

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES RUNGE Y KUTTA 4 (RK4) A UN MODELO DE SIMULACIÓN LONGITUDINAL DE DINÁMICA VEHICULAR TERRESTRE

Gustavo R. Di Rado<sup>a</sup>, Gustavo H. Devincenzi<sup>b</sup>, Daniel S. Presta García<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Vías de Comunicación, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, 3500 Resistencia, Chaco, Argentina, [gdirado@ing.unne.edu.ar](mailto:gdirado@ing.unne.edu.ar), <http://ing.unne.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Departamento de Computación, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, 3500 Resistencia, Chaco, Argentina, [gdevin@ing.unne.edu.ar](mailto:gdevin@ing.unne.edu.ar).*

<sup>c</sup>*Departamento de Expressão Gráfica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99 sala 408/5, Porto Alegre, RS - Brasil, [daniel.garcia@ufrgs.br](mailto:daniel.garcia@ufrgs.br).*

**Palabras Clave:** Simulación, Dinámica vehicular, Fuerzas longitudinales

**Resumen.** El concepto de simulador de conducción existe desde los años 70 y fue ganando importancia a través del tiempo con el desarrollo de nuevos computadores capaces de representar gráficos en tres dimensiones (3d) de alta calidad.

Numerosas investigaciones han demostrado que los simuladores interactivos son una buena alternativa para obtener datos bajo condiciones controladas en el laboratorio, mejor que en la realidad, lo que evita riesgos de vida y gastos de tiempo y dinero para construir los equipamientos necesarios para hacer estos mismos ensayos in situ. Esta situación contribuye de gran manera a la realización de distintas pruebas en los diversos campos de la seguridad vial.

En este trabajo se aplica un modelo simplificado de simulación de dinámica longitudinal utilizando un motor de combustión interna de encendido por chispa y tomando en cuenta las fuerzas resistentes que se oponen al movimiento del vehículo virtual sobre la superficie terrestre en diferentes tipos de terreno (llanos u ondulados) y bajo diferentes condiciones ambientales.

Finalmente se presenta la ecuación de aceleración, la cuál es integrada en el tiempo por el método Runge y Kutta 4 (RK4).

El objetivo principal del proyecto es el diseño de un simulador de conducción de automóviles para su utilización en la verificación de la consistencia geométrica de carreteras.

## 1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del ingeniero de tránsito es la provisión de un sistema seguro para el tráfico en las carreteras. Esta es una tarea con diversas áreas de dificultad. En los últimos años las muertes en accidentes de tránsito en la República Argentina han oscilado entre 7.000 y 8.000 personas por año, siendo de aproximadamente 7700 en 2010, con un promedio del orden de 21 personas por día.

Esto se ha transformado en una problemática mundial. En los últimos años las muertes en las carreteras de EE.UU. han oscilado entre 40.000 y 43.000 por año, cifra menor que los máximos experimentados en la década del '70, cuando se llegó a más de 55.000 accidentes de tráfico por año. Esta mejora se debió mayormente a la aplicación de políticas punitivas, de prevención y de educación vial, aunque aún los valores actuales son extremadamente altos. Más estadounidenses han muerto en las carreteras de EE.UU. que en todas las guerras en las que la nación ha participado, incluyendo la Guerra Civil (Roess R., Prassas E., Mc Shane W, 2004).

La estructura vial se compone de tres elementos fundamentales: El Conductor, El vehículo y La Vía.

Estas variables constituyen las bases sobre las cuales se funda la seguridad vial, y como ninguna de ellas puede ser considerada de forma individual, su interacción debe ser revisada exhaustivamente para asegurar resultados con un grado de eficiencia aceptable.

Otra instancia a tener en cuenta es la condición del medio ambiente (lluvia, niebla, noche, carpeta de rodamiento resbaladiza, etc.) la cuál cumple un rol muy importante en la disminución de la capacidad de conducción de vehículos.

La Ingeniería de tráfico sería mucho más sencilla si los distintos componentes del sistema de tránsito tuvieran características uniformes. Los dispositivos de control de tráfico serían fácilmente diseñados si todos los conductores reaccionaran a ellos en la misma forma con lo que finalmente la seguridad podría lograrse más fácilmente.

Lo cierto es que hay una diversidad de elementos importantes a considerar y difíciles de interrelacionar a través de un modelo de representación confiable.

El simulador de conducción de vehículos para aplicación en la verificación de la seguridad vial de carreteras se ha transformado en una herramienta de vital importancia a partir de la posibilidad de generar gráficos y mallados tridimensionales que conforman escenarios de realidad virtual en donde se logran representar distintas situaciones que pueden ser enfrentadas durante el proceso de manejo vehicular.

Dos de los elementos mencionados, componentes de la estructura vial, el vehículo y la vía, pueden ser cuantificados y ajustados a través de relaciones físico-matemáticas y geométricas con cierto grado de precisión aceptable, comparando los modelos generados con el comportamiento dinámico real de diferentes tipos de vehículos con mediciones topográficas georreferenciadas por dispositivos GPS y uso de software específico como lo es GOOGLE EARTH®, junto con sistemas de diseño asistido por computadora.

Una de las principales ventajas del uso de un simulador es que da la posibilidad de lidiar con la variable más aleatoria y difícil de valorar de la estructura vial, “el conductor”, o en definitiva “el ser humano”.

Las dos características “medibles” de mayor importancia para un conductor son los factores de agudeza visual y tiempo de reacción. Los dos se superponen, ya que la reacción requiere de la visión como uno de los elementos fundamentales para la percepción de las señales de conducción. La comprensión de cómo la información es recibida y procesada por “el conductor” es un elemento clave en el diseño y control de las carreteras.

Hay otras características importantes, como por ejemplo la audición, que es otro elemento substancial en la tarea de conducir. Este sentido nos permite distinguir diferentes señales de alerta como lo son las bocinas, sirenas de vehículos de emergencia, frenadas bruscas, ruidos de una colisión, etc.

Finalmente, uno de los factores humanos más importante e influyentes en la conducción, es la personalidad y la psicología del conductor. Esta es la variable más difícil de cuantificar y considerar en la ingeniería de tránsito. No existe una relación matemática o física que la pueda representar, es totalmente estocástica. El estado de ánimo de una persona incluso puede variar en función de problemas de coyuntura que pueda estar atravesando de manera transitoria, involucrando condiciones de conducta referentes a edad, sexo, condición física, etc.

Por su parte, los simuladores de conducción de vehículos permiten recrear y poner en evaluación las diferentes características mencionadas, así como acercar una solución admisible a este problema por medio de la posibilidad de realizar reiteradas pruebas de manejo en diferentes condiciones programables que hace que los elementos de la estructura vial interactúen de manera eficiente sin riesgo físico o económico para quienes lo utilizan.

La dinámica longitudinal es el primer paso a contemplar en el desarrollo de un software simulador y se refiere a modelar matemáticamente cuestiones referentes a aceleración y frenado, teniendo en cuenta curvas de entrega de potencia y torque para diferentes modelos de automóviles y tipos de motores, interacción cubierta de caucho – carpeta de rodamiento, relaciones de transmisión y fuerzas de oposición al movimiento, sin considerar curvas a altas velocidades.

## 2 DINÁMICA LONGITUDINAL

### 2.1 Aceleración:

Las principales fuerzas longitudinales externas que actúan sobre un vehículo de dos ejes en aceleración de avance (sin incluir el frenado, que será tratado por separado en una futura publicación) son: (figura 2.1.1) la resistencia aerodinámica  $R_a$ , resistencia a la rodadura de los neumáticos delantero y trasero  $R_{rf}$  y  $R_{rt}$ , resistencia de plano inclinado  $R_g = W \cdot \sin \alpha$ , pesos delantero y trasero  $W_f$  y  $W_t$ , y la fuerza de tracción delantera y trasera  $F_f$  y  $F_t$  respectivamente (Wong J. Y., 2001). En el caso de nuestra modelación, se trata de un vehículo de tracción delantera, por lo que en el diagrama de fuerzas actuantes solo se incluye la  $F_f$ .

