

UN ELEMENTO FINITO BASADO EN LA TÉCNICA DE LA MALLA COMPUESTA

Marta B. Bergallo^a, Carlos E. Neuman^a y Victorio E. Sonzogni^b

^a*Dpto. Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, 3000 Santa Fe, Argentina, bergallo@fiq.unl.edu.ar, ceneuman@fiq.unl.edu.ar*

^b*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC-CONICET, Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, sonzogni@intec.unl.edu.ar, <http://www.cimec.org.ar>*

Palabras Clave: Elementos finitos, malla compuesta, errores de discretización.

Resumen. En este trabajo se muestran unos primeros resultados sobre la construcción de un elemento finito basado en la técnica de la malla compuesta. Esta técnica consiste en colocar en el mismo dominio dos mallas de elementos finitos de distintos tamaños y afectar a cada una de ellas con factores de participación complementarios. De esta forma, con una adecuada elección de los factores de participación, se consigue reducir los errores discretos de la solución a nivel nodal. Basado en esta metodología se construye un elemento finito compuesto, mediante una condensación de sus incógnitas internas. Se muestran algunos resultados de evaluación del mismo en comparación con elementos finitos estándar y resultados del test de parcela.

1. INTRODUCCIÓN

El método de malla compuesta se basa en colocar en el mismo dominio dos mallas de elementos finitos de distintos tamaños y afectar a cada una de ellas con factores de participación complementarios. De esta forma, con una adecuada elección de los factores de participación, se consigue reducir los errores discretos de la solución a nivel nodal (Sonzogni et al., 1996; Bergallo et al., 2000).

Basado en esto se propone aquí la construcción de un elemento finito en el cual dos grupo de elementos, de distintos tamaños ocupan el mismo dominio. Cada componente es afectada con un factor de participación. Las incógnitas sobre los nodos internos son condensadas en función de los nodos sobre la periferia.

A continuación se explica brevemente el concepto de la malla compuesta. Luego se muestra como se arman los elementos compuestos y se verifica su aptitud para pasar el test de la parcela. Finalmente se muestran algunos resultados de evaluación del mismo en comparación con elementos finitos estándar.

2. MALLA COMPUESTA

La idea central de este trabajo es utilizar una malla compuesta, de elementos finitos, de manera similar a los modelos de mezclas para materiales de varias fases. En este método se utilizan dos mallas, denominadas T_h y T_H con tamaños de elementos h y H respectivamente, con nodos comunes. En la práctica basta tomar T_h como refinamiento uniforme de T_H , con lo que $h = H/2$, por ejemplo. En la extrapolación de Richardson se usan también dos mallas y se combinan los resultados de cada una de ellas. En lugar de eso, en el método de malla compuestas se interpreta que el dominio está formado por la yuxtaposición de dos mallas con factores de participación α y $(1 - \alpha)$, correspondiendo el primero a la malla fina (paso h) y el segundo a la gruesa (paso H). Cuando $\alpha = 1$ se tiene el problema original en la malla fina y cuando $\alpha = 0$ el correspondiente en la gruesa (Bergallo et al., 2000), (Sarraf et al., 2010).

Sea $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$ el sistema de ecuaciones que debe resolverse una vez aplicado el método de elementos finitos para la malla fina T_h y $\mathbf{A}_H \mathbf{u}_H = \mathbf{f}_H$ el sistema correspondiente a la malla T_H . Se define el operador discreto \mathbf{A}_{Hh} como la matriz $\mathbf{A}_{Hh} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_H \mathbf{P}$, donde \mathbf{P} es un operador de prolongación adecuado:

$$\mathbf{P} : \mathbb{R}^{n_H} \rightarrow \mathbb{R}^{n_h} \quad (1)$$

siendo $n_h > n_H$ las dimensiones de los espacios de dimensión finita asociados a ambas mallas.

