

DESARROLLO DE UN PAQUETE DE HERRAMIENTAS PARA PROBLEMAS DE FLUJO VISCOZO INCOMPRESIBLE BIDIMENSIONAL A BAJO NÚMERO DE REYNOLDS

Marcos Vanella*, Carlos Sacco†, Julio C. Massa*

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1601, Córdoba, Argentina
e-mail: vanella@agora.com.ar, jmassa@efn.uncor.edu

†Departamento de Mecánica de Fluidos, Instituto Universitario Aeronáutico.
Av. Fuerza Aérea S/n, Córdoba, Argentina
e-mail: csacco@iua.edu.ar

Palabras Clave: Elementos Finitos, Flujos Viscosos Incompresibles, Métodos Numéricos.

Resumen. *El presente trabajo expone herramientas desarrolladas para el análisis de problemas de Mecánica de Fluidos viscosos bajo régimen de flujo incompresible en dos dimensiones. Dichas herramientas han sido generadas aplicando el método de elementos finitos, y programadas en lenguaje Fortran 90, bajo un concepto modular de programación. Esto permite extender en un futuro, de manera directa, el rango de problemas a solucionar. Principalmente se han implementado dos algoritmos de integración temporal de las ecuaciones de gobierno de características muy diferentes. Uno de éstos es el esquema de Pasos Fraccionados tipo Euler Forward, y el otro es el esquema Implícito Monolítico en sus versiones de primer y segundo orden de precisión en el tiempo. En ambos se estabiliza la advección y las presiones a través de un método SUPG de alto orden. Se han implementado elementos triángulos lineales y cuadráticos, estos últimos casi desconocidos en el área de Mecánica de Fluidos. Además se han implementado las condiciones de contorno sobre velocidades y presiones y condiciones de contorno especiales como condición de tensión normal nula y condición de contorno abierto. También se ha implementado el cálculo de esfuerzos resultantes en zonas del contorno de interés. Con el software desarrollado pueden solucionarse problemas de flujo viscoso isotérmico bidimensional e incompresible a números de Reynolds bajos, donde la captura de la capa límite se realiza a través de la discretización elemental en zonas cercanas al contorno con condición de deslizamiento nula. En todo el desarrollo se ha utilizado la tecnología de álgebra de matrices sparse CSR*

1 INTRODUCCIÓN

Este documento resume el desarrollo de las herramientas computacionales *inflow*, basadas en el método de elementos finitos, para la solución de problemas de mecánica de fluidos bidimensionales bajo régimen de flujo incompresible.

Se desarrollan algoritmos de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, que podrán ser utilizados para fines de desarrollo o investigación. Se implementó un paquete básico de herramientas computacionales, bajo una lógica de programación modular, sobre el cual se podrán ir anexando subrutinas para solucionar otras condiciones de flujo (otros modelos de turbulencia, el caso de flujos con rotación, estabilización para casos de rotación dominante, flujos debidos a gradientes térmicos, etc.).

Aunque las funciones elementales que se han programado corresponden a elementos bidimensionales, las subrutinas de ensamble y solución se implementaron teniendo en cuenta el caso más general tridimensional, con lo que la extensión al mismo resulta directa.

La discretización del dominio para los problemas abordados se efectúa mediante el método de elementos finitos y se transforman las ecuaciones diferenciales del problema en ecuaciones algebraicas utilizando el conocido método de Galerkin^{4, 5, 6} de residuos ponderados. Este método opera con expresiones integrales que contienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, las cuales conducen a sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (una ecuación por cada incógnita escalar de la discretización).

En el presente trabajo, se han desarrollado herramientas correspondientes al módulo de procesamiento. Se cuenta con dos algoritmos de integración de las ecuaciones de flujo viscoso incompresible de diferentes características. Uno es un esquema de pasos fraccionados con integración temporal del tipo Euler forward, de primer orden de precisión en el tiempo; y el otro es un esquema implícito monolítico con integraciones temporales de primer orden tipo Euler backward, y de segundo orden tipo Crank-Nicholson.

Se han desarrollado todas las funciones de cálculo de matrices y vectores elementales en caso de elementos triángulos lineales y cuadráticos, y se han implementado las condiciones de contorno sobre las variables nodales de velocidad y presión, y condiciones de contorno especiales como condición de tensión normal nula y condición de contorno abierto. Se ha implementado un modelo de turbulencia de cero ecuaciones de transporte para tratar casos de flujo turbulento.

Se han programado además algunas funciones correspondientes al módulo de posprocesamiento en lo que respecta a la integración del tensor de tensiones proyectado sobre direcciones particulares en zonas del contorno que resulten de interés (cálculo de fuerzas resultantes). Para las tareas de preproceso y visualización de resultados se ha utilizado el programa Geometría y Diseño Gid®.

Para una visión más detallada de los temas tratados en este trabajo puede consultarse la Referencia [1] que está disponible en formato electrónico.

2 APLICACIÓN DEL ESQUEMA DE PASOS FRACCIONADOS AL PROBLEMA DE FLUJO INCOMPRESIBLE

Se plantea la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles a través de un esquema de pasos fraccionados con integración temporal tipo Euler Forward. Bajo este procedimiento, la estabilidad en presiones del algoritmo se obtiene regulando el valor del salto de tiempo², y además debe estabilizarse la ecuación de Poisson para las presiones, la cual se utiliza como complemento de las ecuaciones de momento. Esta formulación permite trabajar con las mismas funciones de aproximación elementales para interpolar presiones y velocidades, lo cual es una ventaja al momento de la implementación computacional.

La ventaja de este método respecto de los métodos implícitos convencionales de integración de ecuaciones de momento y continuidad acopladas, reside en la eficiencia computacional del mismo, ya que encara la solución sobre sistemas lineales de menor tamaño que en el caso anterior (un sistema para las ecuaciones de momentos y otro para las presiones). Esto disminuye significativamente los requerimientos de memoria, y el esfuerzo computacional de los algoritmos iterativos empleados para hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales. En el presente esquema se resuelve únicamente la ecuación de Poisson a través de un esquema de Gradientes Conjugados Precondicionado⁸.

También se da un trato especial al problema de estabilización de la convección en las ecuaciones de momento, a través de un método SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) de alto orden³, para el esquema implícito monolítico que es tratado en la siguiente sección.

Las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles para un fluido evolucionando en un dominio Ω , en un intervalo de tiempo $[0, T]$ son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{u}\} + (\{\mathbf{u}\} \cdot \nabla) \{\mathbf{u}\} - \nu \Delta \{\mathbf{u}\} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} = \{\mathbf{f}_e\} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{u}\} = 0 \quad (2.2)$$

donde $\{\mathbf{u}\}$ es el campo de velocidades sobre Ω , \mathbf{p} es la presión estática, $\{\mathbf{f}_e\}$ es el campo vectorial de fuerzas de campo y ν es la viscosidad cinemática y ρ es la densidad. Además deben estipularse condiciones iniciales sobre la velocidad y la presión, y condiciones de contorno a saber:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\} &= \{\bar{\mathbf{u}}_0\} \text{ y } \mathbf{p} = \bar{p}_0 \dots\dots\dots \text{ en } t = t_0 \\ \{\mathbf{u}\} &= \{\bar{\mathbf{u}}\} \dots\dots\dots \text{ en } \Gamma_{Dv} \\ \mathbf{p} &= \bar{p} \text{ y } [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \{\mathbf{n}\} = \{\bar{\mathbf{t}}\} \dots\dots\dots \text{ en } \Gamma_{Nv} \\ \{\mathbf{u}\} \cdot \{\mathbf{n}\} &= \{\bar{\mathbf{u}}_n\}, \quad [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \{\mathbf{g}_1\} = \{\bar{\mathbf{t}}_1\} \text{ y } [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \{\mathbf{g}_2\} = \{\bar{\mathbf{t}}_2\} \dots\dots \text{ en } \Gamma_{Mv} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde la barra sobre las variables significa que son especificadas. $[\boldsymbol{\sigma}]$ es el Tensor de tensiones (viscosas y de presión).

Aquí la superficie de contorno Γ se considera separada en tres componentes disjuntos Γ_{Dv} , Γ_{Nv} , y Γ_{Mv} . La primera de ellas es la componente donde se especifican las condiciones

sobre la variable principal $\{\mathbf{u}\}$ (Dirichlet); la segunda componente contiene las variables secundarias especificadas (Neumann), y la tercera componente es la parte donde se imponen las condiciones mixtas de velocidad normal y tensiones tangenciales. El versor $\{\mathbf{n}\}$ es normal al contorno y los versores $\{\mathbf{g}_1\}$ y $\{\mathbf{g}_2\}$ generan el espacio tangente a Γ_{mv} .

