

UN MODELO MULTICUERPO PARA ESTUDIAR LA DINÁMICA DE MICRO VEHÍCULOS AÉREOS DE ALAS BATIENTES

Bruno Roccia^{a,b}, Sergio Preidikman^{b,c} y Julio Massa^b

^a *Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Río Cuarto
Campus Universitario, Ruta Nacional 36 Km. 601. 5800 Río Cuarto. Argentina.
Tel./Fax.: 0358-4676246, broccia@ing.unrc.edu.ar, <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

^b *Departamento de Estructuras. Facultad de C. E. F y N., Universidad Nacional de Córdoba
Tel.: 0351-4334145, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina.
spreidik@umd.edu, jmassa@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

^c *CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
Av. Rivadavia 1917, Buenos Aires, Argentina.*

Palabras clave: Sistemas Multicuerpo, Dinámica, Alas batientes.

Resumen. El estudio del vuelo natural de insectos y aves pequeñas es muy complicado debido a las condiciones de flujo no estacionarias y al movimiento extremadamente complejo que ejecutan las alas durante cada ciclo de batimiento. Como consecuencia de las grandes aceleraciones y de las cargas aerodinámicas actuantes sobre el ala, éstas se deforman sustancialmente. Estas deformaciones inducen una modificación significativa en las cargas aerodinámicas, altamente inestacionarias y no-lineales, las que a su vez, inducen nuevas variaciones en la deformación del ala. Este fenómeno de retroalimentación entre las cargas aerodinámicas, las deformaciones del ala, y el movimiento de la criatura voladora genera un problema fuertemente acoplado entre el aire, y el sistema multicuerpo utilizado para modelar el insecto o el ave pequeña.

En este trabajo se estudia la dinámica asociada al vuelo de un insecto (*drosophila melanogaster*) mediante la introducción de un modelo estructural multicuerpo híbrido del insecto completo (cabeza, tórax, abdomen, y alas). El desarrollo del modelo está fundado en la formulación de Lagrange con coordenadas generalizadas redundantes, una técnica ampliamente utilizada en el estudio de la dinámica de sistemas multicuerpo con restricciones. En esta primera etapa se considera que todas las partes que componen el sistema son rígidas, que la cabeza, el tórax y el abdomen del insecto no tienen movimiento relativo entre sí, y que las alas tienen un movimiento prescrito respecto del cuerpo del insecto (cinemáticamente conducidas). Las ecuaciones de restricción son incluidas automáticamente en la formulación de las ecuaciones de movimiento mediante la utilización de multiplicadores de Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante este enfoque son del tipo diferenciales-algebraicas (DAEs) de índice 3, las cuales son transformadas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) derivando dos veces las ecuaciones de restricción respecto del tiempo.

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, investigadores y especialistas en diferentes áreas de la ciencia se han concentrado en el estudio, diseño, y posterior construcción de micro vehículos aéreos (MAVs) inspirados en la biología. Este esfuerzo es impulsado principalmente por las numerosas aplicaciones civiles y militares que dichos vehículos serán capaces de desarrollar. Tales aplicaciones involucran misiones de reconocimiento, inspección de edificios colapsados, exploración de ambientes muertos, sucios y peligrosos para el ser humano (*dull-dirty-dangerous environments*, D3), y en un futuro misiones de investigación y exploración de atmósferas no terráneas, entre otras (Mueller and Delaurier, 2001). Todas estas aplicaciones requieren que estos vehículos exhiban una extraordinaria capacidad de maniobra para evitar obstáculos, navegar a bajas velocidades, cambiar rápidamente la dirección y modo de vuelo y moverse exitosamente en espacios reducidos. Estas características hacen especialmente atractivo la utilización de “alas batientes” para diseñar un MAV funcional, llenando de esta manera, un nicho dejado por los vehículos convencionales de alas fijas (*fixed-wings*) y de alas rotantes (*rotary-wings*).