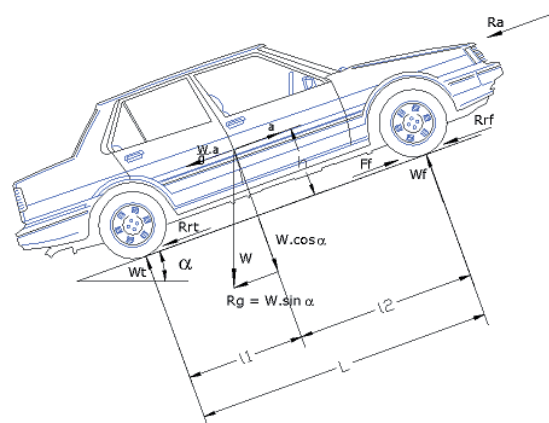


Figura 2.1.1: Fuerzas longitudinales consideradas en la simulación.

La ecuación de movimiento a lo largo del eje longitudinal para el vehículo de tracción delantera considerado, estará dada por la segunda ley de Newton como la suma algebraica del conjunto de fuerzas planteadas, expresada en forma de ecuación diferencial:

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x(t)) = \frac{W}{g} \cdot a(x(t)) = F_f - R_a - R_{rf} - R_{rt} - R_g \quad (1)$$

En esta ecuación  $W$  representa el peso total del vehículo y  $g$  la aceleración debido a la gravedad.

Reordenando los términos de la Ec. (1) e introduciendo el concepto de fuerza de inercia, podemos definir la fuerza de tracción necesaria para movilizar el vehículo bajo las condiciones dispuestas:

$$F_f = R_a + R_{rf} + R_{rt} + R_g + \frac{W}{g} \cdot a = R_a + R_r + R_g + \frac{W}{g} \cdot a \quad (2)$$

$R_r$  es la fuerza de resistencia a la rodadura en el vehículo completo.

La máxima aceleración que un vehículo puede alcanzar está limitada por dos factores principales, el torque que es aplicado en las ruedas y que depende de la potencia entregada por el motor y las relaciones de transmisión en su máximo rendimiento, y la interacción de los neumáticos con la carpeta de rodamiento, que depende de las condiciones del caucho con que están fabricadas las cubiertas y de la condición del camino por el cual circulan.

Para estimar la fuerza de tracción máxima que se puede dar entre el neumático y el camino se deben determinar las cargas normales en cada eje del vehículo. Esto se puede calcular realizando la sumatoria de los momentos con respecto a los puntos de contacto de las ruedas delantera y trasera respectivamente con el suelo, tomando en cuenta que, a los efectos de esta simulación, se puede simplificar y asumir que la fuerza aerodinámica  $R_a$ , está aplicada en el centro de gravedad del vehículo, y no en el centro de presión, ya que ambos se encuentran en un entorno muy cercano (Wong J. Y., 2001).

$$-W_t \cdot L + R_a \cdot h + \frac{W}{g} \cdot a \cdot h + R_g \cdot h + W \cdot \cos \alpha \cdot l_2 = 0 \quad (3)$$

$$W_f \cdot L + R_a \cdot h + \frac{W}{g} \cdot a \cdot h + R_g \cdot h - W \cdot \cos \alpha \cdot l_1 = 0 \quad (4)$$

De la Ec. (3) y la Ec. (4), obtenemos los pesos sobre los ejes correspondientes:

$$W_t = \frac{W \cdot \cos \alpha \cdot l_2}{L} + \frac{h}{L} \cdot \left( R_a + \frac{W}{g} \cdot a + R_g \right) \quad (5)$$

$$W_f = \frac{W \cdot \cos \alpha \cdot l_1}{L} - \frac{h}{L} \cdot \left( R_a + \frac{W}{g} \cdot a + R_g \right) \quad (6)$$

La fuerza de tracción límite para un vehículo de tracción delantera antes de producir derrape en aceleración es la siguiente:

$$F_{\max} = \mu \cdot W_f = \mu \cdot \left( \frac{l_1}{L} \cdot W \cdot \cos \alpha - \frac{h}{L} \cdot (F_{\max} - R_r) \right) \quad (7)$$

$$R_r = W \cdot \cos \alpha \cdot f_r \tag{8}$$

$f_r$  es el coeficiente de resistencia a la rodadura, cuya modelación será tratada especialmente más adelante en este capítulo.

Finalmente obtenemos:

$$F_{\max} = \frac{\mu \cdot W \cdot \cos \alpha \cdot (l_1 + f_r \cdot h)}{1 + \frac{\mu \cdot h}{L}} \tag{9}$$

### 2.2 Dinámica del motor:

La fuente de propulsión de los transportes carreteros es el motor de combustión interna. Este puede ser caracterizado por su entrega de potencia y torque, y por la relación de éstos parámetros con la velocidad angular del motor a través de gráficos característicos.

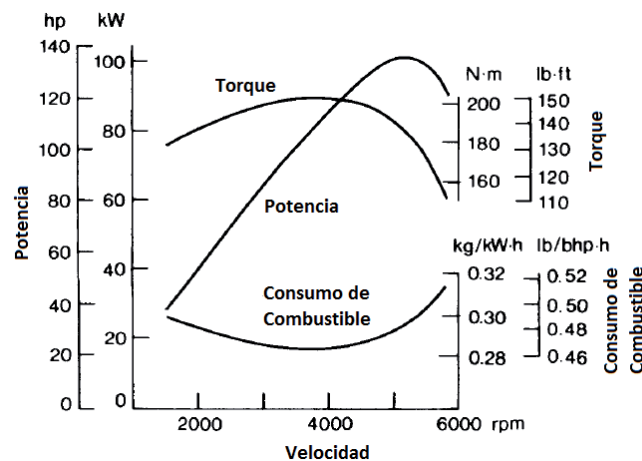


Figura 2.2.1: Performance de Potencia y Torque para un motor de combustión interna encendido por chispa.

La función entre potencia y velocidad angular  $P = P(\omega)$  es determinada experimentalmente en bancos de prueba, sin embargo, puede ser modelada por medio de un polinomio de tercer grado (Jazar R., 2008).

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \omega^i = P_1 \cdot \omega + P_2 \cdot \omega^2 + P_3 \cdot \omega^3 = \frac{P_M}{\omega_M} \cdot \omega + \frac{P_M}{\omega_M^2} \cdot \omega^2 - \frac{P_M}{\omega_M^3} \cdot \omega^3 \tag{10}$$

La Ec (10) es utilizada para motores alimentados a nafta, en donde  $\omega_M$  es la velocidad angular del motor en rpm, en el momento en que se produce la entrega de máxima potencia  $P_M$  en kW o HP, y  $\omega$  es la velocidad angular variable en la modelación.

La potencia y el torque están relacionados por la siguiente igualdad:

$$P \left( lb - \frac{pie}{seg} \right) = T (lb - pie) \cdot \omega \left( \frac{rad}{seg} \right) \tag{11}$$

Para que la potencia sea expresada en HP y la velocidad angular en RPM, modificamos levemente la ecuación y obtenemos la expresión del torque:

$$P(\text{HP}) = \frac{T(\text{lb} - \text{pie}) \cdot \omega(\text{RPM})}{5252}$$

$$T(\text{lb} - \text{pie}) = \frac{P(\text{HP}) \cdot 5252}{\omega(\text{RPM})} \quad (12)$$

Si analizamos las curvas de la (figura 2.2.1) vemos que los máximos de  $P = P(\omega)$  y de  $T = T(\omega)$  no coinciden, es decir, la entrega de potencia crece con la velocidad angular del motor hasta un máximo y luego decrece, al igual que el torque, sin embargo este último comienza a decrecer sensiblemente antes. Esto puede ser modificado, ya que el desempeño total de entrega de potencia crece cuando la relación de compresión se incrementa, y la velocidad angular a la cuál ocurre el máximo torque se altera cambiando las levas, o la longitud del múltiple de escape o admisión.

Cuando estas operaciones se realizan, alterando las condiciones del motor, y se lo coloca en un nuevo modelo de vehículo, se publican los resultados de las relaciones entre la potencia máxima y la velocidad angular del motor a la cuál se da, pudiendo utilizarse el modelo de la Ec. (10) a los efectos de la simulación, sin inconvenientes.

### 2.3 Relación de transmisión:

Se denomina así a los dispositivos encargados de transmitir el torque y la potencia, generados en el motor, hasta las ruedas tractoras del vehículo.