La discretización espacial por elementos finitos utilizada se basa en la formulación variacional del problema (Galerkin). Aplicando el método de elementos finitos, interpolando para cada elemento los valores de variables primarias y funciones de peso a partir de los valores nodales, se llega al sistema matricial equivalente a las ecuaciones (2.1)-(2.2), que corresponde al modelo discreto en el espacio. Luego, utilizando la regla de trapecios para la discretización temporal se obtiene la forma matricial de la discretización monolítica del problema:

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}] (\{\mathbf{u}^{n+1}\} - \{\mathbf{u}^n\}) + [\mathbf{K}_c(\mathbf{u}^{n+\theta})] \{\mathbf{u}^{n+\theta}\} + [\mathbf{K}_v] \{\mathbf{u}^{n+\theta}\} - \frac{1}{\rho} [\mathbf{G}^*] \{\mathbf{p}^{n+1}\} = \{\mathbf{f}_{ext}^{n+\theta}\} \quad (2.4)$$

$$[\mathbf{D}^*] \{\mathbf{u}^{n+1}\} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

donde, $\{\mathbf{u}^{n+\theta}\}$ es el vector de velocidades en los nodos de la malla en el paso de tiempo $n+\theta$ (θ es un parámetro que varía entre 0 y 1). Las matrices y vectores globales en las ecuaciones anteriores se obtienen del ensamblaje de las siguientes matrices elementales (en minúscula):

| | |
|--|--|
| $[\mathbf{m}_e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega_e$ | Matriz de Gramm del elemento. |
| $[\mathbf{k}_{ce}(\mathbf{u}_e^{n+\theta})] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{u}_e^{n+\theta}] [\mathbf{B}] d\Omega_e$ | Matriz de convección del elemento. |
| $[\mathbf{k}_{ve}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega_e$ | Matriz de difusión del elemento. |
| $[\mathbf{g}_e^*] = \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}_{,fis}\} [\mathbf{N}_p] d\Omega_e$ | Matriz asociada al ∇p sobre el elemento. |
| $\{\mathbf{f}_{exte}^{n+\theta}\} = \int_{d\Omega_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}_{(\Omega,t)}\} d\Omega_e$ | Vector de cargas distribuidas sobre el interior del elemento. |
| $[\mathbf{d}_e^*] = [\mathbf{g}_e^*]^T$ | Matriz asociada a la $\nabla \cdot \{\mathbf{u}\}$ en el elemento. |

$[\mathbf{N}]$ es la matriz de funciones de interpolación elementales para velocidades, $[\mathbf{u}_e^{n+\theta}]$ es la matriz de valores nodales de la velocidad en el tiempo $n+\theta$, $[\mathbf{C}]$ es la Matriz Constitutiva asociada a la viscosidad μ , $[\mathbf{B}]$ es la matriz de derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas físicas xyz , $\{\mathbf{N}_{,fis}\}$ es un reordenamiento de $[\mathbf{B}]$, tal que:

$$\{\mathbf{N}_{,fis}\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{Nn}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Nn}}{\partial z} \end{array} \right]_{1 \times 3Nn}^T$$

Nn es el número de nodos del elemento, $[\mathbf{N}_p]$ es la matriz de funciones de interpolación elemental para presiones y $\{\mathbf{f}_{(\Omega,t)}\}$ es la fuerza de campo sobre puntos en el interior del elemen-

to. También pueden considerarse tracciones sobre los contornos de los elementos.

La aplicación del método de pasos fraccionados al problema discreto (2.4)-(2.5) comienza considerando una nueva variable con características de velocidad llamada velocidad intermedia o momento fraccionario $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$, con la cual se particiona la ecuación de momentos y se reemplaza la ecuación de continuidad por una ecuación de Poisson para la presión.

Luego de realizar algunas aproximaciones esenciales², tomando $\theta = 0$ (integración tipo Euler Forward) y agregando la estabilización de presiones a través de la variable vectorial de proyección $\{\Xi\}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{\delta t}[\mathbf{M}](\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\} - \{\mathbf{u}^n\}) + [\mathbf{K}_c(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta})]\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}\} + [\mathbf{K}_v]\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}\} - \frac{1}{\rho}[\mathbf{G}^*]\{\mathbf{p}^{n+1}\} = \{\mathbf{f}_{ext}^{n+\theta}\} \quad (2.6)$$

$$\delta t[\mathbf{L}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} + \tau([\mathbf{L}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} - [\tilde{\mathbf{D}}]\{\Xi^n\}) = -\rho[\mathbf{D}^*]\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\delta t}[\mathbf{M}](\{\mathbf{u}^{n+1}\} - \{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\}) - \frac{1}{\rho}[\mathbf{G}^*](\{\mathbf{p}^{n+1}\} - \gamma\{\mathbf{p}^n\}) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$[\tilde{\mathbf{M}}]\{\Xi^{n+1}\} = [\tilde{\mathbf{G}}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} \quad (2.9)$$

siendo τ el parámetro crítico de la malla, $[\mathbf{L}]$ es la matriz Laplaciana (contiene derivadas segundas de las funciones de forma elementales respecto de las coordenadas físicas), $[\tilde{\mathbf{M}}]$, $[\tilde{\mathbf{G}}]$ y $[\tilde{\mathbf{D}}]$ las matrices de masa, gradiente y divergencia asociadas a la variable $\{\Xi\}$ de proyección del ∇p sobre el espacio de elementos finitos. γ es un parámetro que puede valer 0 ó 1, en nuestro caso (integración de pasos fraccionados de primer orden) se toma cero y se mantiene el orden del error de integración $O(\delta t)$. La estabilización del término convectivo de las ecuaciones de Navier-Stokes se hace utilizando una formulación SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) de alto orden³, la cual se basa en la estabilización utilizada para la presión

El sistema matricial resultante es el siguiente:

$$\frac{1}{\delta t}[\mathbf{M}](\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\} - \{\mathbf{u}^n\}) + [\mathbf{K}_{c(\tilde{\mathbf{u}}^n)}]\{\tilde{\mathbf{u}}^n\} + [\mathbf{K}_v]\{\tilde{\mathbf{u}}^n\} + [\mathbf{K}_{STAB(\tilde{\mathbf{u}}^n)}]\{\tilde{\mathbf{u}}^n\} = \{\mathbf{f}_{ext}^n\} + \{\mathbf{f}_{stab(\tilde{\mathbf{u}}^n, \Pi^n)}\} \quad (2.10)$$

$$\delta t[\mathbf{L}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} + \tau([\mathbf{L}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} - [\tilde{\mathbf{D}}]\{\Xi^n\}) = -\rho[\mathbf{D}^*]\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\delta t}[\mathbf{M}](\{\mathbf{u}^{n+1}\} - \{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\}) - \frac{1}{\rho}[\mathbf{G}^*]\{\mathbf{p}^{n+1}\} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\{\Pi^{n+1}\} = [\widehat{\mathbf{M}}_1]^{-1}\{\mathbf{RHS}_\pi(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\} \quad (2.13)$$

$$\{\Xi^{n+1}\} = [\widehat{\mathbf{M}}_1]^{-1}[\tilde{\mathbf{G}}]\{\mathbf{p}^{n+1}\} \quad (2.14)$$

donde, $\{\Pi\}$ es la variable de proyección asociada a la estabilización de la convección para los nodos de todo el sistema, y se tiene a nivel elemental:

$$[\mathbf{k}_{\text{STABe}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta})}] = \tau \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}]^T [\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}] [\mathbf{B}] d\Omega_e$$

Matriz de Estabilización de Convección Elemental.

$$\{\mathbf{f}_{\text{stabe}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}, \boldsymbol{\pi}^n)}\} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}]^T \tau [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\pi}^n\} d\Omega_e$$

Vector de Estabilización de Convección Elemental.

$$\{\mathbf{rhs}_{\boldsymbol{\pi}^e}\} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T \left[\overline{\nabla \{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\}} \right] [\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{u}}_e^{n+1}\} d\Omega_e$$

Término independiente de la ecuación para $\{\boldsymbol{\pi}\}$.

siendo $\left[\overline{\nabla \{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\}} \right]$ la matriz 3x3 de derivadas de las componentes de $\{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\}$ respecto de las coordenadas físicas. La matriz $[\widehat{\mathbf{M}}_1]$ es la matriz de masa diagonalizada asociada a las variables de proyección.

En el algoritmo de solución del sistema (2.10)-(2.14) se resuelven para cada salto de tiempo, las ecuaciones anteriores en la secuencia que han sido presentadas.

En el caso del programa *inflow*, tanto el armado de matrices y vectores elementales, como la implementación de los esquemas de integración temporal y algoritmos iterativos de solución de sistemas lineales, se han programado en subrutinas diferentes. A esto se agrega la arquitectura modular del programa, lo que permite solucionar de manera sencilla los problemas de programación, como también agregar nuevas subrutinas para tratar otros tipos de elementos, otras condiciones de contorno, y problemas más generales.

3 APLICACIÓN DEL ESQUEMA IMPLÍCITO MONOLÍTICO AL PROBLEMA DE FLUJO INCOMPRESIBLE

Se plantea la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles a través de un esquema implícito monolítico con dos algoritmos de integración temporal a saber: un esquema de primer orden de precisión en el tiempo (Euler Backward), y otro de segundo orden de precisión (Crank-Nicholson). Este esquema de integración permite trabajar con las ecuaciones de momentos y presiones desacopladas y resulta incondicionalmente estable (independiente del tamaño del salto de tiempo), mientras que se preserva la propiedad por la cual se pueden utilizar las mismas funciones de interpolación elementales para velocidad y presión. La no dependencia del tamaño del δt de este esquema, lo hace más apropiado para ciertos problemas, como flujos biológicos y ambientales, que el método de pasos fraccionados. Esto se debe a que el paso de tiempo requerido por este último método resulta de varios órdenes de magnitud menor que el necesario para la representación adecuada del problema físico.

En caso de utilizar los procesos de integración temporal antes mencionados, las ecuaciones de momento mantienen el carácter implícito, por lo que deben solucionarse mediante algún método iterativo de solución de sistemas lineales cuya matriz de coeficientes resulta no simétrica. Para ello se ha adoptado un método GMRES^{8,9} (Generalized Minimum Residual Method) preconditionado por una factorización incompleta de la matriz de coeficientes (ILUT).

