad \text{donde} \quad \mu_f = - \frac{\tau_f}{|\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r|} \quad (16)$$

a los efectos de regularizar el problema considerando que $\mu_f \leq \mu_f^{corte}$.

3 TRANSFERENCIA DE ENERGÍA TÉRMICA

La ecuación de transferencia de energía térmica para un material isótropo que se está deformando plásticamente puede escribirse de la siguiente manera (una discusión completa del planteo de esta ecuación basada en los principios de la termodinámica y orientada a los procesos de conformado de metales puede encontrarse en¹⁴):

$$\rho C \dot{T} = \underline{\nabla} \cdot (k \underline{\nabla} T) + \beta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \quad (17)$$

donde

ρ : es la densidad del material,

C : es el calor específico del material,

k : es la conductividad térmica del material,

\dot{T} : es la derivada material de la temperatura,

β : es un coeficiente cuyo valor esta comprendido en el rango 0.85 y 0.95 (usualmente denominado como Taylor-Quinney) que indica la fracción de la potencia de deformación plástica ($\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$) que es transformada en calor. La fracción remanente $(1-\beta)$ es almacenada en el material y representa la energía asociada con la evolución de la microestructura del material suponiendo que no hay cambios de fase.

Desde el punto de vista matemático se trata de un problema de valores de contorno definido sobre un dominio Ω (de frontera Γ) que requiere fijar la temperatura en por lo menos algún punto de su contorno (Γ_T es la colección de puntos del contorno sobre los que se impone la temperatura como condición de borde). En el caso de que existan partes del contorno en las que no se fija la temperatura ($\Gamma_n = \Gamma - \Gamma_T$) deberá imponerse en dichas regiones la derivada normal de la temperatura, lo que en términos físicos implica imponer condiciones de borde sobre el flujo de calor normal al contorno q_n , dado que de acuerdo con la ley de Fourier resulta:

$$q_n = -k \underline{\nabla} T \cdot \underline{\underline{n}}. \quad (18)$$

El planteo de estas condiciones no presenta dificultades cuando el contorno en cuestión es conocido y coincide con la frontera del dominio de cálculo. En la siguiente sección se presenta la metodología propuesta en la que el contorno es una de las incógnitas del problema.

4 IMPLEMENTACIÓN DEL ACOPLAMIENTO TERMOMECAÁNICO

Con respecto al problema mecánico, en las ecuaciones de equilibrio 6 el acoplamiento termo-mecánico se implementa a través de la dependencia de la relación constitutiva con la temperatura. La existencia de deformaciones térmicas no es tenida en cuenta dado que en los problemas analizados la magnitud de la dilatación no es significativa pues no se está considerando ningún cambio de fase en el material. Sin embargo su consideración dentro del planteo de la formulación de flujo, en caso de ser necesaria, es posible y ya ha sido implementada conservando la simetría de los sistemas de ecuaciones lineales resultantes¹⁵.

Para implementar el problema térmico en una formulación euleriana, en la ecuación 17 se especializa \dot{T} (de forma análoga a lo hecho en las ecuaciones de transporte 9 y 10) y la potencia de deformación plástica se expresa en términos de la relación constitutiva rígida/viscoplástica (ver ecuación 2) :

$$\rho C \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla T = \nabla \cdot k \nabla T + \left\langle \frac{c}{|c|} \right\rangle \beta \sigma_y \dot{\epsilon} \quad (\text{caso estacionario}) \quad , \quad (19a)$$

$$\rho C \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_M) \cdot \nabla T \right] = \nabla \cdot k \nabla T + \left\langle \frac{c}{|c|} \right\rangle \beta \sigma_y \dot{\epsilon} \quad (\text{caso transitorio}). \quad (19b)$$

La presencia (o ausencia) de material real se manifiesta a través del corchete de Macauley $\langle \cdot \rangle$ (presentado en ??) y de una fuerte dependencia (cuyas características se explican más adelante) de las propiedades térmicas con las pseudo-concentraciones.

4.1 Formulación por elementos finitos del problema térmico

Las ecuaciones 19 del problema térmico son en gran medida formalmente similares a las ecuaciones 10 (correspondientes al cálculo de las deformaciones plásticas equivalentes $\bar{\epsilon}$) por lo que se discretizan y se integran usando las mismas técnicas: interpolaciones bilineales, método SUPG y esquemas totalmente implícitos para el caso transitorio.

Las diferencias vienen dadas por el término asociado con la conducción térmica $\nabla \cdot k \nabla T$ (también denominado como término difusivo) y las condiciones de borde correspondientes al flujo de calor (también denominadas como condiciones naturales). Para un problema puramente difusivo y sin generación de energía por unidad de volumen, el método de los residuos ponderados conduce a,

$$\int_{\Omega} w \nabla \cdot k \nabla T \, d\Omega = 0 \quad (20)$$

donde w es una función de peso arbitraria. Integrando por partes usando la identidad de Green resulta

$$- \int_{\Omega} \nabla w \cdot k \nabla T \, d\Omega + \int_{\Gamma} w k \nabla T \cdot \underline{n} \, d\Gamma = 0. \quad (21)$$

Considerando que $w = 0$ en Γ_T y que en Γ_n se encuentra impuesto q_n de acuerdo a 18 resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot k \nabla T \, d\Omega + \int_{\Gamma_n} w q_n \, d\Gamma = 0. \quad (22)$$

El desarrollo anterior sirve de base para la discretización por elementos finitos del problema térmico al permitir reemplazar 20 por 22 en la formulación débil del problema (reduciendo el orden de la misma) e incorporar las condiciones de borde naturales. Notar que en el caso de que Γ_n sea un contorno adiabático no es necesario efectuar ninguna integral sobre dicho contorno.