Una manera sencilla es completar con ceros la matriz \mathbf{A}_H en las posiciones de los nodos no comunes, de manera de igualar su dimensión con la de la malla fina. En forma análoga, se define el vector \mathbf{f}_{Hh} . La solución aproximada \mathbf{u}_c mediante el método de la malla compuesta se obtiene del sistema (Sonzogni et al., 1996)

$$(\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh}) \mathbf{u}_c = \alpha \mathbf{f}_h + (1 - \alpha) \mathbf{f}_{Hh} \quad (2)$$

El error asintótico de la aproximación por el método de elementos finitos tiene la forma (Sonzogni et al., 1996)

$$\|u - u_h\| = Ch^p + \mathcal{O}(h^q) \quad (3)$$

donde C es una constante que no depende de h pero si de u y su regularidad y también $q > p$. Luego, un análisis de extrapolación del error permite obtener la siguiente estimación (Bergallo et al., 2000; Sonzogni et al., 1996; Toro et al., 2005).

$$\alpha = \frac{(H/h)^p}{(H/h)^p - 1} \quad (4)$$

La mejora obtenida por el método de la malla compuesta con respecto a la solución mediante el método de elementos finitos estándar se presenta en los valores nodales de la solución. Se ha usado las normas l_∞ ($\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_i |a_i|$) y euclídea ($\|\mathbf{a}\|_2 = (\sum_i a_i^2)^{1/2}$) para vectores para medir los errores.

3. ELEMENTO COMPUESTO

Basado en las ideas de la malla compuesta, se ha construido un elemento formado por un componente *grueso* y varios componentes de una malla *fin* que resulta de subdividir el elemento grueso.

La figura 1 muestra un elemento compuesto basado en un elemento cuadrangular de 4 nodos de la malla T_H , y 4 elementos cuadrangulares de T_h . En la figura se indican con círculos los nodos de la componente *fin* y con cuadrados los de la componente gruesa. Todos ellos pasan a ser nodos del elemento compuesto, con la salvedad de que el nodo interior es condensado estáticamente en función de los nodos de frontera.

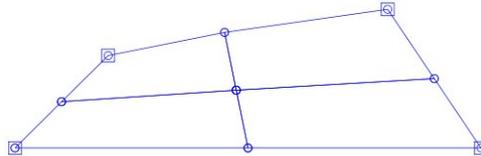


Figura 1: Elemento compuesto basado en cuadrángulos lineales de 4 nodos

Si se particiona la matriz del elemento en nodos de frontera y nodos interiores, el sistema se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & \mathbf{A}_{fi} \\ \mathbf{A}_{if} & \mathbf{A}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}$$

Aceptando el hecho de que no hay *cargas* sobre el nodo interno, del segundo subsistema de ecuaciones puede escribirse:

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{A}_{ii}^{-1} \mathbf{A}_{if} \mathbf{u}_f$$

y

$$(\mathbf{A}_{ff} - \mathbf{A}_{fi} \mathbf{A}_{ii}^{-1} \mathbf{A}_{if}) \mathbf{u}_f = \mathbf{f}_f$$

donde la expresión entre paréntesis corresponde a la matriz condensada sobre los nodos de frontera solamente.

El elemento compuesto posee así 8 nodos: 4 de esquina y 4 a mitad de cada lado, siendo que el nodo interior ha sido condensado, como ya se ha indicado.

En forma similar, se puede construir un elemento triangular compuesto basado en un triángulo lineal de 3 nodos y 4 triángulos de una partición uniforme del primero (figura 2). En este caso no es preciso condensar nodos ya que todos ellos están en la frontera elemental. También aquí se indica con circulitos los nodos de la malla fina y con cuadrados los de la gruesa. El elemento posee 6 nodos: 3 de vértices y 3 a mitad de cada lado.

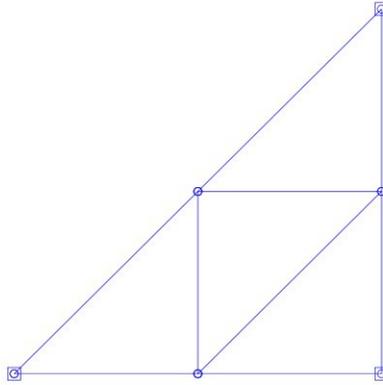


Figura 2: Elemento compuesto basado en triángulos lineales de 3 nodos

4. TEST DE LA PARCELA

Lo primero que se hizo es ver si estos elementos pasaban el test de la parcela (*patch test*) Hughes (1987).

Para ello se armó una parcela como se indica en la figura 3 sometiendo todos los nodos de borde a un estado definido de deformación. En este caso se trata de un alargamiento uniforme. Como comprobación el nodo interior debe reproducir el valor esperado del desplazamiento. Se realizaron todos los test incluyendo movimientos rígidos (desplazamiento uniforme) en ambas direcciones y deformaciones de alargamiento uniforme y de distorsión, en ambos sentidos. Otro de los resultados se observa en la figura 4.