No obstante, hay todavía grandes barreras técnicas que deben ser superadas: generación y almacenamiento de energía; materiales suficientemente livianos; miniaturización de sensores, actuadores; entendimiento de flujos a bajo número de Reynolds y aerodinámica no estacionaria; desarrollo de mecanismos, que puedan ser finamente controlados para batir y torsionar las alas a las frecuencias apropiadas; y desarrollo de alas con la forma, tamaño, y flexibilidad apropiadas con el fin de maximizar la sustentación y minimizar el consumo de energía.

Otro punto de vital importancia es desarrollar un modelo dinámico preciso para estudiar la estabilidad del vuelo de estos vehículos y predecir el comportamiento de los mismos en diferentes configuraciones de vuelo y en variadas condiciones de flujo. Sin embargo, lograr un modelo dinámico adecuado constituye un importante reto debido a la aerodinámica no estacionaria, las propiedades másicas variables, y los movimientos altamente no lineales que caracterizan el vuelo a pequeñas escalas (insectos y aves pequeñas).

En la literatura existen varios trabajos que emplean diferentes enfoques para abordar el estudio de la dinámica de insectos y aves pequeñas. La mayoría de los trabajos utilizan un modelo de seis de grados de libertad basado en las ecuaciones estándar para aviones (*standard aircraft equations*), las cuales se pueden encontrar en la mayoría de los libros de dinámica del vuelo, por ejemplo en (Etkin y Reid, 1996). Taylor y Thomas (2003) utilizaron las ecuaciones estándar para aviones en su versión linealizada para estudiar el movimiento de cuerpo rígido de una langosta del desierto. Sun y Xiong (2005) utilizaron las mismas ecuaciones para analizar la estabilidad del vuelo de una abeja en una configuración de vuelo conocida como “hover”. Posteriormente se efectuaron muchos estudios sobre la dinámica de diferentes especies de insectos y sobre diversos prototipos de micro vehículos aéreos utilizando la misma técnica. Sin embargo todos ellos desprecian la masa de las alas y no consideran los efectos inerciales de las mismas sobre el cuerpo/fuselaje del insecto o MAV (Dietl and García, 2008; Doman *et al.*, 2009a; Doman *et al.*, 2009b; Deng *et al.*, 2001; Schenato *et al.*, 2003; Deng *et al.*, 2006a; Deng *et al.*, 2006b).

Con el objetivo de considerar los efectos despreciados en los trabajos previos y concebir modelos dinámicos más precisos, Lasek y Sibilski (2002) y Buler (2004) derivaron las ecuaciones de movimiento de un MAV utilizando las ecuaciones de Gibbs-Appel. Grauer y Hubbard (2009) dedujeron las ecuaciones de movimiento de un MAV utilizando las ecuaciones de Boltzman-Hamel. Grauer utilizó un enfoque basado en la dinámica de multicuerpo considerando una colección de cinco cuerpos rígidos (tórax, dos cuerpos para la cola, y dos alas). Recientemente, Orłowski y Girard (2011) utilizaron las herramientas de la dinámica de multicuerpo en conjunto con el principio de D’Alambert para derivar las ecuaciones de movimiento no-lineal de un MAV de alas batientes. Orłowski condujo un estudio exhaustivo de la influencia de la masa

de las alas sobre el cuerpo del MAV, concluyendo que a medida que se disminuye el porcentaje de masa de las alas relativo al cuerpo del micro vehículo aéreo, los resultados de las simulaciones numéricas se aproximan a los resultados dados por las ecuaciones estándar para aviones. Este mismo autor realizó una extensa revisión bibliográfica del tema, la cual se presenta en forma resumida en la Tabla 1.

Autores	Modelo Dinámico	DOF / Ala	Aerodinámica	Aplicación
Taylor y Thomas (2003)	Lineal	No	Experimental	Langosta del desierto
Sun y Xiong (2005)	Lineal	No	CFD	Abeja
Doman <i>et al.</i> (2009a) y (2009b)	No-lineal	No	Cuasi-estacionario (elemento de palas)	Robofly, Dickinson (1999)
Deng <i>et al.</i> , (2001)	No-lineal	No	Cuasi-estacionario (elemento de palas)	Alas con masas pequeñas
Bolender (2009)	No-lineal	Si (2 DOF / ala)	Berman y Wang (2007)	Sin limitaciones
Sun <i>et al.</i> (2007)	No-lineal	No simulado	Navier-Stokes	Sin limitaciones
Buler <i>et al.</i> (2004)	No-lineal	Si (2 DOF / ala)	No especificado	Ornitóptero
Grauer y Hubbard (2009)	No-lineal	Si (1 DOF / ala)	Cuasi-estacionario	Ornitóptero
Orlowski <i>et al.</i> (2009) y (2010)	No-lineal	Si (3 DOF / ala)	Berman y Wang (2007)	Sin limitaciones