Su función es mantener el motor funcionando en un rango de trabajo alrededor de la máxima potencia, a diferentes velocidades, tratando de lograr acercarse a la performance ideal.

Estos dispositivos lo conforman, en orden de propagación de movimiento, el motor, el embrague, la caja de cambios, el diferencial, los ejes de transmisión y las ruedas tractoras, mientras que los que magnifican la dinámica son la caja de cambios y el diferencial.

Una exacta estimación de la aceleración requiere el modelado del sistema por la cuál la potencia del motor es transmitida al suelo (Gillespie T., 1992).

El torque entregado a través del embrague como entrada a la caja de cambios puede ser determinado por la ecuación:

$$T_e = T - I_m \cdot \alpha_m \quad (13)$$

En donde  $T_e$  es el torque que llega al embrague,  $T$  es el torque suministrado por el motor,  $I_m$  la inercia rotacional del motor,  $\alpha_m$  es la aceleración rotacional del motor.

El torque de salida de la caja de transmisión es amplificado por la relación de cambio pero disminuido por las pérdidas inerciales de los engranajes y ejes:

$$T_d = (T_e - I_c \cdot \alpha_m) \cdot N_t \quad (14)$$

En donde  $T_d$  es el torque a la entrada del diferencial,  $I_c$  es la inercia rotacional de la transmisión,  $N_t$  es la relación de caja para el cambio colocado.

Finalmente el torque entregado a los ejes y de allí hasta las ruedas tractoras es amplificado por el diferencial con la reducción impuesta por las pérdidas inerciales de los componentes del tren de transmisión desde la caja de cambios y a través del diferencial (Gillespie T., 1992).

$$T_e = F_f \cdot r_{ef} + I_r \cdot \alpha_r = (T_d - I_d \cdot \alpha_d) \cdot N_d \quad (15)$$

En donde  $T_e$  es el torque en los ejes,  $F_f$  es la fuerza de tracción frontal,  $r_{ef}$  el radio efectivo de la rueda,  $I_r$  la inercia rotacional de la rueda,  $\alpha_r$  la aceleración angular de la rueda,  $I_d$  la inercia rotacional del diferencial,  $\alpha_d$  la aceleración angular de los componentes del diferencial y



$N_d$  la amplificación del diferencial.

La aceleración rotacional en las ruedas tractoras está relacionada con aquella del motor a través de la siguiente ecuación:

$$\alpha_r = \frac{\alpha_m}{N_t \cdot N_d} \quad (16)$$

## 2.4 Fuerza Tractora:

Las ecuaciones anteriores pueden ser combinadas para resolver la fuerza tractora que estará disponible en la interfase rueda – camino:

$$F_f = \frac{T_m \cdot N_t \cdot N_d \cdot \eta_{td}}{r_{ef}} - \left[ (I_m + I_c) \cdot N_{td}^2 + I_d \cdot N_d^2 + I_r \right] \cdot \frac{a}{r_{ef}^2} \quad (17)$$

$$N_{td} = N_t \cdot N_d$$

El factor  $\eta_{td}$  indica un rango de eficiencia de alrededor del 90% (Gillespie T., 1992) y del 95% (Wong J. Y., 2001) por pérdidas mecánicas y viscosas en los componentes del tren de transmisión.

La expresión de la fuerza tractora está compuesta por dos términos. El primero se refiere a la amplificación del torque generado en el motor por efecto de la relación de engranajes de la caja de cambios y el diferencial, afectado por el factor de eficiencia explicado, dividido por el radio efectivo de la rueda. El segundo representa la pérdida de fuerza tractora debido a las inercias rotacionales del motor y la transmisión, teniendo en cuenta la magnificación de las inercias por el cuadrado de la relación de transmisión.

A los efectos de la modelación, las inercias rotacionales de la Ec. (17) son reemplazadas por una masa equivalente de los componentes rotacionales  $M_r$ , que se suma a la masa del vehículo en la ecuación general de la aceleración Ec. (1), quedando de la siguiente manera:

$$(M + M_r) \cdot a((x(t))) = \frac{W + W_r}{g} \cdot a((x(t))) = \frac{T_m \cdot N_t \cdot N_d \cdot \eta_{td}}{r_{ef}} - R_a - R_r \pm R_g \quad (18)$$

La combinación de ambas masas se denomina masa efectiva, y la relación:

$$\frac{M + M_r}{M} = 1.04 + 0.0025 \cdot N_{td}^2 \quad (19)$$

se denomina factor de masa (Gillespie T., 1992) y (Wong J. Y., 2001).

## 2.5 Fuerza Aerodinámica:

La aerodinámica hace su mayor impacto en vehículos modernos y camiones a través de su contribución a las cargas de oposición al movimiento.

Éstas interactúan con el vehículo causándole dificultad en la aceleración, así como también fuerzas de elevación o hacia abajo, movimientos laterales, cabeceo, rotación y ruido.

Con el creciente énfasis en la economía de combustible y la reducción de emisiones de escape indeseables, se ha tornado muy importante el optimizar los requerimientos de potencia, y en este aspecto la resistencia aerodinámica juega un papel significativo.

La física de la resistencia aerodinámica es muy compleja y es un área de gran estudio en la actualidad. Muchos de estos estudios se realizan en la industria aeroespacial, la cuál está muy relacionada con la industria automotor.

Las fuerzas aerodinámicas producidas en el vehículo se originan de dos fuentes: flujo sobre el exterior del vehículo y flujo a través del interior para propósitos de refrigeración, calefacción y ventilación. El flujo exterior, que es el más importante, se divide a su vez en presión normal o presión de arrastre, y tensión de corte o fuerza viscosa en la capa límite adyacente a la superficie exterior del vehículo.

El flujo global sobre el cuerpo de un automóvil es gobernado por la relación entre la velocidad y la presión, expresada por la ecuación de Bernoulli que asume que el fluido es incompresible, lo cual es razonable para afrontar la aerodinámica de automóviles. La ecuación es:

$$P_{total} = P_{estática} + P_{dinámica} \quad (20)$$

$$P_t = P_e + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

Donde  $\rho$  es la densidad del aire y  $v$  la velocidad del aire relativa al vehículo.

La relación es derivada de la aplicación de la segunda ley de Newton a un fluido que se mueve sin perturbaciones y experimenta fricción despreciable que son condiciones que se pueden aplicar a la corriente de aire que se aproxima al vehículo. Las ecuaciones de Bernoulli establecen que la presión estática más la presión dinámica del aire es constante en esta zona.

Si al vehículo se lo visualiza estacionado y al aire moviéndose como en un túnel de viento, éste fluye a lo largo de líneas que se denominan líneas de corriente, de las cuales un cúmulo de ellas forman lo que se denomina un túnel de corriente, (figura 2.5.1).

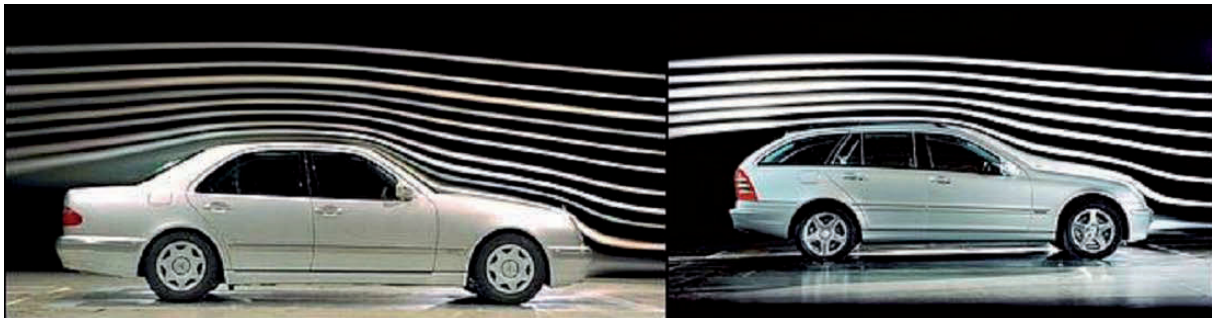


Figura 2.5.1: Tubos de corriente que fluyen sobre automóviles de diferentes formas.