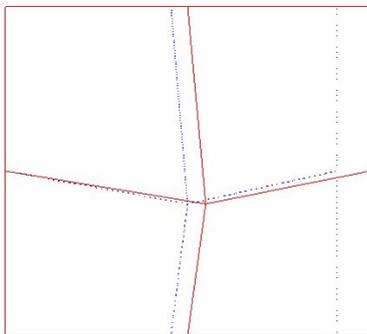


Figura 3: Patch test en el que se impone una distorsión uniforme

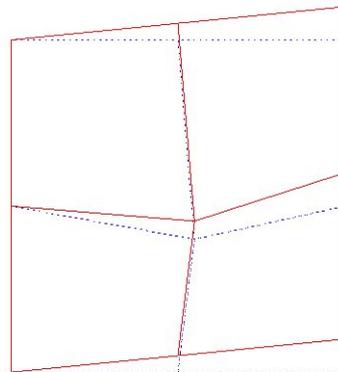


Figura 4: Patch test en el que se impone un alargamiento

5. EJEMPLOS

A continuación se muestran algunos ejemplos de uso del elemento.

5.1. Voladizo con carga en la punta

Este ejemplo fue tomado de Brebbia y Ferrante (1975), se trata de una viga en voladizo con carga en la punta. En la figura 5 se muestra una de las mallas utilizadas, tanto de cuadrángulos como de triángulo, y las condiciones de borde.

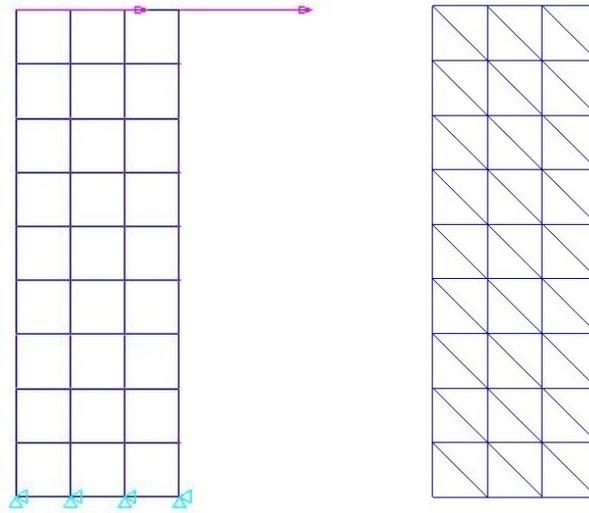


Figura 5: Viga en voladizo con carga en la punta. Malla

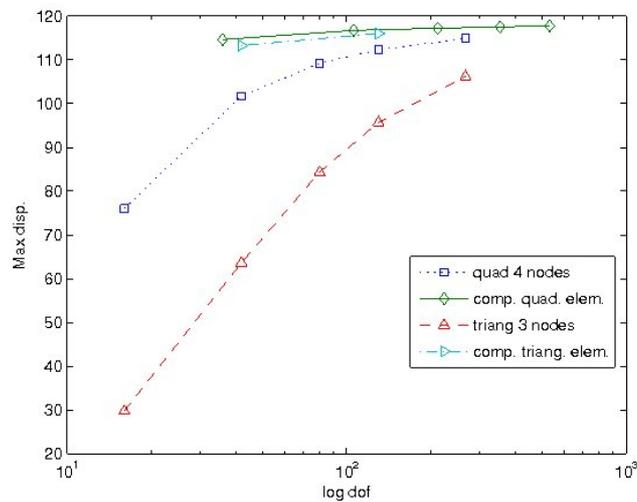


Figura 6: Viga en voladizo con carga en la punta. Desplazamiento del extremo

En la figura 6 se presentan algunos de los resultados obtenidos. Se observa allí el desempeño de una malla con elementos triangulares lineales, otra con elementos rectangulares lineales, y otras dos curvas correspondientes a elementos compuestos basados en triángulos y en rectángulos, respectivamente. Como es sabido los elementos triangulares lineales son los que poseen peor desempeño en este caso. Una mejora se tiene con los rectángulos lineales. Los elementos compuestos, tanto en base a triángulos como a rectángulos demuestran un desempeño muy bueno.

Vale destacar que en ese gráfico las ordenadas corresponden al desplazamiento máximo en el extremo. En tal sentido son una medida en norma l_∞ .