4.2 Condición de borde adiabática en el interior del dominio

Cuando se aplica el método de las pseudo-concentraciones, la superficie que delimita el material real, F , (definida mediante una isosuperficie de la pseudo-concentración) queda, por lo general, inmersa dentro del dominio de cálculo Ω . Si bien la condición de contorno adiabática queda impuesta "automáticamente" sobre la frontera Γ_n cuando no se impone ninguna condición, ese no es el caso para la superficie de contorno F . Si consideramos la malla de elementos finitos con la cual se ha discretizado Ω veremos que la superficie F define tres categorías de elementos. En la primera categoría se incluye a todos aquellos elementos a los que les corresponde material real, en la segunda categoría a los elementos mixtos (que se encuentran atravesados por F) y finalmente en la tercera quedan los elementos a los que les corresponde únicamente material ficticio. Queda claro que en problemas transitorios estas categorías se actualizan en cada paso de tiempo.

A los efectos de imponer en forma aproximada una condición de borde adiabática sobre F se procede, en los elementos pertenecientes a las categorías 2 y 3, a alterar sus propiedades térmicas (reduciendo sus magnitudes mediante dos divisores: uno para k y otro para ρC , que de ahora en más denominamos *Big1* y *Big2*). Con esto se pretende que el material ficticio actúe como un material "aislante" y con una muy baja capacidad de almacenar energía térmica. En el caso de los elementos mixtos (o sea los pertenecientes a la segunda categoría) se duplicó en cada dirección la cantidad de puntos de integración permitiendo de esta manera una mejor definición de las zonas en las que se alteran las propiedades térmicas mediante los divisores correspondientes.

Con el objetivo de analizar mediante experimentación numérica el efecto de los divisores *Big1* y *Big2* sobre la condición adiabática sobre el contorno F se eligió un problema transitorio unidimensional consistente en una zona de material real que se desplaza a velocidad constante sin intercambiar calor con el medio que la rodea. A los efectos de esta prueba numérica se determinó analíticamente la evolución temporal de un campo de pseudo concentraciones que delimita mediante dos contornos móviles F a la zona de material real en cuestión. Como referencia para las comparaciones numéricas se utiliza el resultado correspondiente a un problema similar pero sin movimiento en el cual el cálculo de la evolución de la temperatura se efectúa tomando como dominio de cálculo únicamente la zona de material real. En la figura 1 se presenta en línea punteada para diversos instantes la distribución de temperatura sobre el dominio completo calculada utilizando la condición adiabática sobre F propuesta en este trabajo y en línea llena la solución de referencia ubicada en la zona donde se encuentra el material real en cada instante considerado. Estos resultados se calcularon usando 250 elementos para discretizar el dominio completo (lo que significa que la zona de material real quedo discretizada con 50 elementos) y un paso temporal tal que el número de Courant, Cr , toma el valor de 1/10 (siendo $Cr = \text{Paso temporal} * \text{velocidad} / \text{Paso espacial}$). En la misma figura se indica la condición inicial adoptada; como condición de borde en el origen se adopta la temperatura inicial. A los

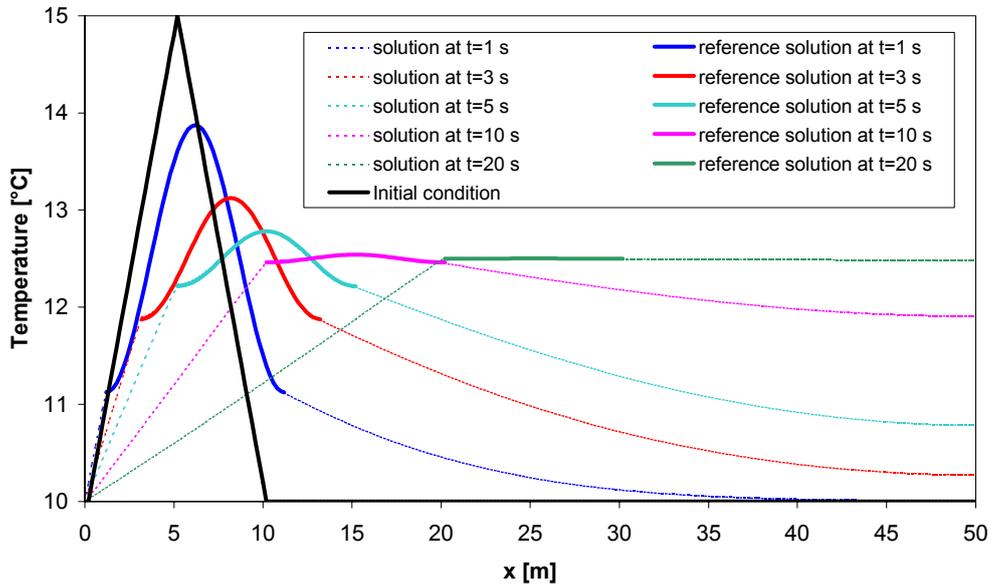


Figura 1: Evolución de la temperatura.