Para la estabilización de la convección y la presión se utiliza el mismo método SUPG de

alto orden³ ya considerado en la sección anterior. Para la obtención del sistema de ecuaciones correspondiente al esquema implícito monolítico se efectúan dos particiones sucesivas en la ecuación de momentos del sistema (2.4)-(2.5) y se buscan las formulaciones monolíticas correspondientes que eliminen el error de partición³. El sistema de ecuaciones resultante ya estabilizado en presiones y advección es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} [\mathbf{M}] (\{\mathbf{u}^{n+1,i}\} - \{\mathbf{u}^n\}) + [\mathbf{K}_{c(\mathbf{u}^{n+\theta,i})}] \{\mathbf{u}^{n+\theta,i}\} + [\mathbf{K}_{STAB(\mathbf{u}^{n+\theta,i-1})}] + [\mathbf{K}_v] \{\mathbf{u}^{n+\theta}\} \\ = \frac{1}{\rho} [\mathbf{G}^*] \{\mathbf{p}^{n+1,i-1}\} + \{\mathbf{f}_{ext}^{n+\theta}\} + \{\mathbf{f}_{STAB(\mathbf{u}^{n+\theta,i-1}, \boldsymbol{\pi}^{n+\theta,i-1})}\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\delta t [\mathbf{L}] (\{\mathbf{p}^{n+1,i}\} - \{\mathbf{p}^{n+1,i-1}\}) + \tau ([\mathbf{L}] \{\mathbf{p}^{n+1,i}\} - [\tilde{\mathbf{D}}] \{\boldsymbol{\Xi}^{n+1,i-1}\}) = - [\mathbf{D}^*] \{\mathbf{u}^{n+1,i}\} \quad (3.2)$$

$$\{\boldsymbol{\pi}^{n+\theta,i}\} = \{\mathbf{RHS}_{\pi(\mathbf{u}^{n+\theta,i})}\} \quad (3.3)$$

$$\{\boldsymbol{\Xi}^{n+1,i}\} = [\tilde{\mathbf{M}}_1]^{-1} [\tilde{\mathbf{G}}] \{\mathbf{p}^{n+1,i}\} \quad (3.4)$$

donde las matrices y vectores presentes se ensamblan a partir de las matrices y vectores elementales ya vistos. Dicho sistema se soluciona a través de un esquema iterativo de Gauss de Bloque (se solucionan iterativamente las ecuaciones en la secuencia que están presentadas) hasta lograr una convergencia adecuada en velocidades y presiones del paso.

Puede verse que, tal como está planteada la ecuación matricial de momentos, no se ha linealizado el término convectivo ni su estabilización. En el caso del presente trabajo se linealizaron dichos términos a través de dos métodos: Uno es el método de linealización de Picard y el otro es el método de Newton-Raphson¹.

Para las *discretizaciones* temporales que se utilizan en el esquema implícito monolítico, se adopta $\theta = \frac{1}{2}$ en el esquema de segundo orden tipo Crank-Nicholson, y $\theta = 1$ en el esquema de primer orden tipo Euler Backward. Luego:

$$\{\mathbf{u}^{n+\theta,i}\} = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}^{n+1,i}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}^{n,i}\} \quad \mathbf{Crank-Nicholson}$$

$$\{\mathbf{u}^{n+\theta,i}\} = \{\mathbf{u}^{n+1,i}\} \quad \mathbf{Euler Backward}$$

Los dos algoritmos de integración temporal planteados para el esquema Implícito Monolítico resultan muy similares, esto justifica una implementación conjunta de los mismos.

El programa *inflow* se compone de 85 subrutinas, un módulo de definición de variables de trabajo y un módulo de definición de las funciones de álgebra, operación con matrices y vectores en formato sparse CSR. Del total de subrutinas, 13 son funciones de ensamblaje global de matrices y vectores, 32 son rutinas de armado de entidades elementales (triángulos lineales y cuadráticos, y segmentos del contorno lineales y cuadráticos) y 12 son funciones de operación con matrices y vectores en formato sparse CSR. Además se cuenta con subrutinas de inicialización de variables, algoritmos iterativos de solución de sistemas lineales, implementación del modelo de turbulencia, entrada y salida de datos, esquemas de integración, cálculo de condiciones de contorno especiales y fuerzas sobre el contorno.

La función general de organización del programa *inflow.exe* es la función homónima, y su código puede verse en la carpeta `\inflow`¹. Dicha función general no realiza ningún tipo de cálculo, solamente llama a las demás subrutinas, siguiendo una secuencia de solución.

Básicamente se leen los datos del problema desde el archivo `inflow.dat` a través de la subrutina `readgid`, se arman las listas de grados de libertad y restricciones para presiones y velocidades y se arma la matriz de transformación cinemática $[Lv]$ asociada a la condición de contorno de velocidad normal nula¹.

Luego se dimensionan las matrices y los vectores que serán usados por el esquema de integración, de acuerdo al tamaño de la malla a resolver (dichas variables se definen en el módulo de datos *matmod*) y se efectúan algunos cálculos auxiliares.

Posteriormente se llama al esquema de integración elegido por el usuario para realizar la simulación. Para ello se llama a una de las funciones *fracstep* (pasos fraccionados) ó *imsolver2* (implícito monolítico de primer y de segundo orden de precisión en la integración temporal). La escritura de resultados se va haciendo dentro de estas funciones a medida que se avanza en la solución.

4 RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 *Flujo viscoso inestacionario alrededor de un cilindro*

Un ejemplo clásico de separación de capa límite y formación de vórtices que interaccionan con la estela desarrollada atrás de un cuerpo romo, es el flujo alrededor de un cilindro. Dicho ejemplo resulta fundamental para evaluar el comportamiento de algoritmos de integración de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre problemas no estacionarios, ya que se cuenta con datos muy precisos sobre dicho fenómeno oscilatorio. Por ello, este ejemplo permite estudiar el comportamiento de los tres esquemas numéricos desarrollados en este trabajo.

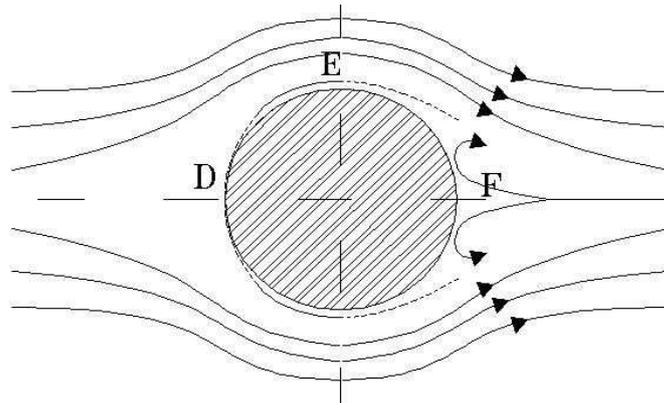


Figura 1: Ejemplo 4.1: Esquema de flujo viscoso alrededor de un cilindro.

El fenómeno producido por el flujo viscoso alrededor del cilindro puede interpretarse considerando la Figura 1. Al aumentar la velocidad del flujo, se incrementa la fuerza de fricción que se opone al movimiento de la partícula dentro de la capa límite, y la partícula consume energía cinética en su trayectoria desde D a E. Luego, el remanente de energía resulta insuficiente para vencer el gradiente de presión adverso en el desplazamiento de E a F, y las fuerzas

de presión hacen que la partícula se desvíe de su trayectoria y se mueva en dirección opuesta. Esto origina la formación de un vórtice, el cual incrementa su tamaño y termina por separarse del cilindro, moviéndose aguas abajo en el fluido.

En el estado de régimen, se observan vórtices que giran en sentido horario y antihorario, desprendiéndose desde arriba y abajo del cilindro respectivamente. Estos últimos generan una zona de succión por detrás del cilindro, lo cual aumenta la resistencia del mismo.

A una determinada distancia del cilindro, se observa una trayectoria regular de vórtices que se mueven alternadamente en sentido horario y antihorario conocida como **calle de vórtices de Karman**. Se sabe que se produce un desprendimiento regular de vórtices para un rango de números de Reynolds, basados en el diámetro del cilindro, que va desde 60 hasta 5000. Cuando $Re < 60$, las perturbaciones son amortiguadas y la estela conserva una forma laminar, para números Re mayores a 5000 la estela resulta una mezcla totalmente turbulenta^{10, 11}.

Mediciones experimentales para el caso de un cilindro demuestran que la frecuencia depende únicamente del número de Reynolds, en el rango de formación de la calle de vórtices de Karman. El número de Reynolds se calcula en base al diámetro del cilindro y la velocidad del flujo sin perturbar (velocidad de entrada). Este caso se utiliza habitualmente para chequear la precisión en el tiempo de los esquemas numéricos de flujo incompresible.

Se utilizó el sistema internacional de unidades por lo que las longitudes se expresaron en metros. Se adoptaron valores para la densidad del fluido ρ , la viscosidad dinámica μ , la velocidad de entrada u_e y el diámetro del cilindro D . El número de Reynolds resulta:

$$\rho = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \quad \mu = 0,01 \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \quad u_e = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad D = 1 \text{ m} \quad \rightarrow \quad Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} = 100$$

El dominio utilizado y las condiciones de contorno para el problema pueden verse en la Figura 2. Se define la velocidad en la sección de entrada, el contorno superior y el inferior, la condición de contorno abierto en la salida que permite recortar el dominio de flujo, y la condición de no deslizamiento en el contorno del cilindro.

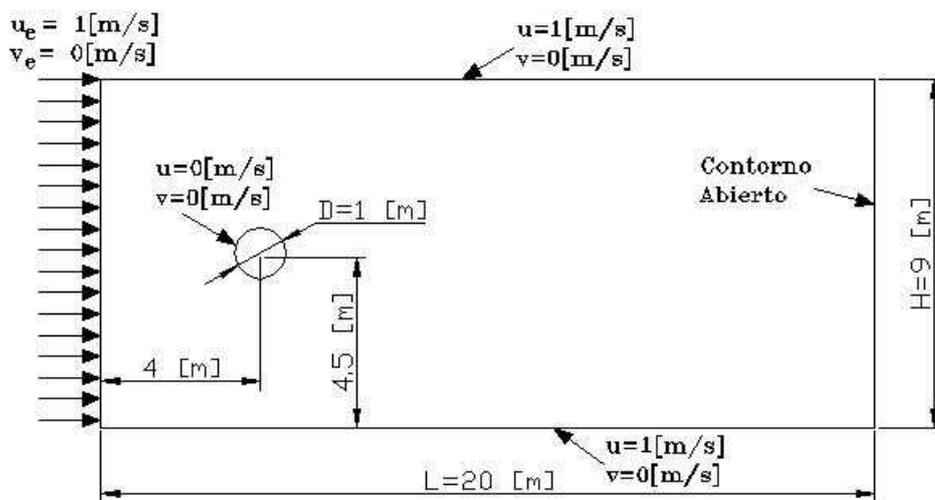


Figura 2: Ejemplo 4.1: Condiciones de contorno en el problema de flujo viscoso alrededor de un cilindro.