Mayores detalles acerca del proceso de desequilibrio de presiones que se desarrolla en los tubos de aire, y que deriva en la generación de la fuerza aerodinámica de resistencia al avance, se pueden encontrar en la referencia (Di Rado et. al., 2009).

La distribución de presiones en el cuerpo de un automóvil se puede medir experimentalmente y graficarlas perpendicularmente a la superficie (ver figura 2.5.2), en la cuál los valores son indicados como negativos y positivos con respecto a la presión ambiental medida a una distancia adecuada del vehículo (Gillespie T., 1992).

Como se puede apreciar, una presión negativa se desarrolla en la parte frontal del automóvil, a medida que el flujo asciende por el frente y trata de curvarse en forma convexa hacia arriba para seguir la forma del capó, (figura 2.5.1). Al disminuir la presión estática, aumenta la presión dinámica  $P_d$  (20), y por lo tanto la velocidad del flujo. El gradiente de presión adversa tiene el potencial de disminuir el espesor de la capa límite (Di Rado et. al., 2009).

A medida que el flujo avanza sobre el capó, se aprecia una disminución de la presión negativa y un aumento de presión positiva, empieza a curvarse en forma convexa hacia abajo



para subir por el parabrisas (figura 2.5.1), hasta que llega a un máximo de presión en el entorno de la base del parabrisas, con la consiguiente disminución de velocidad en esta zona, es por esto, que se colocan en este lugar los ingresos de aire para la climatización del vehículo (alta presión), y los limpia parabrisas que no son perturbados por las fuerzas aerodinámicas (baja velocidad).

Luego al llegar al techo el flujo se curva bruscamente en forma convexa hacia arriba nuevamente para seguir hacia el techo (figura 2.5.1), lo que produce una aumento repentino de presiones negativas, y que continúa hasta el sector trasero, el cuál debe ser diseñado cuidadosamente para evitar el desprendimiento de la capa límite y las consecuentes perturbaciones y vórtices que provocan inestabilidad y resistencia al avance.

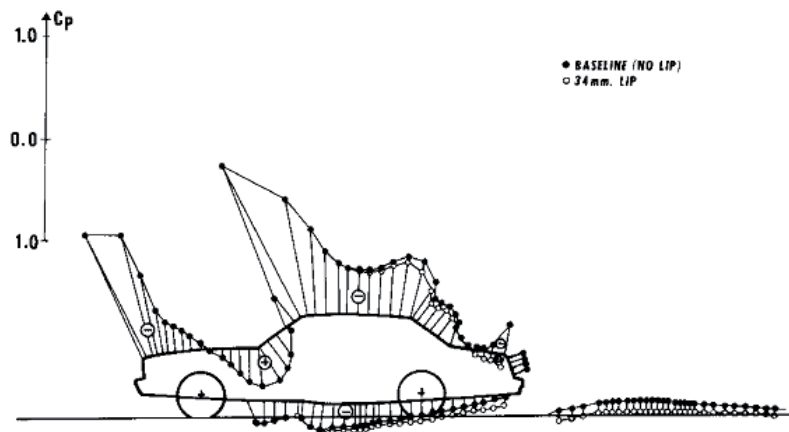


Figura 2.5.2 Distribución de presiones a lo largo del vehículo.

Por la complejidad que representa el flujo de aire sobre un cuerpo, es necesario desarrollar modelos semi-empíricos que representen y caractericen el fenómeno, es así, que para el cálculo de la resistencia aerodinámica y a los efectos de la simulación, se utilizó la siguiente ecuación (Landau L. D. et. al., 1987).

$$Ra = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot Cd \cdot A \cdot v^2 \quad (21)$$

En donde  $\rho$  es la densidad del aire,  $Cd$  es el coeficiente de penetración que depende de la forma del cuerpo y es determinado experimentalmente en túneles de viento,  $A$  es el área transversal de exposición al flujo de aire, y  $v$  la velocidad del cuerpo relativa a la velocidad del aire. Vemos que en esta ecuación está involucrada la presión dinámica vista en la ecuación de Bernoulli.

La densidad del aire se puede calcular con las leyes del gas ideal como:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (22)$$

En donde  $p$  es la presión atmosférica (kpa),  $R$  (286.9 J/kg °K) es la constante individual del gas relacionada con el peso molecular y  $T$  la temperatura (°K).

La presión del aire a diferentes altitudes puede ser calculada con la siguiente ecuación:

$$p = 101325 \cdot \left(1 - 2.25577 \cdot 10^{-5} \cdot h\right)^{5.25588} \quad (23)$$

De donde se puede determinar que para alturas por sobre el nivel del mar, la presión

atmosférica cae, y por lo tanto también lo hace la densidad del aire, el cuál ofrece menor resistencia al desplazamiento del vehículo.

El valor del área de incidencia frontal se calcula también a través de una fórmula empírica que se utiliza para vehículos con una masa de entre 800 y 2000 kg (Wong J. Y., 2001):

$$A = 1.6 + 0.00056 \cdot (mv - 765) \quad (24)$$

En donde A es el área en m<sup>2</sup> y mv es la masa del vehículo en kg.

Otra manera de estimar el área transversal, es aplicando el método fotográfico, y digitalizando el perfil en un sistema de diseño asistido por computadora (Di Rado et. al., 2009).

## 2.6 Fuerza de Resistencia a la Rodadura:

La resistencia a la rodadura de las cubiertas de caucho es una de las principales fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo. Cuando el neumático rueda sobre una superficie, se disipa energía mecánica en forma de calor, tanto por la deformación propia como por la deformación de la superficie en que rueda, provocando que el neumático se caliente. La disipación de energía por la deformación de la superficie de rodadura depende de la dureza de la misma, esto es, cuando existe más dureza, la deformación se debe principalmente al neumático y por el contrario, cuando existe menos dureza, la disipación se focaliza en la superficie misma. La energía disipada por el neumático se debe principalmente al rozamiento de la zona de contacto y a las propiedades de amortiguamiento de la estructura de la cubierta por la deformación de la carcasa mientras rueda (pérdida por histéresis). La fricción entre la cubierta y el camino causado por deslizamiento, la resistencia debido al aire en circulación dentro de la rueda, y el efecto ventilador de la cubierta rotando en el aire circundante también contribuyen a la resistencia a la rodadura, pero son de importancia secundaria.

Si un neumático que no rota tiene contacto con una superficie plana, la distribución de presiones será simétrica en la superficie de contacto, y la fuerza resultante vertical de las fuerzas que solicitan la rueda es aplicada en el centro de dicha área.

Cuando un neumático gira, la carcasa es deformada en el área de contacto con el suelo. Como resultado de esta distorsión, la presión normal en la mitad delantera de la huella es mayor que en la mitad trasera, esto provoca que la resultante de las fuerzas que llegan a la rueda, que originalmente se encontraba aplicada sobre el centro de giro, se desplace en la dirección del rodamiento (Rajamani R., 2006).

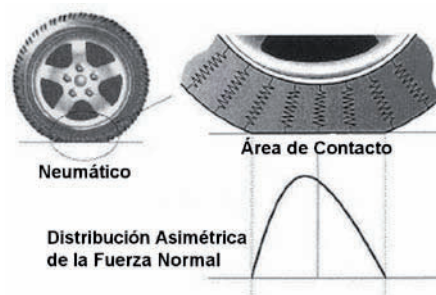


Figura 2.6.1 Distribución asimétrica del diagrama de presiones bajo la rueda girando.

Este desplazamiento origina una distribución asimétrica de las presiones en la interfase rueda – carpeta de rodamiento (figura 2.6.1), y provoca que la resultante de todas las fuerzas que generan esta distribución, se encuentre desplazada con respecto al eje de la rueda por un

valor  $\Delta x$  (figura 2.6.2), lo que induce un torque alrededor del eje de rotación de la rueda que se opone al giro y por lo tanto al desplazamiento del vehículo. Esto se denomina momento de resistencia a la rodadura  $T_y$ .