efectos de establecer la condición de contorno adiabática en F se tomó $Big1 = 1000$ y $Big2$ dos órdenes de magnitud mayor. Si bien los cálculos se continuaron para tiempos mayores que los graficados, los resultados se presentan solamente hasta 20 s dado que la temperatura se encuentra prácticamente uniformizada en ese instante del cálculo (tener en cuenta que este tiempo no tiene sentido físico dado que a los efectos de esta experimentación numérica las propiedades térmicas tienen asignados valores arbitrarios constantes). En la figura 1 se observa que hay un buen acuerdo entre ambas soluciones lo que indica que en este caso el error cometido con el esquema propuesto es bajo. Obviamente la magnitud de este error es función de la discretización efectuada y de los divisores $Big1$ y $Big2$ utilizados. En ese sentido en la figura 2 se presentan los resultados calculados utilizando los mismos divisores pero con una menor discretización espacial en la que el paso de cálculo es 5 veces mayor que el caso anterior (además se modifica el paso de cálculo temporal a los efectos de conservar el mismo valor de Cr). Se observa que en este caso la solución calculada usando el esquema propuesto presenta diferencias, observables en la escala del gráfico, respecto de la solución de referencia (la cual también fue recalculada).

A los efectos de mostrar el efecto de los divisores $Big1$ y $Big2$ se repitieron los cálculos correspondientes al caso de menor discretización espacial (donde las diferencias se aprecian con mas facilidad dada la magnitud de las mismas) con cuatro combinaciones distintas de valores. Los resultados se presentan en la figura 3 para los instantes correspondientes a $t=5$ s y $t=20$ s. La primer combinación analizada corresponde al caso en que ambos divisores valen la unidad con lo cual no se impone ningún tipo de condición sobre F resultando una distribución de temperatura que difunde sobre todo el dominio al no haber diferencias entre las propiedades térmicas del material real y el ficticio. En la segunda prueba se altera únicamente la conductividad térmica del material ficticio y se observa un comportamiento de tipo adiabático sobre F (gradientes sobre

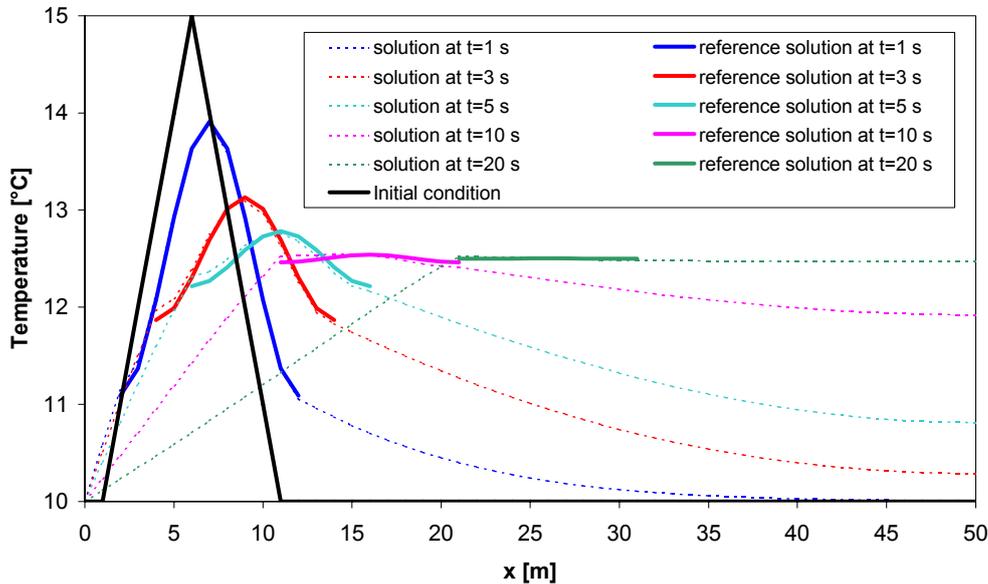


Figura 2: Evolución de la temperatura calculada con menos discretización espacial.

los contornos que tienden a cero en la zona de material real) pero sin embargo la pérdida de energía térmica del material real es importante. Si en cambio se altera únicamente la capacidad térmica del material ficticio no es posible imponer la condición de adiabaticidad sobre F , a pesar de que parezca que se lo está haciendo sobre el contorno derecho del material real: lo que en realidad sucede es que está actuando la condición de borde natural sobre el final del dominio de cálculo ($x=50$ m). Finalmente cuando se aplican ambos divisores se obtiene una respuesta adecuada del esquema propuesto. Si comparamos esta solución con el caso en que únicamente se altera la conductividad térmica del material ficticio se observa que la utilización del divisor de la capacidad térmica redujo sustancialmente la pérdida de energía térmica del material real pero se incrementó el nivel de asimetría de la solución (el cual se puede disminuir aumentando la discretización espacial: comparar figuras 1 y 2).

Para establecer si la condición en que ambos divisores tienen el mismo valor es la más conveniente, se repitieron los cálculos tomando $\text{Big}2=10^j$ con $j=0,1,2,3,4,5,6$ y 7 y manteniendo fijo el valor de $\text{Big}1=10^3$. En la figura 4 se presenta la variación de la energía térmica transcurridos 20 segundos para los distintos casos analizados. Se observa que en el caso en que ambos divisores son iguales la variación de energía térmica es aceptable pero es posible mejorar levemente la situación tomando un valor de $\text{Big}2$ dos órdenes de magnitud mayor que $\text{Big}1$.