En la simulación se utilizó una malla de 10899 nodos y 21168 elementos triángulos lineales (Figura 3) y se integró en el tiempo durante un intervalo de 52 segundos hasta lograr el estado de régimen, mediante el método de pasos fraccionados. Para integrar dicho intervalo se requirieron unas 800000 iteraciones y tres días de trabajo de un ordenador Pentium IV 2,4 GHz.

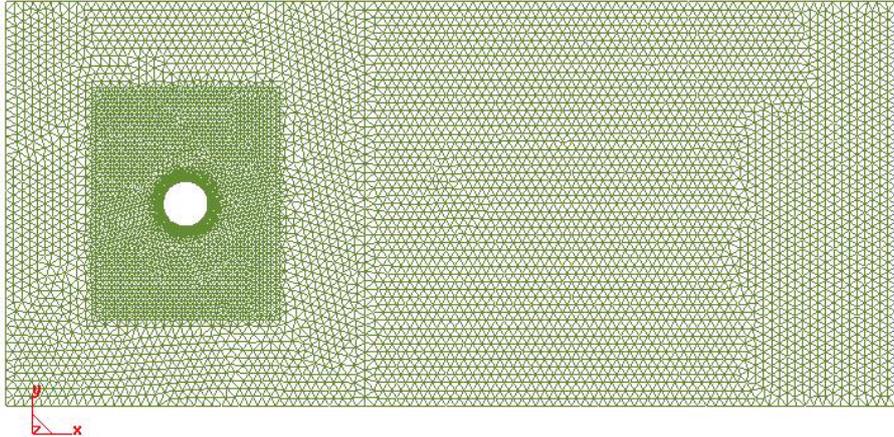


Figura 3: Ejemplo 4.1: Mallado del dominio utilizado en el problema de flujo viscoso alrededor de un cilindro.

Con los valores resultantes de presión y velocidad, se procedió a integrar mediante el método de pasos fraccionados (se tomó un número máximo de 300000 iteraciones), y mediante el método implícito monolítico en sus dos versiones. Para ambas versiones del esquema implícito monolítico se utilizó un valor de $\delta t = 0,05$ segundos y 450 pasos de tiempo en la simulación. Se utilizó una convergencia en la iteración de Gauss de bloque para el paso de:

$$|\{\mathbf{u}^{n+1,i}\} - \{\mathbf{u}^{n+1,i-1}\}| \leq 0,01 \quad \text{y} \quad |\{\mathbf{p}^{n+1,i}\} - \{\mathbf{p}^{n+1,i-1}\}| \leq 0,01$$

La variación del coeficiente de fuerza lateral (sustentación) debida a la presión para ambos esquemas y del coeficiente de arrastre debido únicamente a la presión para el esquema implícito monolítico pueden verse en las Figuras 4 y 5.

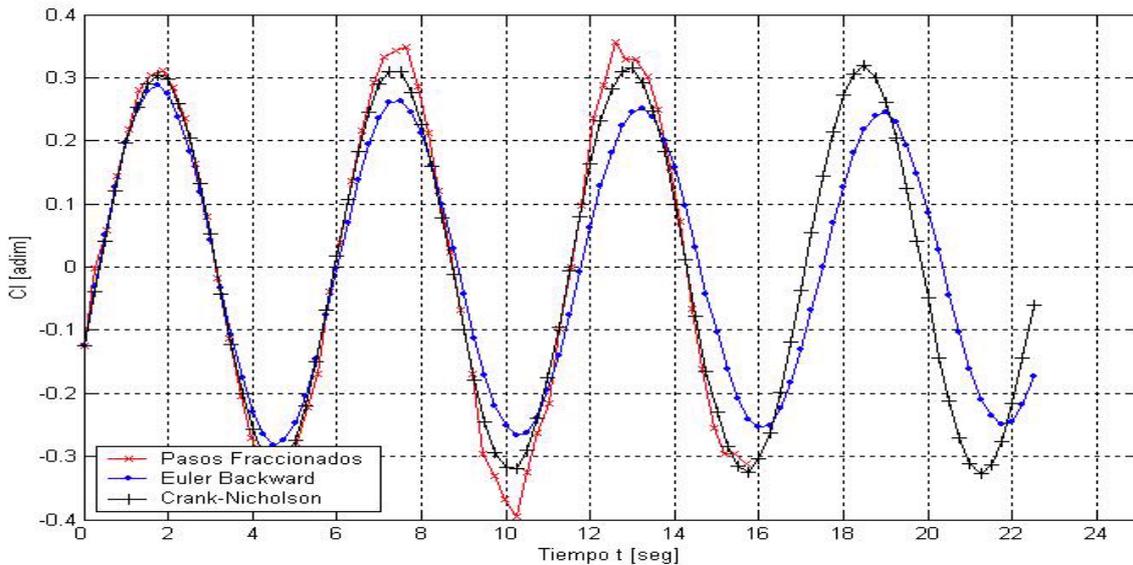


Figura 4: Ejemplo 4.1: Variación en el tiempo del coeficiente de fuerza lateral debida a presión.

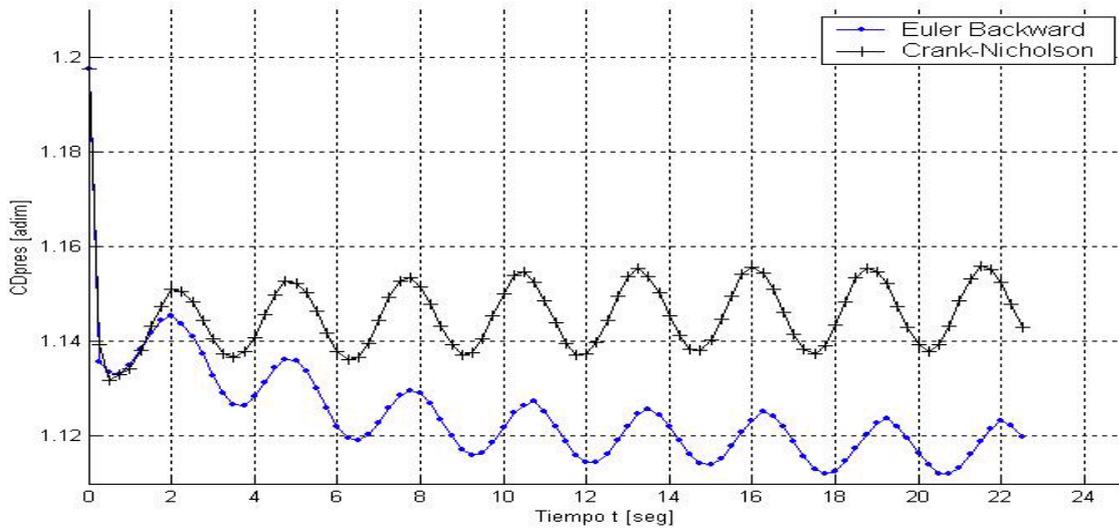


Figura 5: Ejemplo 4.1: Variación en el tiempo del coeficiente de arrastre debida a presión.

De los gráficos se desprende que las fuerzas mantienen la forma sinusoidal al usar el esquema implícito monolítico y que hay cierto grado de disipación en el caso del esquema de primer orden. La forma de las curvas de fuerzas en el caso del esquema de pasos fraccionados resultó muy dependiente de la discretización del dominio (número de elementos), aún así, la frecuencia de oscilaciones resulta idéntica a la del esquema de segundo orden.

Según [12], el período de oscilación de la fuerza lateral para el caso de $Re = 100$ resulta $T = 5,98$ segundos, siendo la frecuencia asociada $f = 0,167$ Hz. En el caso del esquema implícito monolítico de segundo orden y esquema de pasos fraccionados el período resultó $T = 5,75$ segundos, un 3,8 % inferior al valor de referencia. En el caso del esquema de integración implícito monolítico de primer orden el período resultó levemente superior a los otros dos, 5,8 segundos. El período de la fuerza de arrastre resulta la mitad del valor del período de fuerza lateral, para todos los esquemas de integración. Para el esquema de pasos fraccionados el andar de la fuerza de arrastre (no mostrado en la Figura 13) pierde completamente la forma sinusoidal, aunque se mantiene oscilatorio. Las amplitudes resultantes en fuerzas laterales para el esquema de segundo orden resultaron idénticas a las amplitudes expuestas en [3] para el mismo esquema en este problema.

Cabe recalcar que en este caso de análisis de transitorio a bajo número de Reynolds, la integración sobre un intervalo de 22,5 segundos requirió para las versiones del esquema implícito monolítico un tiempo de máquina de 45 minutos aproximadamente en el ordenador anteriormente nombrado, mientras que, con las mismas condiciones iniciales, la integración de un intervalo de 15,8 segundos tomó un tiempo de 36 horas de trabajo en dicho ordenador para el esquema de pasos fraccionados. Se desprende entonces, que el esquema implícito monolítico resulta mucho más económico que el esquema de pasos fraccionados para estos problemas, conclusión que también se menciona en [3]. En las Figuras 6, 7 y 8 pueden verse los vectores de velocidad, y los contornos de velocidades y presiones detrás del cilindro para un tiempo de simulación $t = 74,5$ segundos, para la integración con esquema de segundo orden.

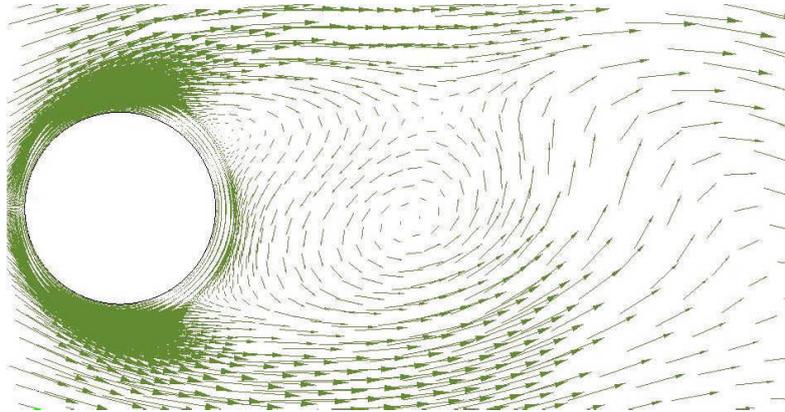


Figura 6: Ejemplo 4.1: Vectores velocidad para $t = 74,5$ segundos (esquema implícito monolítico de 2^{do} orden).