Tabla 1: Resumen de modelos dinámicos (Orlowski *et al.*, 2011)

2 MODELO GEOMÉTRICO DEL INSECTO

La geometría del modelo adoptado en este trabajo para estudiar la dinámica de alas batientes corresponde a una mosca de la fruta (*fruit fly*) y fue extraída de Markow (2006). Los principales parámetros morfológicos de la criatura que han sido preservados en este estudio son: la longitud del ala ' R ' la longitud del cuerpo ' L ' la cuerda máxima del ala y la forma del ala (ver Figura 1).

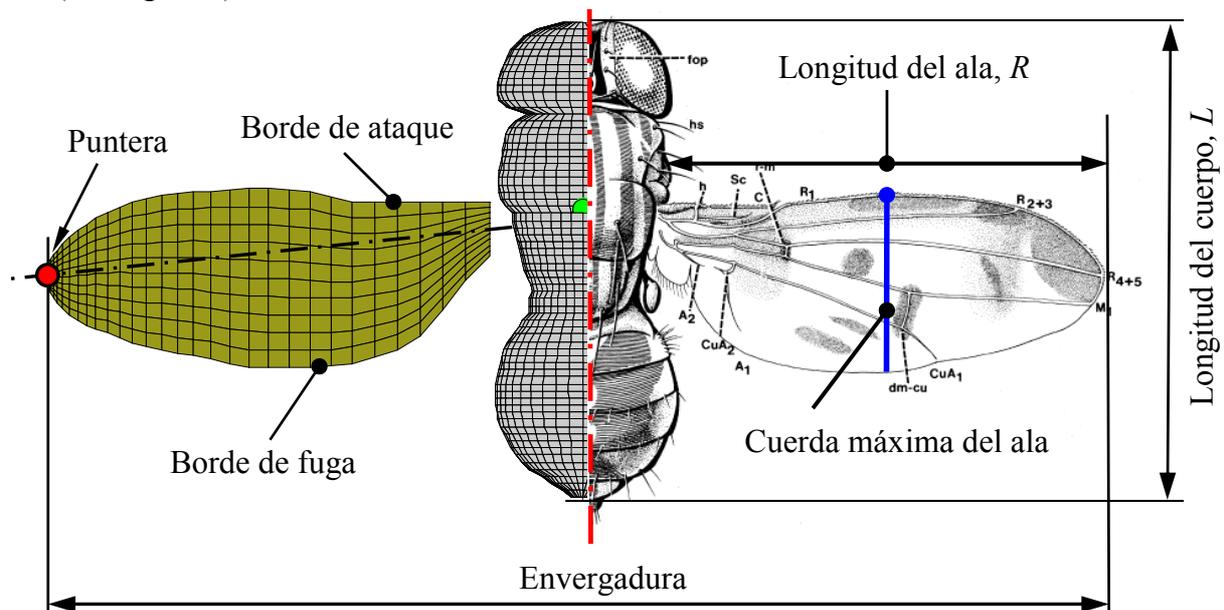


Figura 1: Definición de los parámetros morfológicos

Cada una de las partes del cuerpo del insecto (tórax, abdomen y cabeza) fue modelada, por simplicidad, mediante superficies de revolución. El modelo completo del insecto, incluyendo las alas, fue realizado íntegramente en MATLAB[®], y se utilizó una técnica de parametrización con el fin de construir modelos de diferentes tamaños conservando las proporciones de la criatura (ver Figura 2). Se utilizaron elementos cuadriláteros simples de cuatro nodos para discretizar las superficies de revolución que componen el cuerpo del insecto, como así también las superficies planas que modelan las alas de la criatura.