4.3 Condición de borde convectiva en el interior del dominio

La transmisión de calor por convección se produce a través de un fluido, generalmente aire o agua, que se encuentra rodeando a la pieza que se está conformando y se representa mediante

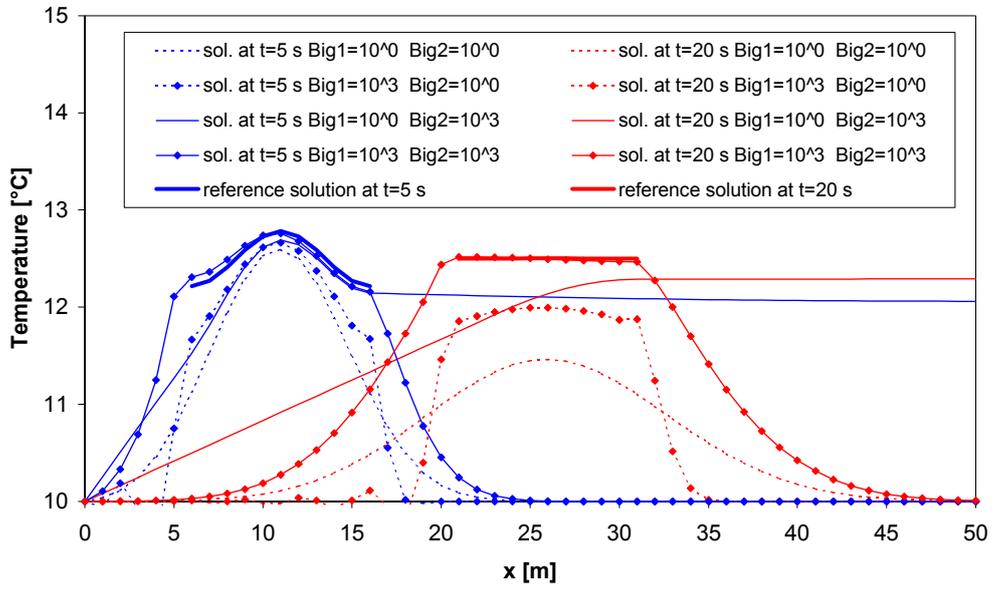


Figura 3: Efecto de los divisores Big1 y Big2.

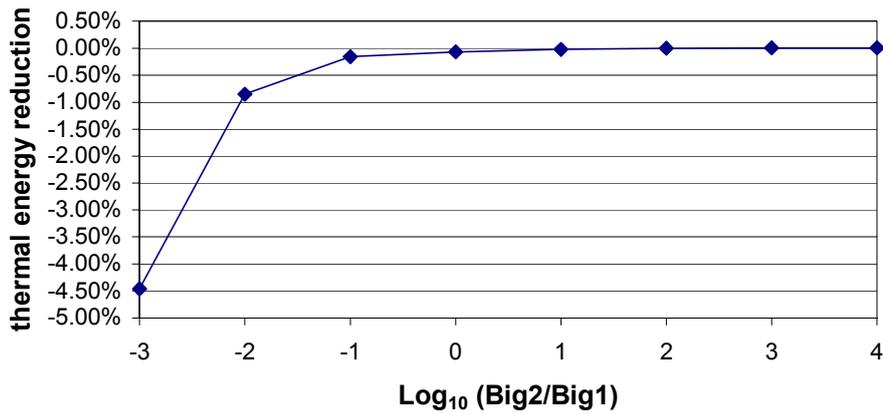


Figura 4: Efecto de la relación Big2/Big1.

la ecuación

$$q_n = h (T - \theta) \quad (23)$$

donde

θ : es la temperatura del medio ambiente con el cual se intercambia calor y

h : es el coeficiente de transferencia térmica.

Otra de las formas más comunes de intercambio de energía es por radiación térmica. Si bien su expresión es distinta es posible representarla usando la misma forma funcional de la ecuación 23 si se define que

$$h = h_r [(T + 273)^2 + (\theta + 273)^2] [(T + 273) + (\theta + 273)] \quad (24)$$

donde θ es la temperatura de la fuente de radiación externa en $^{\circ}C$ y h_r es una función de la constante de Stefan-Boltzmann, de factores de vista geométricos y de la emisividad de las superficies que irradian y absorben energía. En este caso el problema pasa a ser no-lineal, si bien su resolución puede encararse mediante un proceso iterativo propio para el problema térmico, dado que el mismo está incluido dentro de un esquema iterativo (debido a las otras no linealidades del problema termo-mecánico) es factible iterar evaluando h usando las temperaturas de la iteración previa y/o del paso de tiempo anterior en problemas transitorios.

Cuando la condición de borde convectiva se encuentra ubicada sobre el contorno de un elemento finito cualquiera es posible efectuar sobre el mismo la integral que aparece en el segundo término de la expresión 22. Dado que dicha integral queda expresada en términos de las temperaturas nodales $\hat{\mathbf{T}}$ es posible incorporar la condición de borde convectiva al sistema de ecuaciones resultante de la discretización por elementos finitos

$$\mathbf{S} \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F}$$

mediante términos que aportan directamente a la matriz \mathbf{S} y al vector \mathbf{F} (este último aporte incluye la temperatura de convección θ). La literatura de elementos finitos, identifica a estos aportes como provenientes de elementos superficiales de convección ubicados sobre los lados (o caras en el caso 3-D) de los elementos finitos¹⁰.

En cambio al usar el método de la pseudo-concentración la condición convectiva debe aplicarse sobre el contorno F que atraviesa los elementos finitos mixtos. Una primera aproximación para abordar esta situación, que incluye la idea básica del esquema propuesto, se ilustra en la figura 5 donde fm es un factor que mide la fracción del elemento mixto ocupada por material. El aporte del contorno convectivo F se calcula como la suma ponderada según fm de los aportes de elementos convectivos ubicados sobre cada uno de los lados, de forma tal que la aproximación planteada coincide con la aplicación de elementos de convección sobre los lados del elemento cuando F se encuentre ubicada en alguno de ellos.