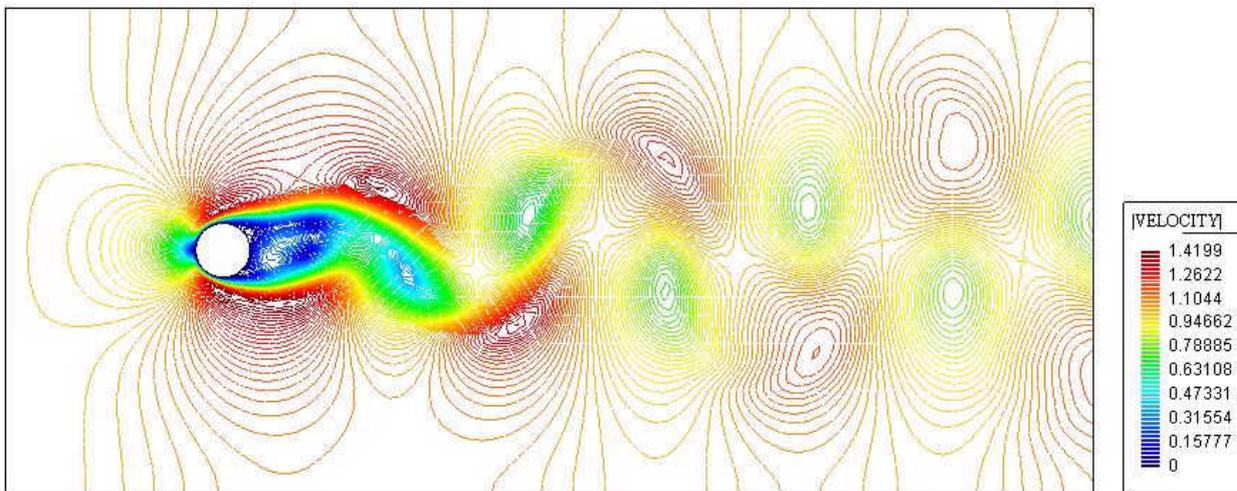


Figura 7: Ejemplo 4.1: Contornos de velocidades en [m/seg], para un tiempo $t = 74,5$ segundos (esquema implícito monolítico de segundo orden).

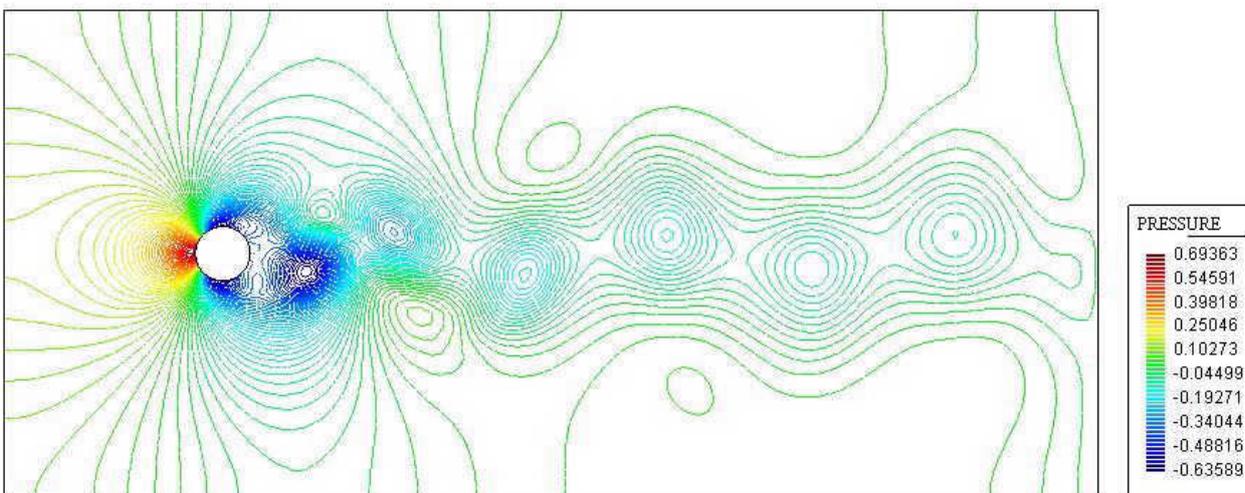


Figura 8: Ejemplo 4.1: Contornos de presiones en [Pa], para un tiempo $t = 74,5$ segundos (esquema implícito monolítico de segundo orden).

4.2 *Flujo viscoso alrededor de un perfil NACA 0008 a muy bajo número de Reynolds.*

En el presente ejemplo se efectúa una comparación de las características de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0008 a $Re = 2000$, obtenidas mediante el programa inflow, con los resultados obtenidos por Peter Kunz y Ilan Kroo¹³, quienes para el análisis de perfiles a muy bajo Re utilizaron un software de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles basado en el método de diferencias finitas^{14, 15}.

Para el estudio del perfil a distintos ángulos de ataque (se analizaron los casos $\alpha = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ y 7°) se utilizaron diferentes mallas rotando el perfil en ángulos de 1° respecto del punto ubicado en su línea media a $0,5c$ del borde de ataque, donde c es la cuerda del perfil que se tomó en todos los casos igual a $1 [m]$. Las dimensiones generales (en metros) del dominio y condiciones de contorno prescriptas pueden verse en la Figura 9. Como propiedades del fluido se tomaron:

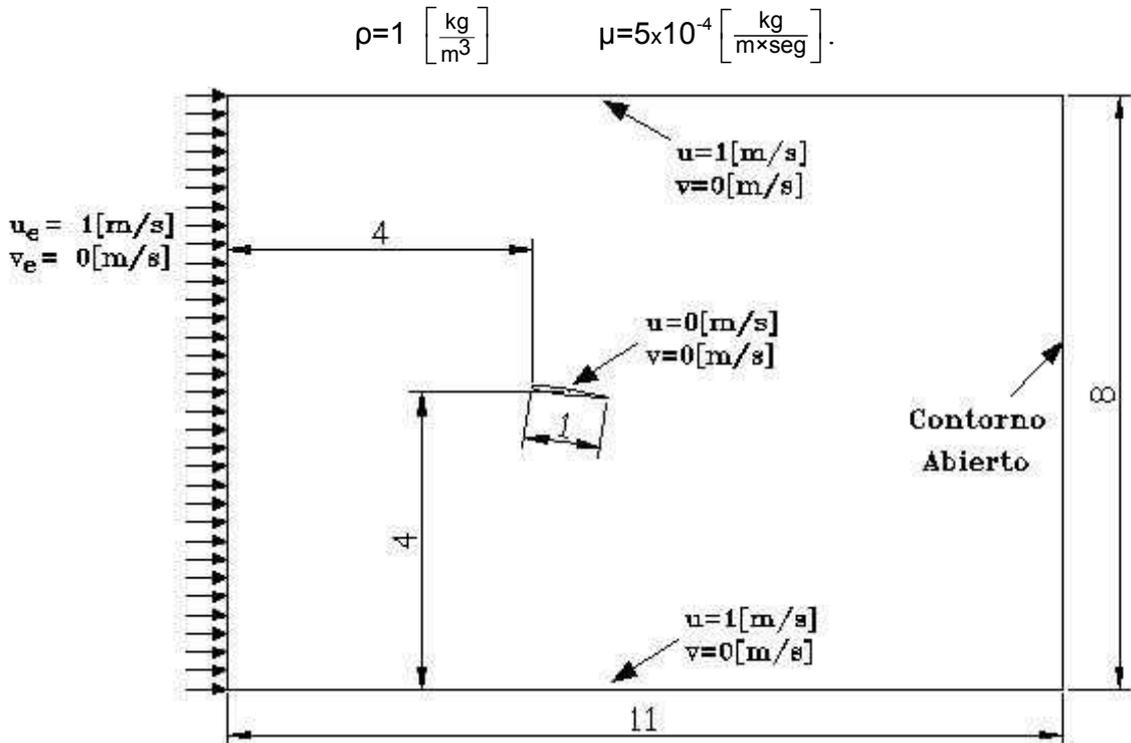


Figura 9: Ejemplo 4.2: Condiciones de contorno sobre dominios de estudio de perfil NACA 0008.

En la sección de entrada se dio un valor de velocidad horizontal de $u_e = 1 \left[\frac{m}{seg} \right]$ y velocidad vertical nula, al igual que en los contornos superior e inferior. En la sección de salida se especificó la condición de contorno abierto y sobre el contorno del perfil se prescribió la condición de no deslizamiento. Sobre los segmentos del contorno del perfil se especificó la condición de conjunto para la integración de fuerzas debidas a presiones y tensiones deviatóricas.

En todos los casos se discretizó la zona adyacente al contorno mediante una malla de triángulos lineales estructurada para obtener una buena representación del desarrollo de la capa límite (ver Figura 10).