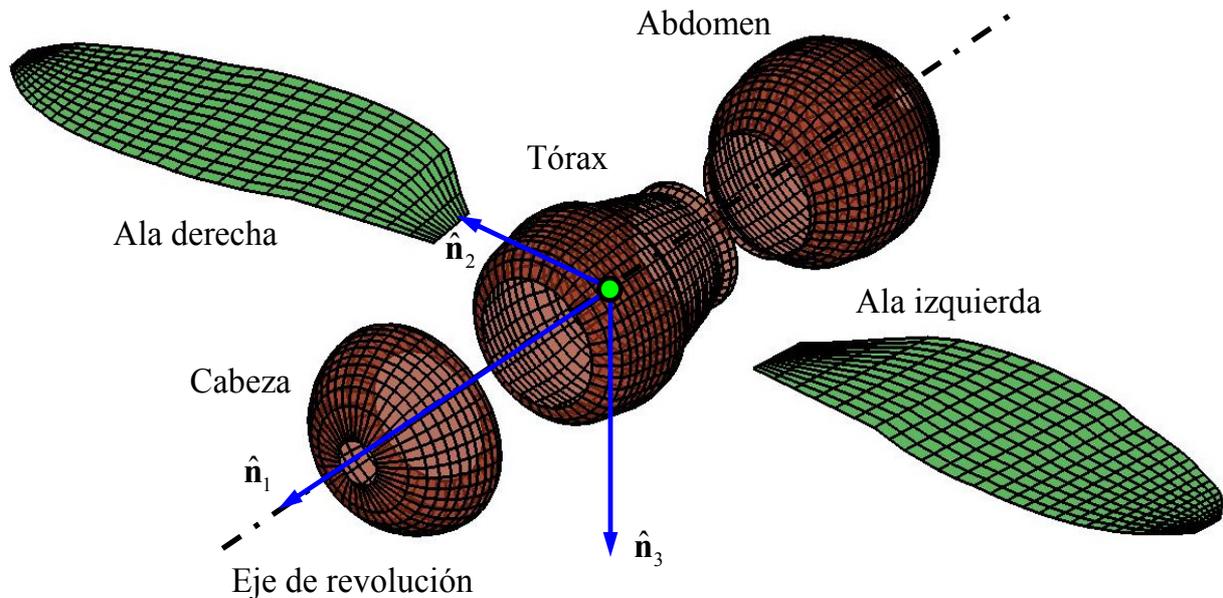


Figura 2: Vista 3D del insecto mallado

La elección de elementos cuadriláteros simples de cuatro nodos para discretizar el insecto proviene de la naturaleza del modelo aerodinámico adoptado para estudiar la aerodinámica de alas batientes. Este modelo es una versión modificada de la versión 3D del “*unsteady vortex lattice*”, una generalización del conocido “*vortex lattice method*”, ampliamente utilizado en flujos incompresibles y estacionarios.

2.1 Modelo aerodinámico

El método de red de vórtices no lineal e inestacionario (UVLM) permite considerar no-linealidades aerodinámicas asociadas con grandes ángulos de ataque, deformaciones estáticas, y flujos dominados por vorticidad en los que el fenómeno conocido como *vortex bursting* no ocurre. Además, permite tener en cuenta todas las posibles interferencias aerodinámicas y estimar, en el dominio del tiempo, la distribución de vorticidad asociada a la sábana vorticiosa adherida a los sólidos, y la distribución de vorticidad y la forma de las estelas emitidas desde los bordes filosos del cuerpo inmerso en el fluido. Si bien, el número de Reynolds que caracteriza el flujo real en los insectos es relativamente bajo, puede considerarse que tiene un valor lo suficiente alto como para asumir que los efectos viscosos están confinados, únicamente, a las capas límite que envuelven las alas y a las estelas vorticosas que se desprenden desde los bordes filosos. Este hecho permite utilizar el UVLM para predecir las cargas aerodinámicas que actúan sobre las alas batientes.