Sin embargo, dado que F no es necesariamente paralela a ningún lado del elemento, se propone, en forma heurística, modelar el contorno convectivo mediante el agregado de un elemento de convección por conducción ortótropa (ver figura 6) cuya matriz de conductividad se determina de la siguiente manera:

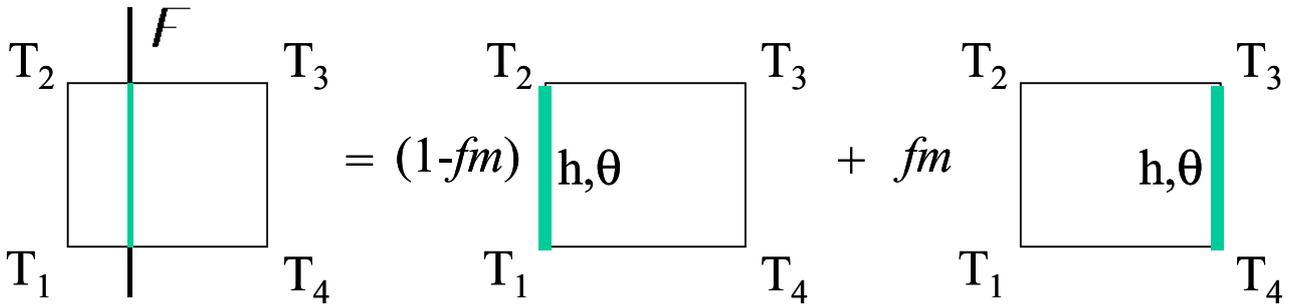


Figura 5: Ponderación de aportes por convección.

$$\mathbf{K}_h^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{k}_{ORT} \mathbf{R} \mathbf{B} dV \quad (25)$$

donde

\mathbf{B} : matriz elemental tal que $B \hat{T} = \underline{\nabla}T$ en cualquier punto interior del elemento finito

\mathbf{R} : matriz de rotación a la dirección normal al frente que cruza el elemento

$$\mathbf{k}_{ORT} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_h = \frac{hA\Delta^2}{V_{elemento}}$$

siendo

h : el coeficiente de convección.

A : el área de la superficie libre convectiva interna al elemento, la cual se considera ubicada sobre la recta que une los puntos donde el contorno F corta los lados del elemento.

Δ : la distancia entre los lados del elemento medida sobre la recta normal al área convectiva A que la atraviesa en su punto medio.

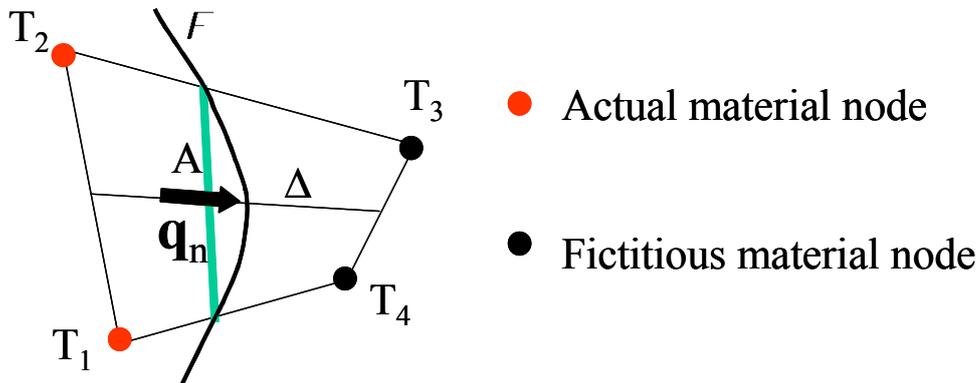


Figura 6: Descripción del elemento para modelar el flujo de calor por convección.

En la figura 7 se ilustra el esquema propuesto según el cual el aporte correspondiente al contorno convectivo F se obtiene ponderando con fm los aportes resultantes de multiplicar $\mathbf{K}_h^{(e)}$ por los valores nodales indicados en cada caso. Si se aplica este esquema a una geometría como la indicada en la figura 5 se vuelven a obtener los mismos resultados que los obtenidos con elementos convectivos ubicados sobre los lados del elemento cuando F coincide con ellos.

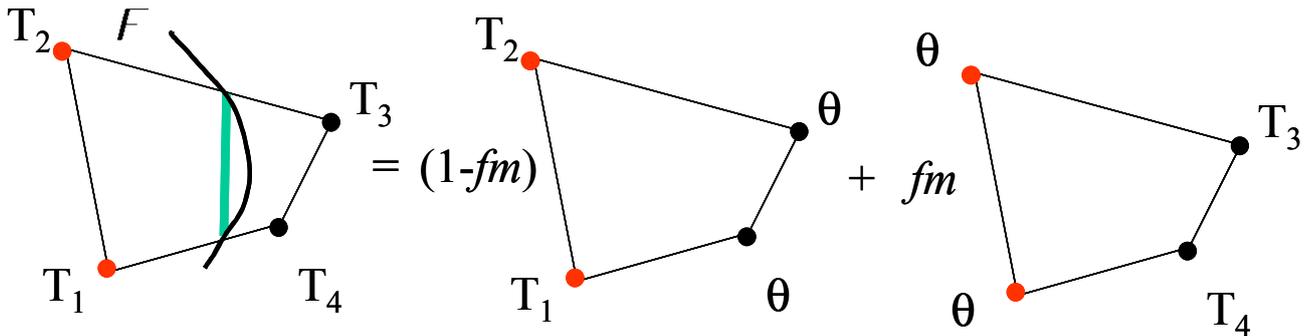


Figura 7: Esquema propuesto para modelar la convección de calor sobre la superficie libre.