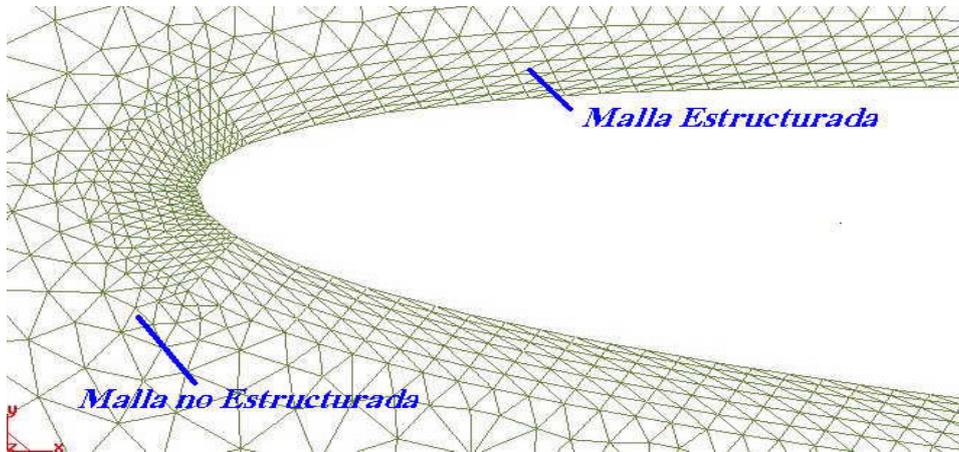


Figura 10: Ejemplo 4.2: Vista del mallado estructurado en zona cercana al borde de ataque del perfil ($\alpha=5^\circ$).

El número de nodos en las diferentes mallas se mantuvo entre 10000 y 13000, y el número de elementos triángulos lineales entre 20000 y 25000. En todos los casos se estipuló una velocidad horizontal inicial de $1 \left[\frac{m}{seg} \right]$, y velocidad vertical y presiones iniciales nulas. Se utilizó en todas las soluciones el algoritmo implícito monolítico de segundo orden de precisión en el tiempo (Crank-Nicholson) y se dio un $\delta t = 0.01 \text{ [seg]}$. Además se dio un número máximo de 1200 iteraciones y se definió una tasa convergencia absoluta en la iteración de Gauss de bloque menor a 0,01. En todos los casos se logró una tasa de convergencia en fuerzas de:

$$\frac{\|f_{n+1} - f_n\|}{\|f_n\|} < 10^{-4}$$

La característica de disminución del pico de presión común en perfiles a muy bajo Re, y por ende del gradiente adverso de presiones, puede verse para el perfil a $\alpha = 0^\circ$ en la Figura 11. Allí puede verse que no hay recuperación de presión en el borde de fuga debido al gran espesor que ha desarrollado la capa límite en dicha zona, lo cual se traduce para el flujo sin perturbar en un incremento aparente del espesor del perfil.

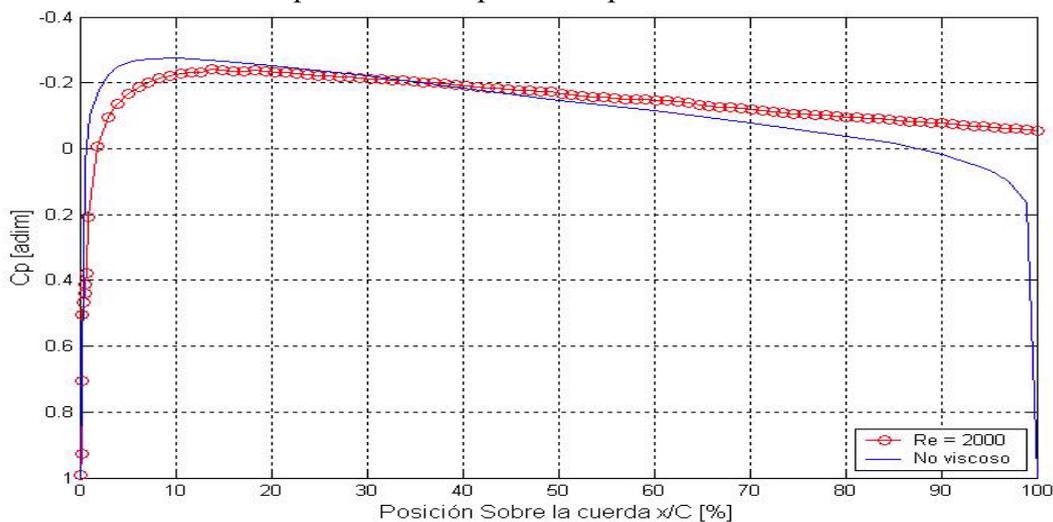


Figura 11: Ejemplo 4.2: Valores del coeficiente de presión obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=0^\circ$

Los gráficos resultantes de coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque y sustentación vs. resistencia pueden verse en las Figuras 12 y 13 respectivamente.

La comparación de los resultados obtenidos, con aquellos dados en [5] permite ver que estos coinciden en buena medida para el caso del coeficiente de sustentación. En el caso del coeficiente de resistencia se tienen pequeñas variaciones (no mayores al 3%) con una tendencia a valores mayores que los presentados en la citada referencia.

Se observa en la Figura 12 que la pendiente de sustentación resulta $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \approx 4.19 \left[\frac{1}{\text{rad}} \right]$, valor bastante menor al correspondiente al caso no viscoso $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \approx 2\pi \left[\frac{1}{\text{rad}} \right]$. Por otro lado, se aprecia que el desprendimiento en el borde de fuga comienza a tener efecto sobre el andar de la curva $C_L - \alpha$ a partir de un ángulo de ataque de 4° .

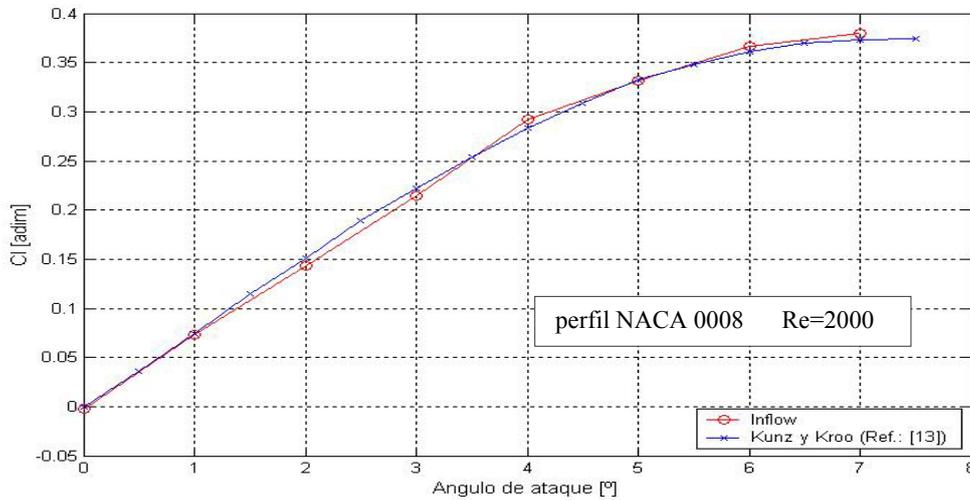


Figura 12: Ejemplo 4.2: Valores del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque.

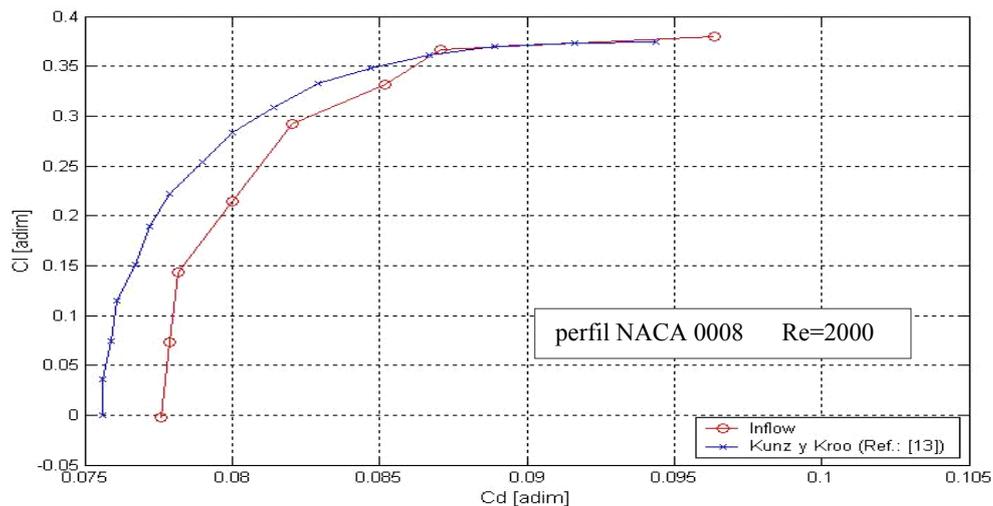


Figura 13: Ejemplo 4.2: Valores del coeficiente de resistencia en función del coeficiente de sustentación.

Cabe recalcar que, a partir de un ángulo de ataque de 5° , la interacción de vórtices desprendidos en el borde de fuga, originados en la pérdida de sustentación en dicha zona, con la estela del flujo se produce un fenómeno no estacionario similar al del ejemplo anterior. Esto obligó a promediar coeficientes para ángulos mayores a 5° .

En las Figuras 14, 15 y 16 pueden verse los contornos de velocidad para ángulos de ataque de 0° , 2° y 6° , y en la Figura 17 puede verse la extensión de la zona de pérdida sobre extradós para 7° a partir de los vectores de velocidad. En las figuras 18, 19 y 20 pueden verse los contornos de presión para los ángulos 0° , 2° y 6° respectivamente. En éstas puede verse que para ángulos de 6° o mayores se forma de la calle de vórtices de Karman sobre la estela.