Como resultado del movimiento relativo entre el ala y el aire en reposo, se generan gradientes de velocidad que dan origen a vorticidad concentrada en una delgada región adherida a la super-

ficie del ala (capa límite). Esta sábana vorticosa se separa desde el borde de fuga, la puntera del ala y el borde de ataque y es ‘convectada’ hacia el seno del fluido para formar la estela.

Como se mencionó anteriormente, en el modelo utilizado se restringe toda la vorticidad del flujo a la capa límite adherida al sólido (cuerpo y alas del insecto) y a las estelas; fuera de estas regiones el flujo se considera irrotacional. Las estelas se representan mediante sábanas vorticosas libres. Sus posiciones no son especificadas ya que pueden deformarse libremente hasta adoptar configuraciones libres de fuerzas, esto es, no se produce ningún salto de presiones a través de las estelas. El flujo asociado con la vorticidad en la estela cercana al ala afecta el flujo alrededor del ala y por lo tanto las cargas actuantes sobre ella.

Debido a que la vorticidad presente en las estelas en un instante dado fue generada y convectada desde el ala en un tiempo anterior, las cargas aerodinámicas dependen de la historia del movimiento; las estelas contienen la ‘historia’. El campo de velocidades asociado con la vorticidad existente en un punto del espacio decae al alejarse de dicho punto; en consecuencia, a medida que la vorticidad en la estela va siendo transportada corriente abajo, su influencia decrece y por lo tanto se dice que ‘el historiador’ va perdiendo memoria.

Los dos tipos de sábanas vorticosas (libre y adherida) están unidas en los bordes filosos de cada ala, donde se impone la condición de Kutta para flujos inestacionarios. A medida que el ala se mueve durante un ciclo de batimiento, el ángulo de ataque efectivo puede alcanzar valores altos produciendo una separación adicional del flujo desde el borde de ataque (Roccia *et al.*, 2010).

Para más detalles sobre el método de red de vórtices no-lineal e inestacionario se pueden consultar los trabajos de Konstadinopoulos y otros, (1981) y Preidikman (1998).

En este modelo, las sábanas adheridas continuas sobre las alas y el cuerpo del insecto se reemplazan por una red de paneles rectangulares (elementos cuadriláteros) formados por segmentos vorticosos rectilíneos, ω_i , conectados entre si en los llamados *nodos aerodinámicos* (ver Figura 3).