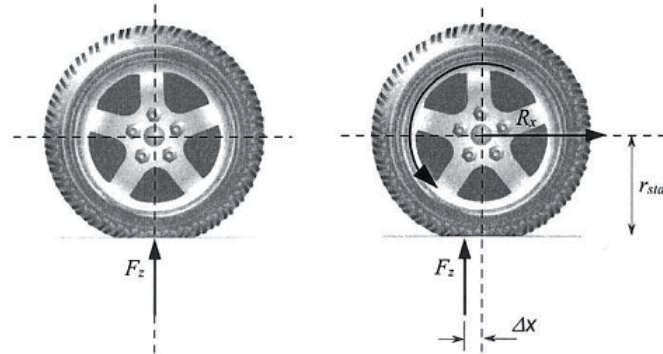


Figura 2.6.2 Momento de Resistencia a la Rodadura.

El momento entre la resultante vertical  $F_z$  y el desplazamiento  $\Delta x$ , genera un par de equilibrio formado por lo que denominaremos fuerza de resistencia a la rodadura  $R_r$ , y el radio estático de la rueda  $r_{stat}$ . Por lo tanto:

$$T_y = R_r \cdot r_{stat} = F_z \cdot \Delta x \Rightarrow R_r = -F_z \cdot \frac{\Delta x}{r_{stat}} \cdot \text{sign}(\omega_{wl}) = -F_z \cdot fr(v) \cdot \text{sign}(\omega_{wl}) \quad (25)$$

Donde  $\text{sign}(\omega_{wl})$  asegura que  $T_y$  sea de sentido contrario a la velocidad angular de la rueda. El cociente entre  $\Delta x$  y el radio estático  $r_{stat}$ , se denomina coeficiente adimensional de resistencia a la rodadura, y depende levemente de la velocidad de avance.

Hay diferentes factores que afectan este fenómeno, éstos incluyen la estructura de la rueda (construcción y materiales) y sus condiciones de operación (condiciones del camino, presión de inflado, velocidad, temperatura, etc.), que son detallados en la publicación (Di Rado et. al. 2008).

Existen diversas ecuaciones empíricas que modelan matemáticamente este coeficiente, y que pueden ser utilizadas a los efectos de la simulación computacional.

Entre ellas podemos destacar las siguientes:

1) Ecuaciones empíricas presentadas por (Wong J. Y., 2001), que se emplean para modelar este fenómeno en automóviles de calle bajo condiciones estándar de presión de inflado y carga en superficies duras, con un rango de velocidades de hasta 150 km/h para automóviles de calle.

$$fr = 0.0136 + 0.4 \cdot 10^{-7} \cdot v^2 \quad (26)$$

$$fr = 0.0169 + 0.19 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 \quad (27)$$

Donde la Ec. (26) es para cubiertas radiales y la Ec. (27) para cubiertas diagonales y  $v$  está expresado en km/h.

Desde el punto de vista computacional, estas ecuaciones son muy convenientes, ya que resuelven el problema con una sola colocación, sin embargo entregan curvas muy planas.

2) Ecuación empírica presentada por (Jazar R., 2008), que puede ser utilizada para diferentes tipos de superficies de rodamiento, y hasta una velocidad de aproximadamente 150 km/h.

$$f_r = \mu_0 + \mu_1 \cdot v^2 \quad (28)$$

En donde  $\mu_0$  tiene un valor de 0.015 y  $\mu_1$  un valor de  $7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$ , y la velocidad está expresada en m/s.

Si comparamos los datos obtenidos de pruebas experimentales con los obtenidos por la ecuación citada (figura 2.6.3), vemos que para un rango de velocidades entre aproximadamente 30 y 150 km/h la coincidencia de curvas es muy buena, y el modelo puede ser utilizado con precisión.

Para velocidades mayores a la velocidad crítica se producen “ondas” en el sector trasero de la cubierta que gira, lo que hace que la rodadura crezca rápidamente y se aleje de la curva analítica.

Los valores de  $\mu_0$  son presentados en la Tabla 2.6.1, para distintas superficies de rodamiento, esto hace muy conveniente la utilización del modelo en simuladores todo terreno.

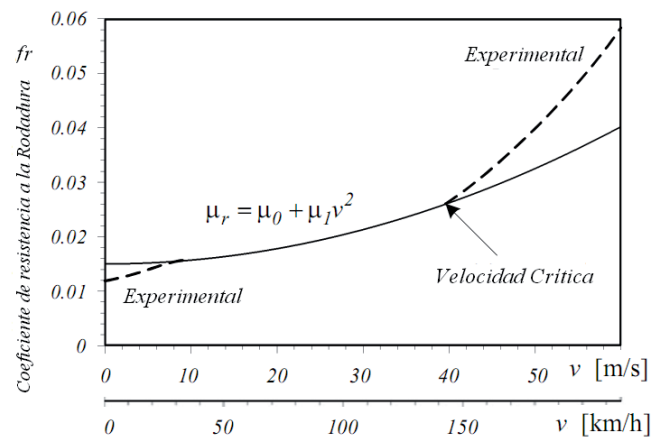


Figura 2.6.3 Comparación entre la ecuación analítica y datos experimentales en cubiertas radiales.

Condición y tipo de Superficie	$\mu_0$
Hormigón muy bueno	0.008 – 0.1
Asfalto muy bueno	0.01 – 0.0125
Hormigón promedio	0.01 – 0.015
Pavimento muy bueno	0.015
Macadán muy bueno	0.013 – 0.016
Asfalto promedio	0.018
Hormigón en malas condiciones	0.02
Pavimento de bloque en buen estado	0.02
Macadán promedio	0.018 – 0.023
Asfalto en mala condición	0.23
Macadán sucio	0.023 – 0.028
Camino de piedra en buen estado	0.033 – 0.055
Camino de tierra en buen estado	0.045
Camino de piedra en mal estado	0.085
Nieve poco profunda (5 cm)	0.025
Nieve profunda (10 cm)	0.037
Camino de tierra sin mantenimiento	0.08 – 0.16
Arena	0.15 – 0.3

Tabla 2.6.1 Valor de  $\mu_0$  para diferentes superficies.

### 3 MÉTODO DE INTEGRACIÓN:

Muchas ecuaciones diferenciales de interés para la física, y que expresan modelos matemáticos, muchos de ellos empíricos, de fenómenos de ocurrencia importante dentro de la Ingeniería, tienen características muy complejas que en la mayoría de los casos no permiten que se pueden resolver de manera explícita. Por esta razón, deben aplicarse métodos de resolución numérica aproximados a la solución cerrada, que permitan iterar en pequeños rangos de tiempo la tasa de cambio de la variable, utilizando su valor del paso anterior y a partir de una condición inicial preestablecida.

La Ec. (1) del capítulo 2, representa el fenómeno físico de la aceleración del vehículo, y las fuerzas que constituyen la resistencia a rodamiento (empírica), y la resistencia aerodinámica (semi-empírica) dependen de la variable velocidad, que es a su vez lo que queremos determinar en cada paso de integración.

La variable velocidad es llamada variable dependiente y el elemento con respecto del cuál es diferenciada (tiempo), variable independiente.

Como la función involucra una sola variable independiente, se denomina Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

Existen diferentes métodos de integración numérica que arriban con diferente grado de aproximación a la solución de una EDO, y cuál de ellos utilizar, es un problema a resolver dependiendo del grado de complejidad de la ecuación y de los recursos computacionales con que se cuenta.

#### 3.1 Método de Euler:

El método de Euler es el más simple, y es el que expresa la solución de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \rightarrow h = x_{i+1} - x_i \quad (29)$$

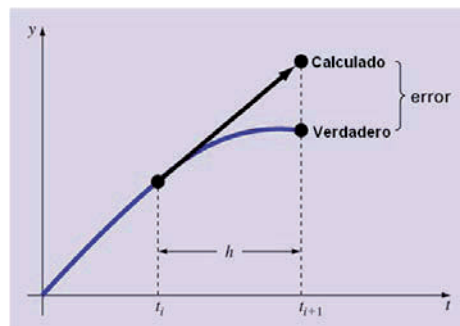


Figura 3.1.1 Precisión del método de Euler.

Como vemos en este caso, el valor calculado se aleja apreciablemente del valor verdadero cuando el paso de integración es lo suficientemente grande, es por esto, que se deben adoptar pasos muy pequeños, para ir corrigiendo el error a medida que se actualiza la variable, con el consiguiente esfuerzo computacional.