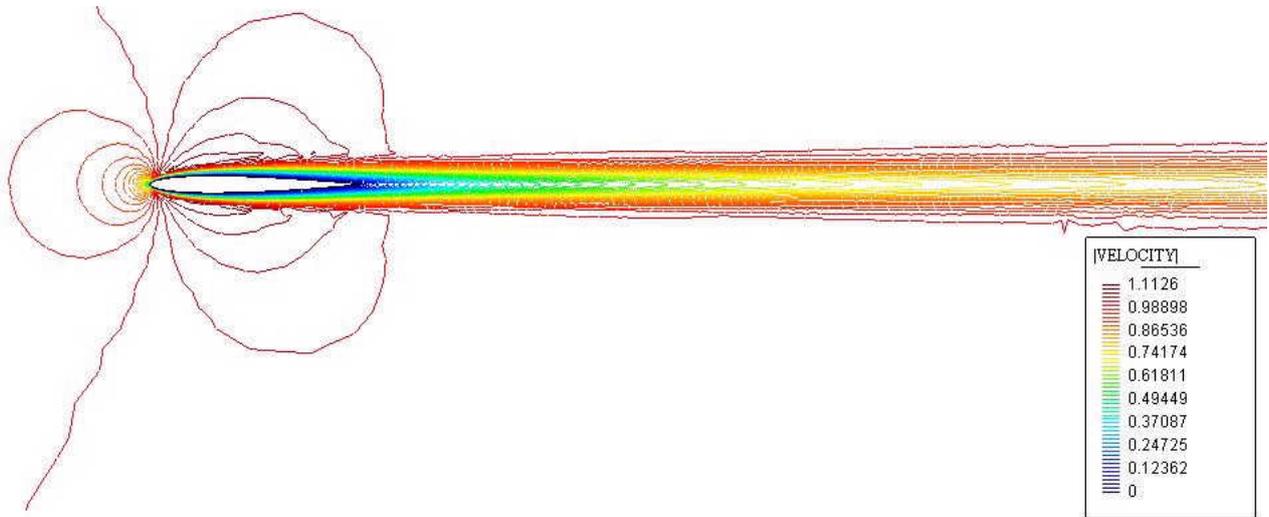


Figura 14: Ejemplo 4.2: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=0^\circ$.

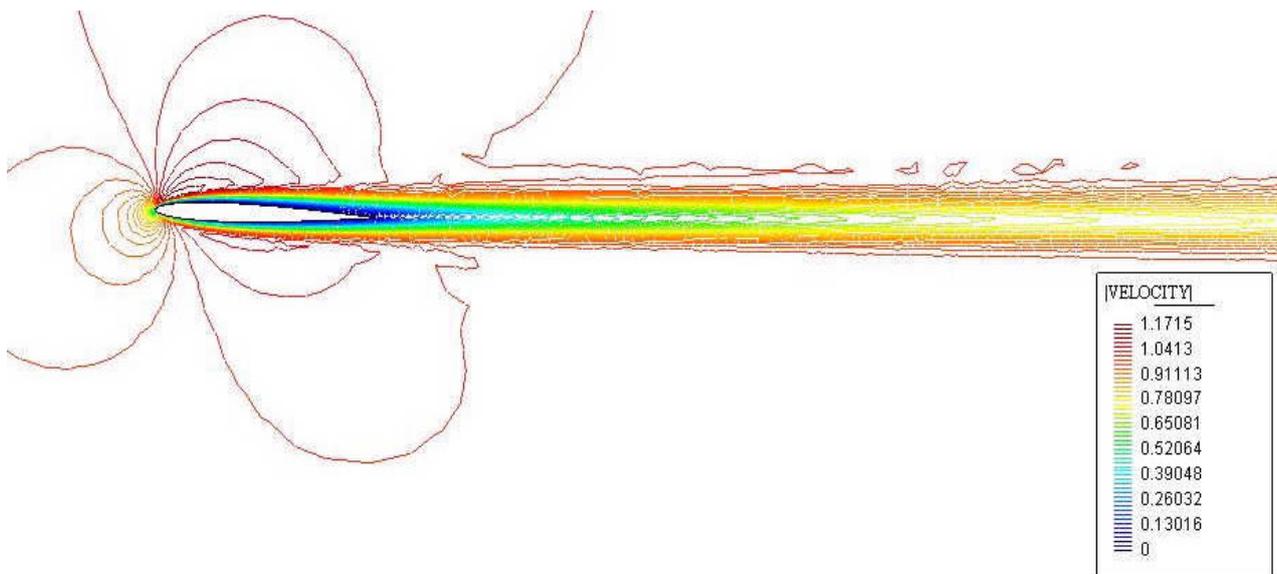


Figura 15: Ejemplo 4.2: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=2^\circ$.

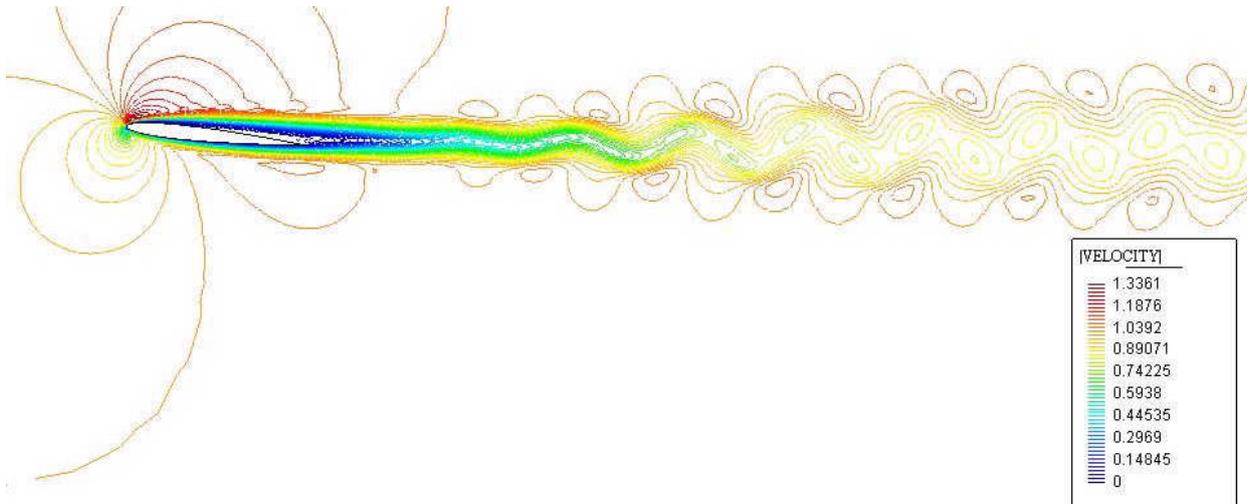


Figura 16: Ejemplo 4.2: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=6^\circ$.

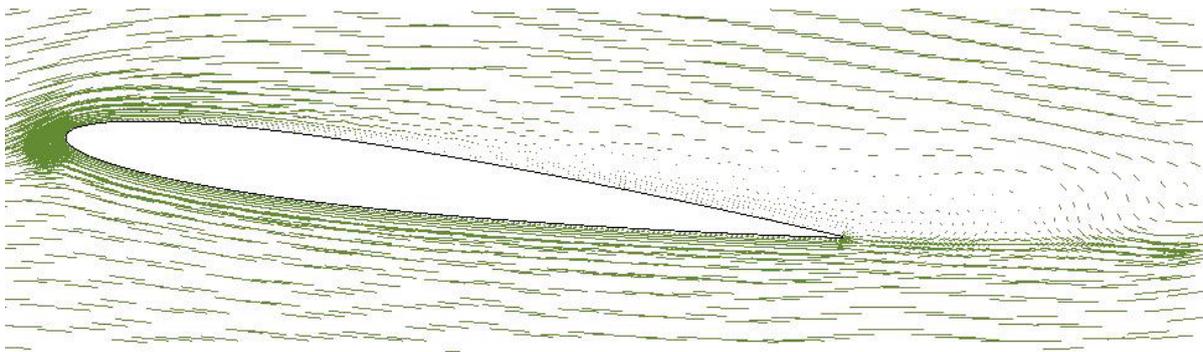


Figura 17: Ejemplo 4.2: Vectores de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=7^\circ$.
Se distingue sobre el extradós la zona de desprendimiento.

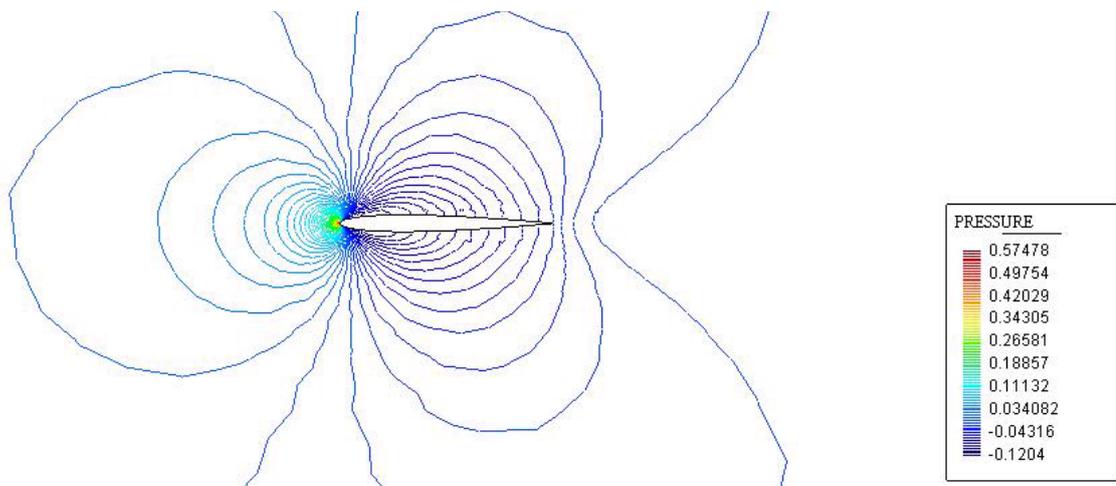


Figura 18: Ejemplo 4.2: Contornos de presión obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=0^\circ$.