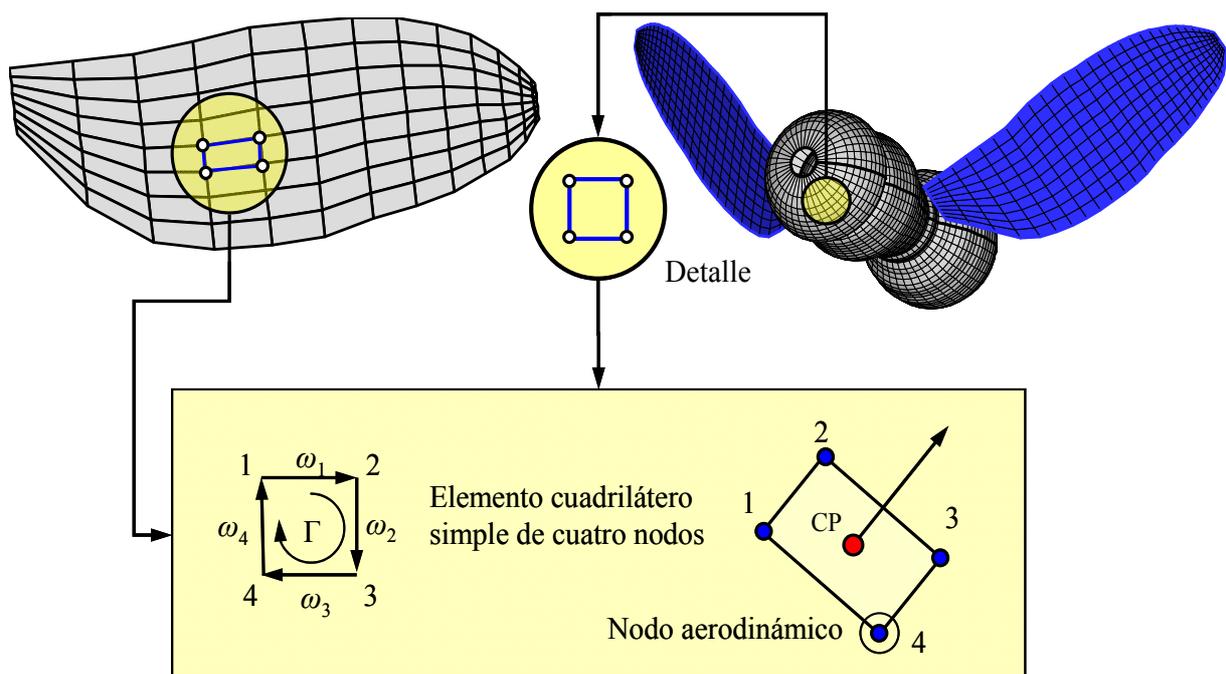


Figura 3: Discretización de la sábana vorticosa adherida al ala y al cuerpo del insecto.

3 MODELO DINÁMICO

El insecto se modela como una colección de cinco cuerpos rígidos interconectados ($nb = 5$), estos son: la cabeza, tórax, abdomen y las dos alas del insecto. Para llevar a cabo de una manera ordenada la deducción de las ecuaciones de movimiento no-lineales para la criatura se utilizaron seis marcos de referencias diferentes (ver Figura 4):

Un sistema de referencia inercial o Newtoniano $\mathbf{N} = (\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3)$; y

Un marco de referencia fijo a cada componente del insecto $\mathbf{B}^i = (\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i)$ para $i = 1, \dots, 5$.

Los vectores $\hat{\mathbf{n}}_j$, $\hat{\mathbf{b}}_j^i$ para $i = 1, \dots, 5$ y $j = 1, 2, 3$ son vectores unitarios que cumplen con las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3] &= \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_3) = +1; \text{ y} \\ [\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i] &= \hat{\mathbf{b}}_1^i \cdot (\hat{\mathbf{b}}_2^i \times \hat{\mathbf{b}}_3^i) = +1, \end{aligned} \quad (1)$$