5.2. Membrana de Cook

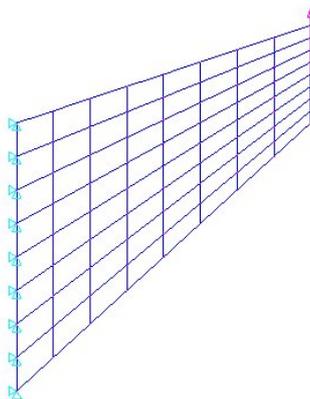


Figura 7: Membrana de Cook. Malla

El siguiente ejemplo corresponde a la denominada membrana de Cook. En la figura 7 se muestra la geometría y condiciones de contorno del problema, así como una de las mallas utilizadas. Este problema se usa para evaluar elementos frente a la posibilidad de bloqueo cuando son de materiales incompresibles, pero se está usando aquí para un material estándar.

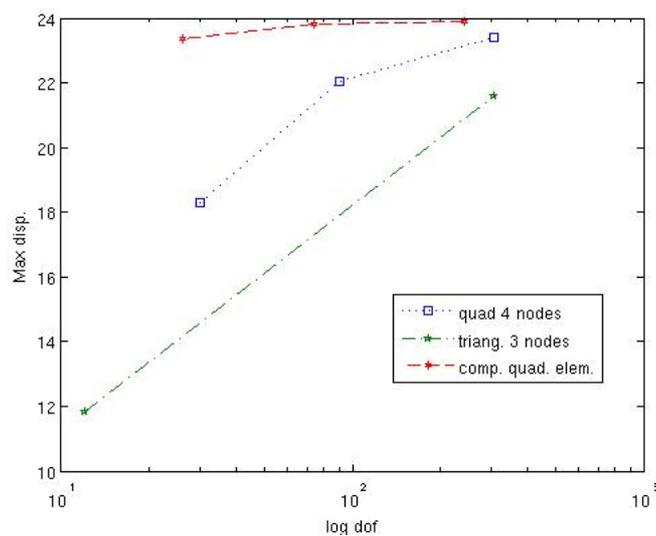


Figura 8: Membrana de Cook. Desplazamiento del extremo

En la figura 8 se puede ver el desplazamiento en el extremo de la membrana graficado (en norma l_∞) en función de la cantidad de grados de libertad del modelo (en escala logarítmica). Se pueden ver los resultados correspondientes a una malla de elementos triangulares lineales, a

otra de elementos rectangulares lineales, y finalmente para un elemento compuesto basado en rectángulos. Nuevamente se observa la mejora radical con el elemento compuesto.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se muestran algunos resultados preliminares de evaluación de un elemento compuesto basado en la técnica de Malla Compuesta. Se han construido elementos basados en triángulos lineales y en rectángulos lineales. En ambos casos el comportamiento ha sido similar. Los resultados obtenidos son coherentes con los que resultan de aplicar la técnica de Malla Compuesta.

Se ha verificado que los elementos cumplen los elementales test de la parcela (*patch test*). Los resultados para problema de elasticidad lineal muestran una sensible reducción del error comparado con los elementos lineales de base. En todos estos ejemplos se tomó como factor de participación de la componente fina $\alpha = 4/3$. Este coeficiente es el valor óptimo para problemas exentos de singularidades, pero conducen a una mejora de los resultados aún para problemas que presentan singularidades.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió apoyo de los proyectos PICT 2006/1506 y PICT 2010-2492 de la ANPCYT, PIP 112-200801-2956 del CONICET, CAI+D 2009-12/M312 y CAI+D 2009-III-4-2 de UNL.

REFERENCIAS

- Bergallo M., Neuman C., y Sonzogni V. Composite mesh concept based fem error estimation and solution improvement. *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, 188:755–774, 2000.
- Brebbia C. y Ferrante A. *The finite element method*. Editora da URGs, Porto Alegre, Brasil, 1975.
- Hughes T.J. *The finite element method*. Prentice-Hall, 1987.
- Sarraf S.S., Bergallo M.B., y Sonzogni V. Integración de la técnica de malla compuesta con el método multigrilla. En *Proc. MECOM 2010*. 2010.
- Sonzogni V., Bergallo M., y Neuman C. Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos. En *Proc. MECOM 1996*, páginas 123–132. 1996.
- Toro S., Sonzogni V., y Neuman C. Elementos finitos de diferentes ordenes para problemas de elasticidad plana y mezclas de sus mallas. En *Proc. MECOM 2005: VII Congreso Argentino de Mecánica Computacional, Buenos Aires, 16-18 noviembre*, páginas 3171–3186. 2005.