Sin pérdida de generalidad se pueden numerar los nodos de un elemento mixto de forma tal que los M primeros nodos correspondan al material (donde M puede ser igual a 1,2, o 3). Utilizando esta convención para la numeración de los nodos elementales, de acuerdo con el esquema propuesto, los aportes a la matriz de coeficientes elemental para tener en cuenta la convección son, por ejemplo para el caso de $M=2$, los siguientes:

$$\mathbf{S}_h^{(e)} = \begin{bmatrix} K_h^{(e)}(1-fm) & K_h^{(e)}(1-fm) & 0 & 0 \\ K_h^{(e)}(1-fm) & K_h^{(e)}(1-fm) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_h^{(e)}fm & K_h^{(e)}fm \\ 0 & 0 & K_h^{(e)}fm & K_h^{(e)}fm \end{bmatrix}$$

mientras que al vector de fuerzas elementales se efectúan los siguientes aportes:

$$\mathbf{F}_h^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_h^{(e)}(1-fm) & -K_h^{(e)}(1-fm) \\ 0 & 0 & -K_h^{(e)}(1-fm) & -K_h^{(e)}(1-fm) \\ -K_h^{(e)}fm & K_h^{(e)}fm & 0 & 0 \\ K_h^{(e)}fm & K_h^{(e)}fm & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \\ \theta \end{Bmatrix}$$

A los efectos de analizar mediante experimentación numérica los errores de la aproximación propuesta se analiza la transmisión de calor unidimensional entre una fuente térmica a temperatura constante y un contorno convectivo que se encuentra a una distancia L de la fuente. Se trata de un problema con geometría plana, estacionario y con velocidad nula, en el cual el flujo de calor es constante. Si bien este caso se puede resolver en forma exacta usando un único elemento finito de longitud L con un elemento convectivo ubicado sobre uno de sus lados, a los

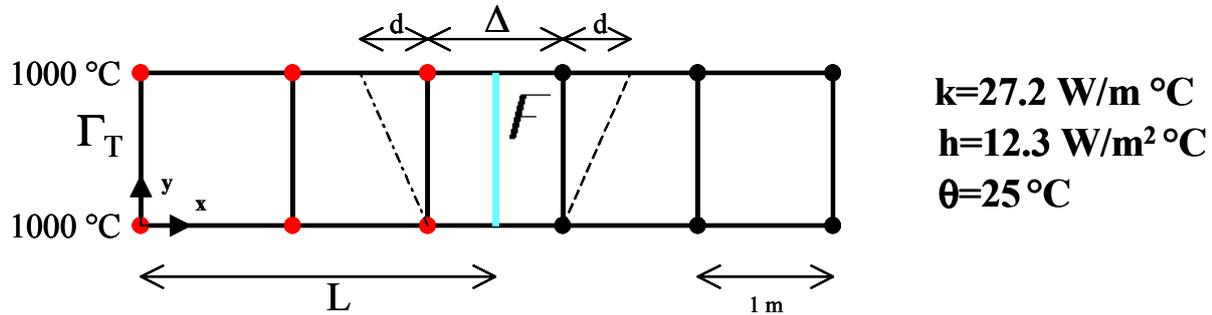


Figura 8: Descripción del problema unidimensional de flujo de calor uniforme.

efectos de cuantificar los errores que se cometen al usar el elemento de convección por conducción ortótropa para modelar el contorno convectivo, se discretizó el dominio de cálculo Ω usando 5 elementos de igual longitud. De esta forma la posición del contorno convectivo F podrá coincidir o no con los lados de los elementos dependiendo del valor de L . Las restantes características del modelo, entre ellas las propiedades térmicas utilizadas (asumidas como constantes), se encuentran descritas en la figura 8, donde también se indica que en uno de los contornos de Ω se impone la temperatura de la fuente térmica, T_{Γ_T} , mientras que el resto de los contornos de Ω son adiabáticos.

El perfil de temperatura de este problema es lineal y responde a la siguiente solución analítica

$$T(x) = T_{\Gamma_T} - \frac{h}{k + hL} (T_{\Gamma_T} - \theta) x$$

la cual se encuentra graficada en la figura 9 para tres valores distintos de L conjuntamente con las tres soluciones numéricas obtenidas usando el elemento de convección por conducción ortótropa (notar que la solución numérica se encuentra graficada en todo el dominio Ω mientras que la solución analítica se grafica únicamente en la parte del dominio que corresponde al material real).

Los resultados comprueban que la solución numérica coincide con la solución analítica cuando el contorno convectivo F coincide con los lados del elemento, mientras que para el caso de $L=2.5$ (en el cual contorno convectivo F se ubica en el centro del tercer elemento) la temperatura sobre el contorno, T_F , calculada numéricamente es un 2 % mayor que la solución analítica. La magnitud de este error relativo se reduce al disminuir el tamaño Δ del elemento central tal como se observa en la tabla 1 donde se compilan los errores relativos en el cálculo de T_F en función de Δ .