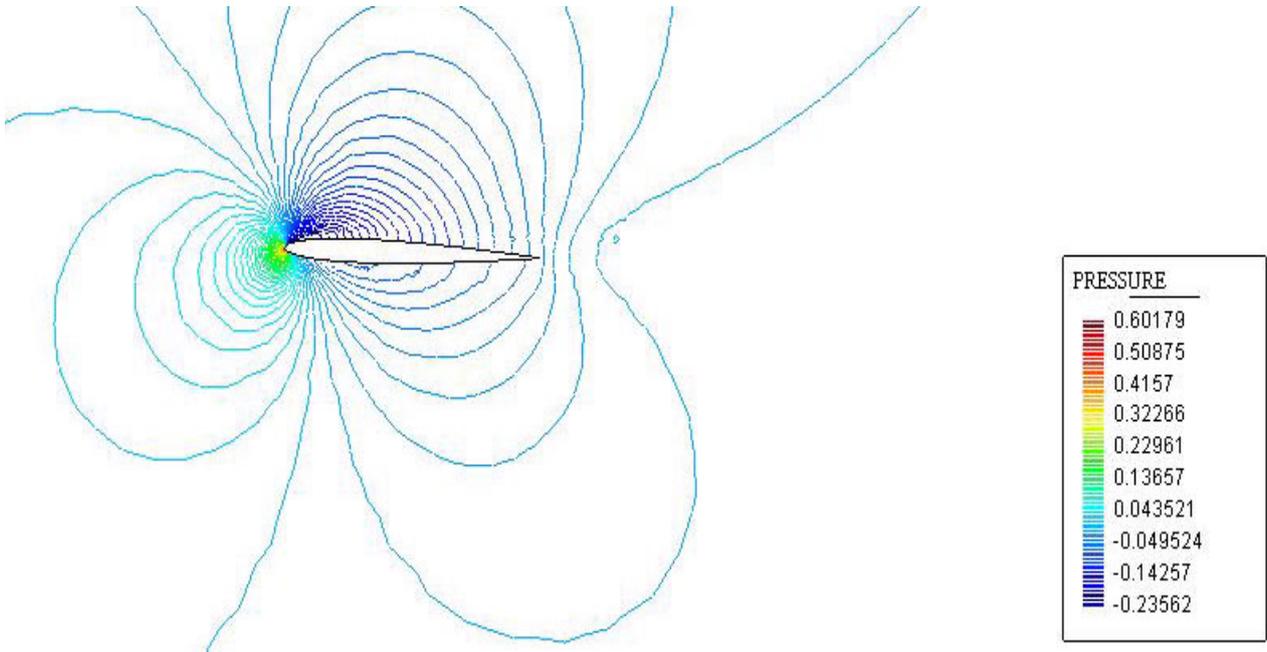


Figura 19: Ejemplo 4.2: Contornos de presión obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=2^\circ$.

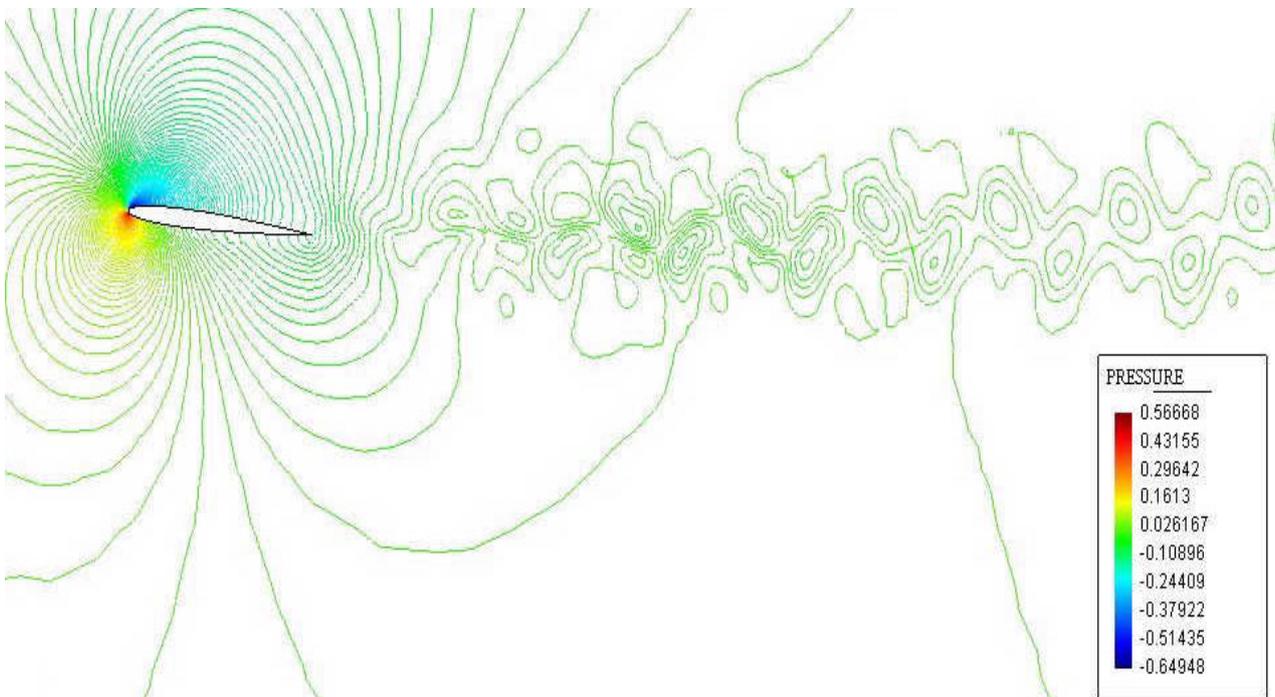


Figura 20: Ejemplo 4.2: Contornos de presión obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha=6^\circ$.

5 CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo, de generar un paquete de herramientas computacionales de trabajo y aprendizaje para los problemas estudiados ha sido alcanzado. En la programación de las herramientas *inflow*, se priorizó una lógica modular que facilita la extensión del software para tratar problemas más generales, por sobre la eficiencia de cálculo, la cual puede incrementarse en una etapa posterior.

El desarrollo de las ecuaciones matriciales elementales a partir de la lógica utilizada en análisis estructural por el método de elementos finitos, en la cual los integrandos se expresan como productos de matrices y vectores, requirió de un gran esfuerzo, considerando que en el área de mecánica de fluidos no suele darse este tratamiento al tema. Los resultados obtenidos, generales para cualquier tipo de elemento, resultan en una implementación eficiente debido al uso de matrices y vectores tipo sparse. Los resultados obtenidos con elementos cuadráticos fueron excelentes, más si se tiene en cuenta que los mismos no se utilizan en mecánica de fluidos, por lo que su comportamiento era una incógnita.

Respecto de la comparación de los dos esquemas de integración estudiados, puede concluirse que el esquema Implícito monolítico resulta más eficiente que el esquema de pasos fraccionados en problemas transitorios a números de Reynolds bajos, donde la escala de tiempo para la estabilidad del esquema de pasos fraccionados resultan varios órdenes de magnitud menores que la escala del transitorio. Sin embargo el esquema implícito monolítico no resulta convergente para cualquier salto de tiempo en la integración temporal, por lo que se requiere conocer los intervalos dentro de los cuales se tendrá convergencia (relacionados en cierta medida con el salto de tiempo crítico de toda la malla). “Nada puede afirmarse respecto de ambos métodos para altos números de Reynolds hasta que la implementación de la condición de ley de pared permita utilizar tamaños de malla posibles de solucionar sin un esfuerzo de cálculo demasiado grande.”

En cuanto a futuros desarrollos, las líneas de acción pueden estar orientadas a la implementación de otros modelos de turbulencia más complejos, al tratamiento del problema tridimensional, a la implementación de la condición de ley de pared en casos 2D y 3D; al acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles con la ecuación de la energía a través de fuerzas de Boussinesq (flotación); y al tratamiento de fuerzas debidas a la rotación, entre otros.

6 REFERENCIAS

- [1] Vanella Marcos ; "*Herramientas Computacionales para la Mecánica de Fluidos basadas en el Método de Elementos Finitos*", Trabajo Final de la carrera de Ingeniería Aeronáutica, Asesor Dr. Ing. Carlos Sacco, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba. Este trabajo en formato pdf puede solicitarse al autor. (2004).
- [2] Codina R. ; "*Pressure Stability in Fractional Step finite Element Methods for Incompressible Flows*", Journal of Computational Physics. (2000).
- [3] Soto O., Löhner R., Cezbral J., and Codina R. ; "*A Time Accurate Implicit-Monolithic Finite Element Scheme for Incompressible Flow Problems*", paper presented in ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference. (2001).
- [4] Cook Robert D., Malkus David S. and Plesha Michael E. ; "*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*", third edition, John Wiley & Sons. (1989).
- [5] Reddy J. N. ; "*An Introduction to the Finite Element Method*", 2nd edition, McGraw-Hill, Inc. (1993).
- [6] Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. ; "*The finite Element Method*", Vol. I, fourth edition, McGraw-Hill Book Company. (1989).
- [7] Bathe K. J. ; "*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*", second edition, Prentice Hall Inc. (1995).
- [8] Saad Y. ; "*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*," Copyright© by Yousef Saad, Second Edition with corrections. Disponible en Internet. (2000).
- [9] Saad Y. ; "*SPARSEKIT: a basic tool for sparse matrix computations*", Versión 2, Universidad de Minnesota, Minneapolis, Minnesota. (1993).
- [10] Fox Robert W., McDonald Alan T. ; "*Introducción a la Mecánica de fluidos*", segunda edición, McGraw-Hill Book Company.
- [11] Schlichting H. ; "*Boundary Layer Theory*," McGraw Hill, New York. (1969).
- [12] Roshko A. ; "*On the development of turbulent wakes from vortex streets*", Technical Report 1194, NACA. (1954).
- [13] Kunz P. J. and Kroo I. ; "*Analysis and Design of Airfoils for Use at Ultra-Low Reynolds Numbers*", Progress in Aeronautics and Astronautics, Vol. 195, páginas 35-60, AIAA. (2001).
- [14] Rogers S. E. and Kwak D. ; "*An Upwind Differencing Scheme for the Steady-State Incompressible Navier-Stokes Equations*," NASA TM 101051. (1988).
- [15] Rogers S. E. and Kwak D. ; "*An Upwind Differencing Scheme for the Time Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations*," AIAA Journal, Vol. 28, páginas 253-262. (1990).