Se han diseñado otros métodos en los cuales se ha mejorado la precisión sin aumentar el costo computacional, a partir de predecir los nuevos valores con pendientes promedio entre las localizaciones de la variable independiente.

En el presente trabajo se ha optado por trabajar con Runge-Kutta 4, por ser el método de

un solo paso más preciso, y que menos recursos computacionales requiere, teniendo en cuenta los variados cambios de pendiente de las curvas que representan el modelo, durante el proceso de conducción del simulador.

### 3.2 Método de Runge-Kutta 4:

Los métodos de Runge-Kutta expresan la solución de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) \cdot h \quad (30)$$

En donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  se denomina función incremental, y puede ser interpretada como la pendiente representativa del intervalo. La función incremental puede ser escrita como:

$$\phi = a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \dots + a_n \cdot k_n \quad (31)$$

La forma clásica del método de Runge-Kutta de 4º orden es el siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ k_1 &= \Delta h [f(x, y)] \\ k_2 &= \Delta h \left[ f \left( x + \frac{1}{2} \Delta h, y + \frac{1}{2} k_1 \right) \right] \\ k_3 &= \Delta h \left[ f \left( x + \frac{1}{2} \Delta h, y + \frac{1}{2} k_2 \right) \right] \\ k_4 &= \Delta h [f(x + \Delta h, y + k_3)] \end{aligned} \quad (30)$$

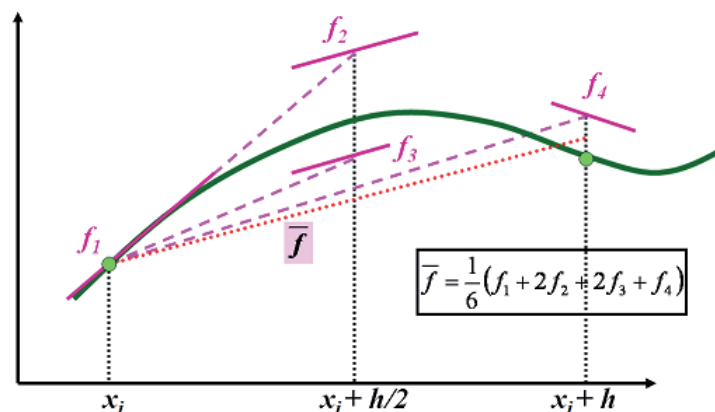


Figura 3.2.1 Obtención de la pendiente promedio para aproximación a la solución.

Cada uno de los ks de la Ec. (30) representa una pendiente, y  $\Delta y$  el promedio pesado de la pendiente mejorada.

## 4 DISCUSIÓN DE RESULTADOS:

El modelo acoplado de simulación se realizó en dos etapas:

- 1) Desarrollo del algoritmo y validación del funcionamiento dinámico de un motor de combustión interna a chispa de un automóvil Corvette, con datos experimentales disponibles de banco de prueba.
- 2) Desarrollo del algoritmo y validación de la dinámica longitudinal de un automóvil



estándar de fabricación nacional Renault Clío 1.2L 16v con las siguientes características: cilindrada 1149 cm<sup>3</sup>, Potencia máxima 75 cv a 5500 rpm, peso en orden de marcha 930 kg, peso delantero 565 kg, peso trasero 365 kg, distancia entre ejes 2.47 m, neumáticos 175/65 r 14, diámetro de rueda 1.94 pies, coeficiente de penetración (Cd) 0.38, velocidad máxima de aproximadamente 161 km/h, aceleración de 0 a 100 km/h 12.9 segs, aceleración de 0 a 1000 metros 34.7 segs, y de un automóvil Renault Sandero Stepway 1.6L 16v con las siguientes características: cilindrada 1598 cm<sup>3</sup>, Potencia máxima 105 cv a 5750 rpm, peso en orden de marcha 1200 kg, peso delantero 750 kg, peso trasero 385 kg, distancia entre ejes 2.59 m, neumáticos 195/60 r 16, diámetro de rueda 2.135 pies, coeficiente de penetración (Cd) 0.45, velocidad máxima de aproximadamente 169 km/h, aceleración de 0 a 100 km/h 11.3 segs, aceleración de 0 a 1000 metros 33.3 segs.,. Datos obtenidos de manuales de usuario y de la fuente: <http://www.renault.com.ar/automoviles>.

#### 4.1 Dinámica del motor:

La primera tarea realizada con el objetivo de desarrollar el simulador de conducción fue la modelación de los parámetros característicos del motor.

Para esto, se tomó como patrón de evaluación, un modelo de propulsor de combustión interna de un Corvette de 5.7 litros, con disposición de 8 cilindros en V (V8), que fue colocado en los modelos aparecidos entre los años 1997 y 2000 (Monster M., 2003). La justificación de esta elección, está centrada en la disponibilidad de datos de curvas de potencia y torque obtenidas a partir del ensayo en banco de prueba de este motor en formato pdf.

El resultado de la verificación (figura 4.1.1), muestra que la curva de torque tiene su punto de máximo a 4000 rpm, con un valor de 350 lb-pie y la potencia crece hasta 345 hp a 5600 rpm. El rango de operación de este motor es entre 1000 y 6000 rpm.

El torque graficado es el máximo que la máquina puede entregar a una determinada rpm. El torque generado durante la conducción, depende de la posición del acelerador y es un valor entre 0 y 1 del máximo. En el caso de simuladores que trabajan con el teclado del computador, solo son tenidos en cuenta los valores de torque que están sobre la curva.

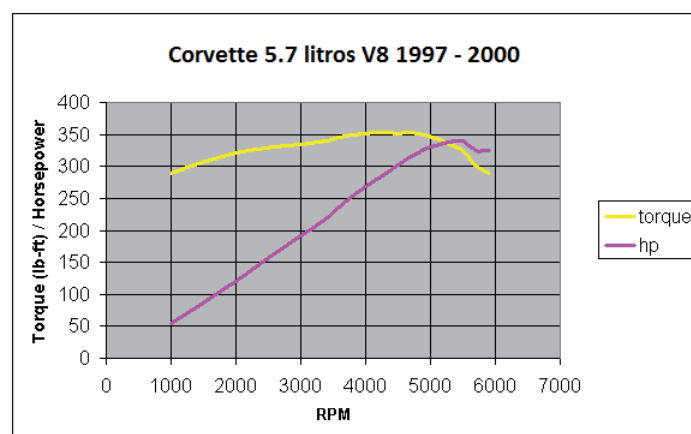


Figura 4.1.1 Resultado del ensayo en banco de prueba de un motor de combustión interna.

A los efectos de la simulación se procedió a la aplicación de las ecuaciones (10) y (12), tomando como variable independiente, diferentes valores de velocidad angular del motor, entre los límites 1000 y 6000 rpm (figura 4.1.2). Las curvas obtenidas muestran un nivel aceptable de coincidencia en la forma y valores con las experimentales, mayormente la modelación del

proceso de entrega de potencia. Se puede observar una variación en el pico de torque, que en este caso se da a 3000 rpm, con un valor de 400 (lb-pie), algo superior al observado en el banco de prueba, aproximadamente un 13 %.

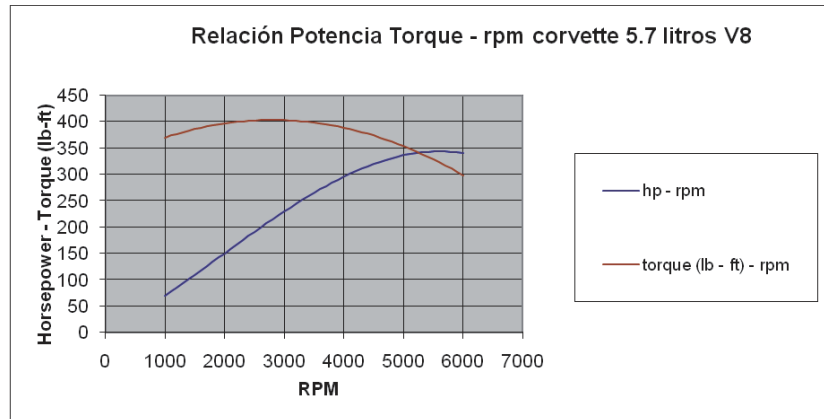


Figura 4.1.2 Modelación de curvas características de un motor de combustión interna.