Estos resultados se obtuvieron con diferentes discretizaciones en las cuales se disminuyó Δ (se aclara que se alargaron los dos elementos vecinos para mantener constante el valor de L y no modificar el tamaño del dominio de cálculo). Además en la figura 10 se observa que los logaritmos decimales del error relativo se correlacionan linealmente con los logaritmos de Δ lo que indica que en este caso el error relativo de T_F tiende a cero, aproximadamente, con el cuadrado de Δ dado que la recta de correlación tiene una pendiente de 1.9.

Para analizar el error que se introduce cuando los lados del elemento mixto no son paralelos a F se presentan los resultados obtenidos con una malla de elementos finitos en la cual los lados del

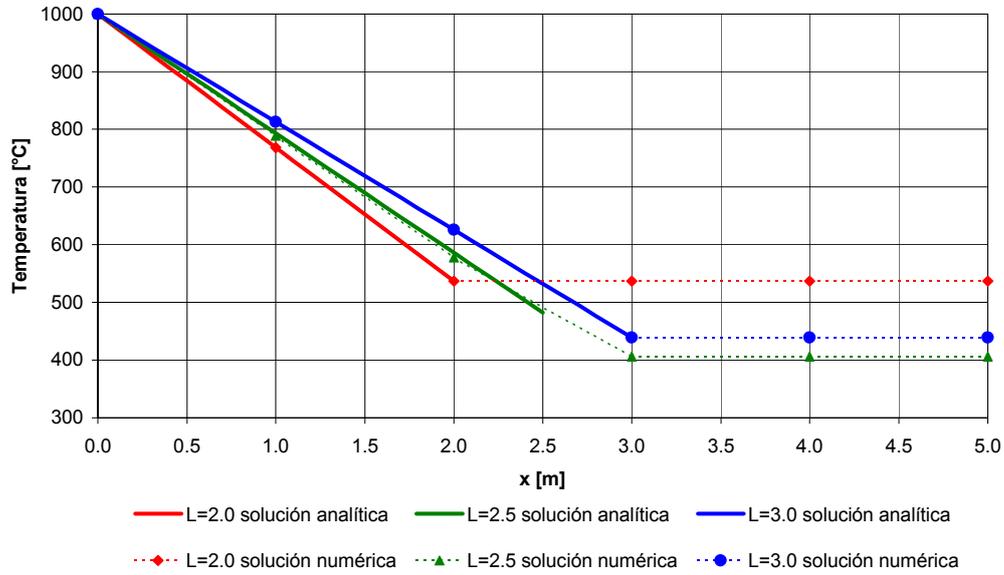


Figura 9: Perfil de temperatura: solución analítica y numérica.

Δ [m]	T_F [°C]	Error relativo [%]
1.000	491.8	1.90
0.500	485.1	0.52
0.250	483.3	0.14
0.125	482.8	0.04

Tabla 1: Efecto del tamaño Δ del elemento central sobre los errores relativos en el cálculo de T_F .

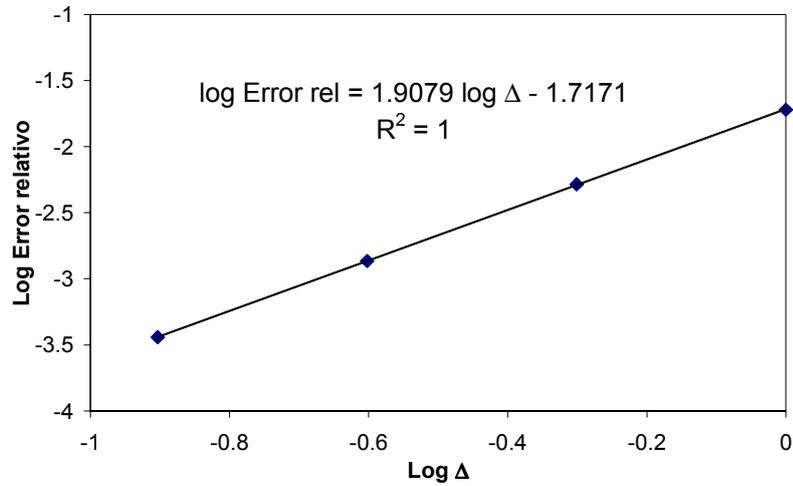


Figura 10: Relación entre el error relativo y el tamaño del elemento central.

elemento mixto central se encuentran inclinados (ver líneas punteadas en la figura 8 y definición de la distancia d). En la figura 11 se presentan los errores en la predicción de la temperatura en el centro del elemento mixto para distintas inclinaciones (parametrizadas por la variable d) usando el elemento de convección por conducción ortótropa.

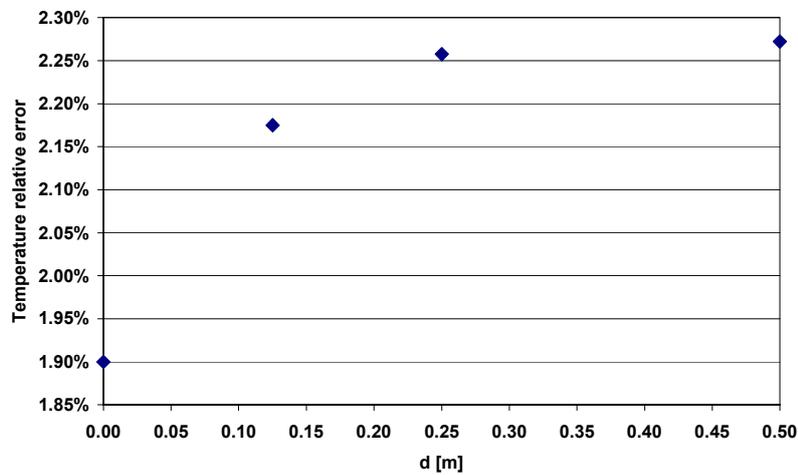


Figura 11: Efecto de la inclinación de los lados sobre la predicción de temperatura en el contorno convectivo ($\Delta=1$ m).