También se analizó y modeló la relación torque-rpm para cada una de las relaciones de marcha con que cuenta este modelo de vehículo, esto es, 1ª marcha: 2.66, 2ª marcha: 1.78, 3ª marcha: 1.30, 4ª marcha: 1.0, 5ª marcha: 0.74, 6ª marcha: 0.5, reversa: 2.9, diferencial: 3.42.

En la gráfica experimental (Monster M., 2003) (figura 4.1.3), los valores de las curvas correspondientes al traspaso de torque, han sido magnificados por el tren de transmisión, es decir que las rpm contra las que se las grafica, corresponden a la velocidad angular del eje trasero en cada relación de marcha. Como dato extra, se muestra también la curva perteneciente al motor, ahora en (N-m), contra rpm del motor.

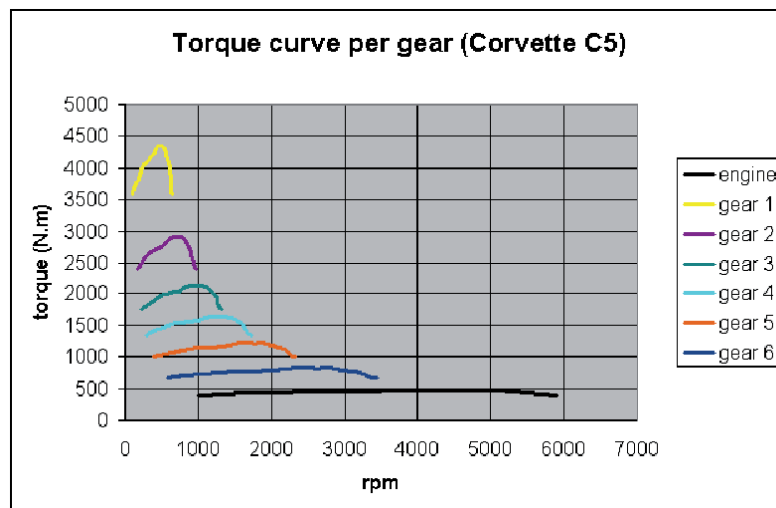


Figura 4.1.3 Curvas experimentales de la relación torque-rpm en las ruedas y el motor.

El resultado de la modelación se muestra en (figura 4.1.4). Los valores pico de torque en cada curva son levemente superiores a los observados en el ensayo experimental, aunque hay que considerar que en este modelo no se tuvo en cuenta el rendimiento y las pérdidas debido a la transmisión, que si son cargadas en la ecuación general de la aceleración Ec. (18). Esto disminuye los valores en aproximadamente un 10 %.

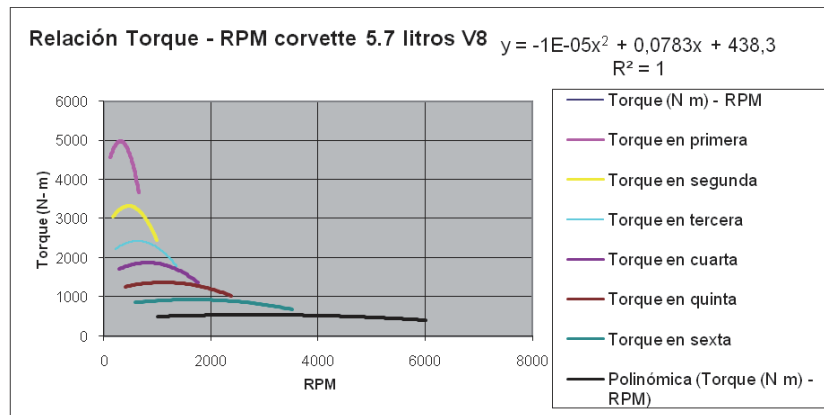


Figura 4.1.4 Modelación de las curvas de torque en cada relación de marcha de la caja de cambios.

Podemos considerar que el modelo empleado responde a los objetivos de simulación dinámica de un motor de combustión interna a chispa, y que puede ser aplicado a otros casos de características similares.

#### 4.2 Resistencia aerodinámica y de rodadura:

Esta modelación se realizó a partir de los parámetros característicos del Renault Clío, y con la utilización de las Ecs. (21), (22) y (24) para la resistencia aerodinámica y las Ecs. (25) y (26) para la resistencia a la rodadura.

Se puede observar en la (figura 4.2.1), que a bajas velocidades, hasta aproximadamente 65 km/h, la resistencia a la rodadura prevalece como la fuerza principal de oposición al movimiento en terreno horizontal, y luego de este valor, la resistencia aerodinámica es la más importante, con un crecimiento no lineal importante.

El punto de cruce de ambas curvas, depende de diversos factores que van desde la elección del modelo matemático de representación de la fuerza de rodadura, hasta la diversidad de formas aerodinámicas de vehículos que afectan la determinación del área transversal, y del coeficiente de penetración  $C_d$ .

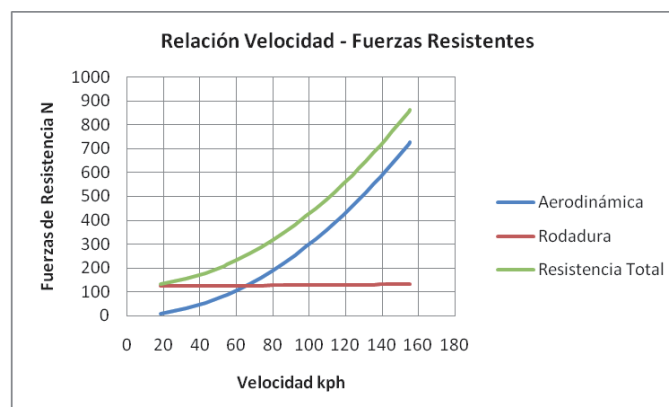


Figura 4.2.1 Superposición de curvas de fuerzas aerodinámica y de rodadura.

Como regla general, se acepta que estas fuerzas se igualan a velocidades que rondan los 50 a 60 mph, aproximadamente 80 a 96 km/h (Gillespie T., 1992), aunque algunos textos fijan límites menores del entorno.

Para lograr la representación de la (figura 4.2.1), se aceleró el vehículo sostenidamente, y a través de las 5 relaciones de transmisión hasta la velocidad de 160 km/h, casi la máxima

admitida en este modelo.

### 4.3 Modelo acoplado de aceleración:

El sistema de conducción del simulador, es por el momento a través del teclado del computador, utilizando las teclas de dirección para acelerar y para decidir la trayectoria del vehículo hacia la izquierda o la derecha, la tecla de espaciado para realizar los cambios, la tecla “c” para fijar una velocidad constante, la tecla “a” para volver a sistema de aceleración y las teclas numéricas para posicionarnos en 5 diferentes puntos de visualización, como por ejemplo desde dentro del automóvil (figura 4.3.1) o desde fuera (figura 4.3.2).



Figura 4.3.1 Vista del simulador desde dentro del vehículo.



Figura 4.3.2 Vista del simulador desde fuera del vehículo.

El procedimiento para el accionamiento del sistema de cambios en ascenso, es decir desde una marcha inferior a una superior, se realiza presionando al mismo tiempo la tecla de aceleración y la tecla espaciadora tantas veces como se desee ascender. Para accionar el sistema de cambios en descenso, es decir desde una marcha superior a una inferior, se suelta la

tecla de aceleración, con lo que quedan actuando las fuerzas resistentes, y se presiona la tecla espaciadora tantas veces como se desee descender.

Con este sistema no existe aún un tiempo de duración del evento cambio de marcha, pero se está decidiendo y avanzando en un diseño alternativo.

Vamos a analizar entonces los datos obtenidos por el desempeño del simulador utilizando el automóvil Renault Clío 1.2L 16v y el automóvil Renault Sandero Stepway 1.6L 16v, por una distancia de aproximadamente 1000 m de franca aceleración, en terreno levemente ondulado, tramo digitalizado Viamão – Capão da porteira, estado de Rio Grande do Sul, Brasil, en zona recta. Debemos considerar en los gráficos obtenidos la incidencia de todas las fuerzas resistentes consideradas, incluida la gravedad.

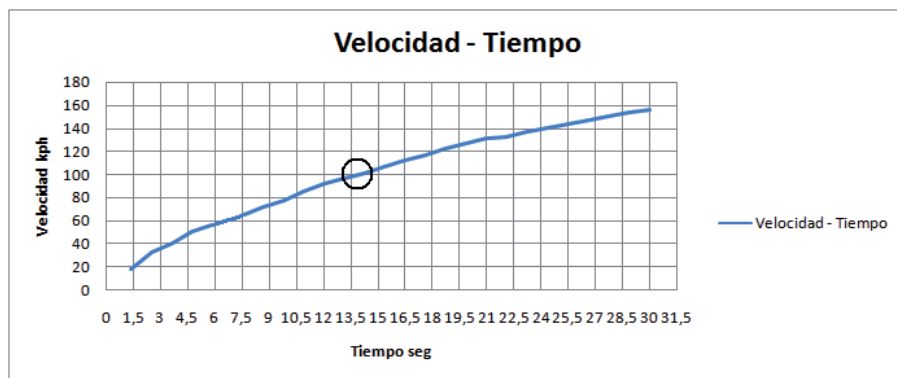


Figura 4.3.3 Relación velocidad – tiempo. Renault Clío 1.2L 16v.

En la curva modelada correspondiente a la relación entre la velocidad y el tiempo (figura 4.3.3), se puede observar en primera instancia que a aproximadamente 13,5 segundos (marcado en la gráfica), la velocidad asciende a 100 km/h, y teniendo en cuenta posibles diferencias en cuanto a las condiciones generales de la prueba, la comparación de este dato con el mencionado en las especificaciones técnicas obtenidas de la página web: <http://www.renault.com.ar/automoviles/clio5puertas/especificaciones>, tiene un error de aproximadamente un 5 %.

Si analizamos también la velocidad máxima, vemos en la gráfica que es de alrededor de 157 km/h, valor muy cercano a los 161 km/h entregado como dato en la página web mencionada, considerando que las revoluciones del motor se limitan a aproximadamente 4800 RPM.



Figura 4.3.4 Relación espacio – tiempo. Renault Clío 1.2L 16v.

Otro dato de comparación interesante que podemos observar en las especificaciones

técnicas, es la aceleración de cero a 1000 metros, establecida en 34.7 segundos. En la curva resultante de la simulación realizada (figura 4.3.4), se ha colocado una marca en el instante en que el vehículo alcanza los 1000 metros, que como vemos se da aproximadamente a 34 segundos, lo cual nos entrega un error de alrededor del 2 %.

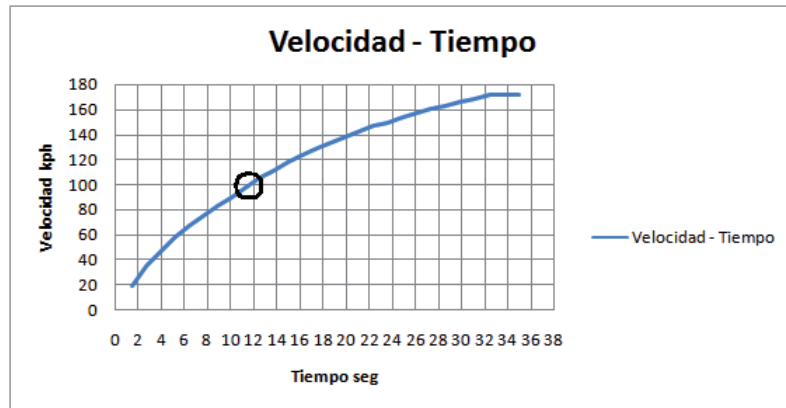


Figura 4.3.5 Relación espacio – tiempo. Renault Sandero Stepway.

Analizando ahora los valores obtenidos para el Renault Sandero Stepway (figura 4.3.5), el vehículo alcanza la velocidad de 100 km/h, en aproximadamente 11.5 segundos, y una velocidad máxima de 171 km/h, a 5000 RPM, y teniendo en cuenta la información obtenida de la página web, <http://www.renault.com.ar/automoviles/nuevostepway/especificaciones> arribamos también a buenos resultados utilizando el modelo propuesto (error 2%).

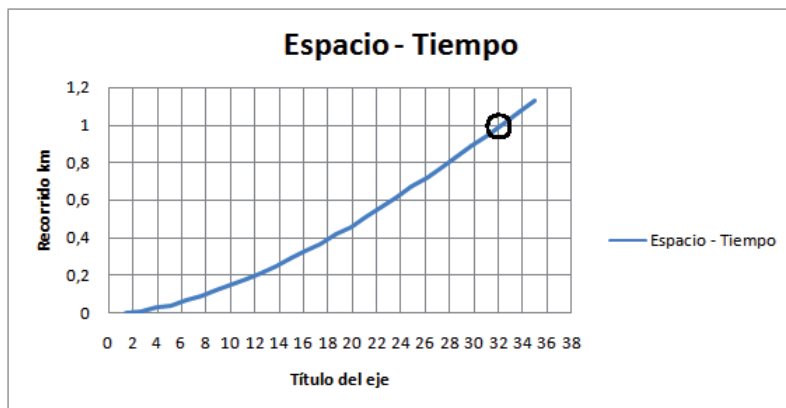


Figura 4.3.6 Relación espacio – tiempo. Renault Sandero Stepway.

En el diagrama espacio – tiempo (figura 4.3.6), podemos observar que en franca aceleración en recta, llegamos a los 1000 metros en alrededor de 32.4 segundos, comparados con los 33.3 segundos de las especificaciones con un 2.7 % de error.

Como se puede apreciar en esta sección, luego del análisis del modelo aplicado, y de los resultados obtenidos comparados con datos experimentales, la simulación tiene un grado de precisión aceptable en cuanto a los objetivos fijados para el presente trabajo.





Figura 4.3.7 Modelos de automóvil utilizados en las pruebas de simulación

## 5 CONCLUSIONES:

La utilización de un modelo simplificado de aceleración longitudinal, sin considerar el deslizamiento de los neumáticos con respecto a la carpeta de rodamiento (slip), y la aplicación del modelo polinómico de la dinámica del motor, ha dado resultados aceptables atendiendo al objetivo final planteado: el desarrollo de un simulador de conducción de vehículos para la verificación de la consistencia geométrica de carreteras rurales de dos carriles, del cual forma parte la presente publicación.

Los errores calculados y las curvas obtenidas, demuestran una buena representación de la performance general del vehículo en aceleración, elemento indispensable a los efectos de simular el abordaje y salida de una curva o el análisis de la distancia necesaria de sobrepaso de un determinado modelo de vehículo, en una determinada relación de marcha en tramos peligrosos, que es donde se focalizan la mayoría de los accidentes de tránsito en las rutas.

En futuros trabajos, se abordarán las problemáticas del frenado y el tránsito en curvas y se acoplarán con el modelo de aceleración presentado.

## REFERENCIAS

- Di Rado G. R., Devincenzi G. H., *Use of rolling resistance's empiric equations in a driving simulator*, Revista Carreteras, Index Scopus, Asociación Española de Carreteras, ISSN: 0212 – 6389, Número de la edición 161, Pág. 70 a Pág. 78, Madrid, España, Septiembre – Octubre 2008.
- Di Rado G. R., Devincenzi G. H., *Effect of Aerodynamic Resistance on car's Acceleration*, Revista Carreteras, Index Scopus, Asociación Española de Carreteras, ISSN: 0212 – 6389, Número de la edición 163, Pág. 76 a Pág. 80, Madrid, España, Enero – Febrero 2009.
- Gillespie T. D., *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers, Inc, 1992
- Jazar R., *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, 2008.
- Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluids Mechanics*, second edition, Pergamon Press, 1987.
- Monster Marco, *Car Physics for Games*, versión 1.9, <http://www.asawicki.info/Mirror/Car%20Physics%20for%20Games/Car%20Physics%20for%20Games.html>, Noviembre 2003.
- Rajamani R., *Vehicle Dynamics and Control*, Springer, 2006.
- Roess R., Prassas E., Mc Shane W., *Traffic Engineering*, Pearson Prentice Hall, 2004.
- Wong J. Y., *Theory of Ground Vehicles*, John Wiley & Sons INC., 2001.