4.4 Algoritmo implementado

A continuación se describe el algoritmo implementado en el cual se resuelve iterativamente el acoplamiento termo-mecánico.

- En los problemas estacionarios se arranca con una distribución aproximada de pseudo-concentraciones y velocidades nulas ($\underline{\dot{u}}^{(0)} = 0$).
- En los problemas transitorios para calcular la solución en $t + \Delta t$ se arranca con la solución convergida para el tiempo t .

1. $l = 0$

2. $l = l + 1$

2.a. $r = 0$; $\underline{\dot{u}}^{(r)} = \underline{\dot{u}}^{(l-1)}$

2.b. $r = r + 1$

Resuelve las ecuaciones lineales (7 y 8) utilizando un método directo y manteniendo constante la distribución de pseudo-concentraciones, de deformaciones efectivas equivalentes y de temperatura.

2.c. **SI** $\frac{\|\underline{\dot{u}}^{(r)} - \underline{\dot{u}}^{(r-1)}\|_2}{\|\underline{\dot{u}}^{(r)}\|_2} \leq \dot{U}TOL$ **Y** $\|\dot{\epsilon}_v\|_\infty \leq \dot{V}TOL$

ENTONCES $\rightarrow \underline{\dot{u}}^{(l)} = \underline{\dot{u}}^{(r)}$ **IR A 3**

SINO IR A 2.b

3. *Actualiza la distribución de pseudo-concentraciones, de deformaciones efectivas equivalentes y de temperaturas usando las ecuaciones (9, 10 y 19) respectivamente.*

4. **SI** $l = 1$

ENTONCES IR A 2

SINO

SI $\frac{\|\underline{\dot{u}}^{(l)} - \underline{\dot{u}}^{(l-1)}\|_2}{\|\underline{\dot{u}}^{(l)}\|_2} \leq \dot{U}TOL$

ENTONCES $\rightarrow CONVERGE$

SINO \rightarrow **IR A 2**

5 CONCLUSIONES

Se ha presentado una implementación del acoplamiento termo-mecánico para problemas de conformado masivo de metales que incluye el planteo, en forma aproximada, de las condiciones de borde térmicas sobre el contorno definido por el método de las pseudo-concentraciones. Este acoplamiento es el primer paso en el desarrollo de un modelo acoplado termo-mecánico-metalúrgico.

REFERENCIAS

- [1] C. Zienkiewicz, P. C. Jain and E. Oñate, “Flow of solids during forming and extrusion: Some aspects of numerical solutions”, *Int. J. Solid Struct.*, **14**, 15-38, 1977.
- [2] S.B. Petersen, P.A.F. Martins, “Finite element remeshing: a metal forming approach for quadrilateral mesh generation and refinement”, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **40** (8), 1449-1464, 1997.
- [3] E. Thompson, “Use of the pseudo-concentrations to follow creeping viscous flows during transient analysis”, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **6**, 749-761, 1986.
- [4] E.N. Dvorkin, M.A. Cavaliere and M.B. Goldschmit, “A three field element via augmented Lagrangian for modelling bulk metal forming processes”, *Computational Mechanics*, **17**, 2-9, 1995
- [5] M. A. Cavaliere, M. B. Goldschmit y E. N. Dvorkin, “Finite element simulation of the steel plates hot rolling process”, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **52** (12), 1411-1430, 2001.
- [6] C. Devadas, I.V. Samarasekera and E.B. Hawbolt, “The thermal and metallurgical state of steel strip during hot rolling: Part I. Characterization of heat transfer”, *Metallurgical Transactions A*, **22A**, 307-319, 1991.
- [7] C. Devadas, D. Baragar, G. Ruddle, I.V. Samarasekera and E.B. Hawbolt, “The thermal and metallurgical state of steel strip during hot rolling: Part II. Factors influencing rolling loads”, *Metallurgical Transactions A*, **22A**, 321-333, 1991.
- [8] C. Devadas, I.V. Samarasekera and E.B. Hawbolt, “The thermal and metallurgical state of steel strip during hot rolling: Part III. Microstructural evolution”, *Metallurgical Transactions A*, **22A**, 335-349, 1991.
- [9] P. Perzyna, “Fundamental problems in viscoplasticity”, *Advances in Applied Mechanics*, **9**, Academic Press, New York, 1966.
- [10] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4th Edn., McGraw-Hill, New York, 1989.
- [11] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, MA, 1984.
- [12] E.N. Dvorkin and E.G. Petöcz, “An effective technique for modelling 2D metal forming processes using an Eulerian formulation”, *Engrg. Comput.*, **10**, 323-336, 1993.
- [13] A. Brooks and T.J.R. Hughes, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **32**, 199-259, 1982.
- [14] R.H. Wagoner, J.-L.Chenot, *Metal Forming Analysis*, Cambridge University Press, 2001.
- [15] E.N. Dvorkin and R.G. Toscano, “A new rigid-viscoplastic model for simulating thermal strain effects in metal-forming processes”, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **58** (12), 1803-1816, 2003.