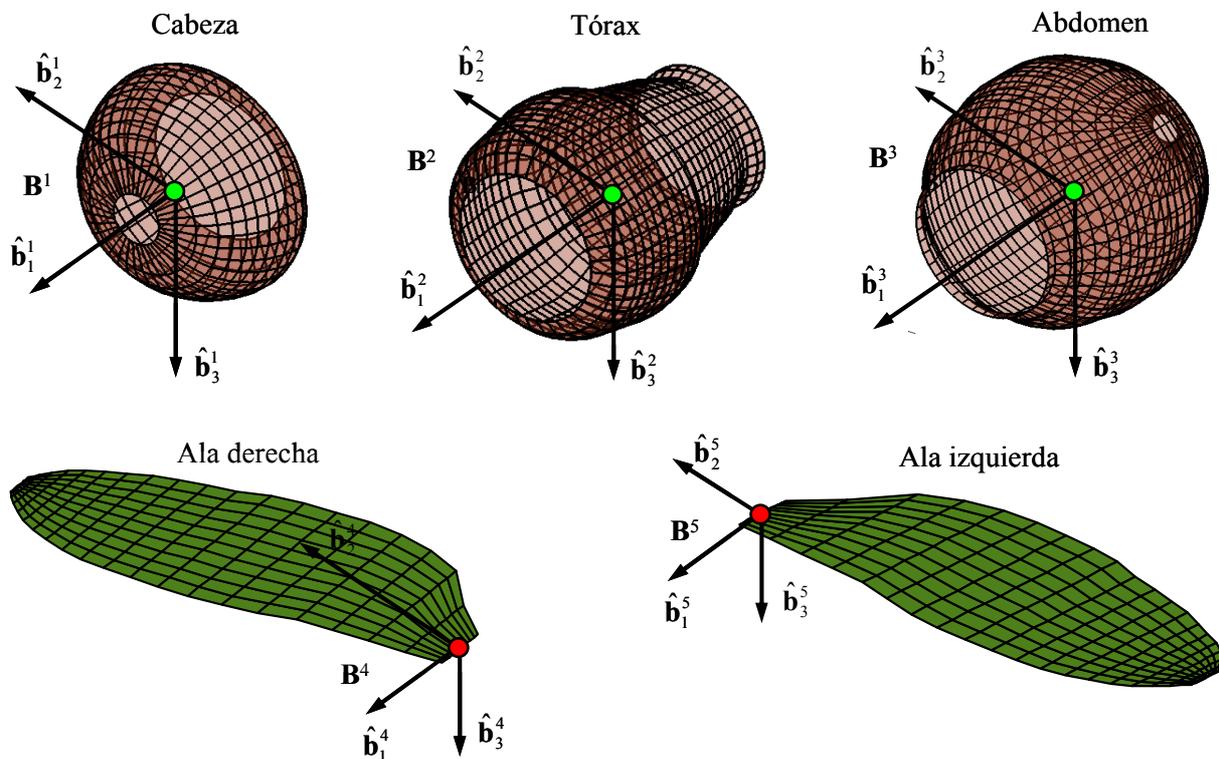


Figura 4: Definición de los diferentes marcos de referencias

Las ecuaciones de movimiento de la criatura se escriben siguiendo una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange con restricciones. La energía cinética de cada parte ' i ' del insecto se deriva utilizando un conjunto de seis coordenadas absolutas $q_i = (q_1, \dots, q_6)$ respecto de un marco de referencia inercial, \mathbf{N} , (3 coordenadas para definir la posición de un punto fijo al cuerpo, y 3 coordenadas para definir su orientación). Esto da un total de treinta coordenadas generalizadas ($6nb = 30$). Sin embargo, este conjunto de coordenadas no son independientes ya que están relacionadas mediante las ecuaciones de restricción.

En esta primera etapa se considera que la cabeza, el tórax y el abdomen del insecto no tienen movimiento relativo entre sí, y que las alas tienen un movimiento prescrito respecto

del cuerpo del insecto (cinemáticamente conducidas). Esta suposición permite reemplazar el cuerpo compuesto por la cabeza, tórax y abdomen del insecto por un único cuerpo que denominaremos en el futuro “cuerpo central” (ver Figura 5). Mediante esta simplificación, se logra un sistema cuya configuración puede ser descrita por dieciocho coordenadas generalizadas absolutas ($6nb = 18$). Por otro lado, las alas están relacionadas al cuerpo central mediante doce ecuaciones de restricción, tres de conexión y tres de orientación por cada ala. Este hecho introduce doce ecuaciones adicionales ($nc = 12$), lo cual produce un total de seis grados de libertad para el sistema ($DOF = 6nb - nc = 6$).

El conjunto de coordenadas generalizadas absolutas adoptadas para cada cuerpo se exponen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1 &= (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T = (x_1, y_1, z_1, \phi_1, \theta_1, \psi_1)^T; & \text{Cuerpo Central} \\
 \mathbf{q}_2 &= (q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T = (x_2, y_2, z_2, \phi_2, \theta_2, \psi_2)^T; & \text{Ala izquierda} \\
 \mathbf{q}_3 &= (q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18})^T = (x_3, y_3, z_3, \phi_3, \theta_3, \psi_3)^T; & \text{Ala derecha}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

donde $x_i, y_i,$ y z_i para $i = 1, 2, 3$ es un sistema de coordenadas rectangulares ortogonales asociado a los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3$ respectivamente, y $\phi_i, \theta_i,$ y ψ_i para $i = 1, 2, 3$ son coordenadas angulares que orientan cada uno de los cuerpos respecto del marco de referencia inercial \mathbf{N} .

Se utilizó una parametrización mediante ángulos de Euler para orientar cada uno de los cuerpos que componen el insecto. Para el cuerpo central se utilizó una secuencia de rotación (2-3-1) mediante los ángulos $\phi_1, \theta_1,$ y ψ_1 y para cada una de las alas se utilizó una secuencia de rotación (1-3-2) mediante los ángulos $\phi_2, \theta_2, \psi_2,$ y ϕ_3, θ_3, ψ_3 respectivamente.

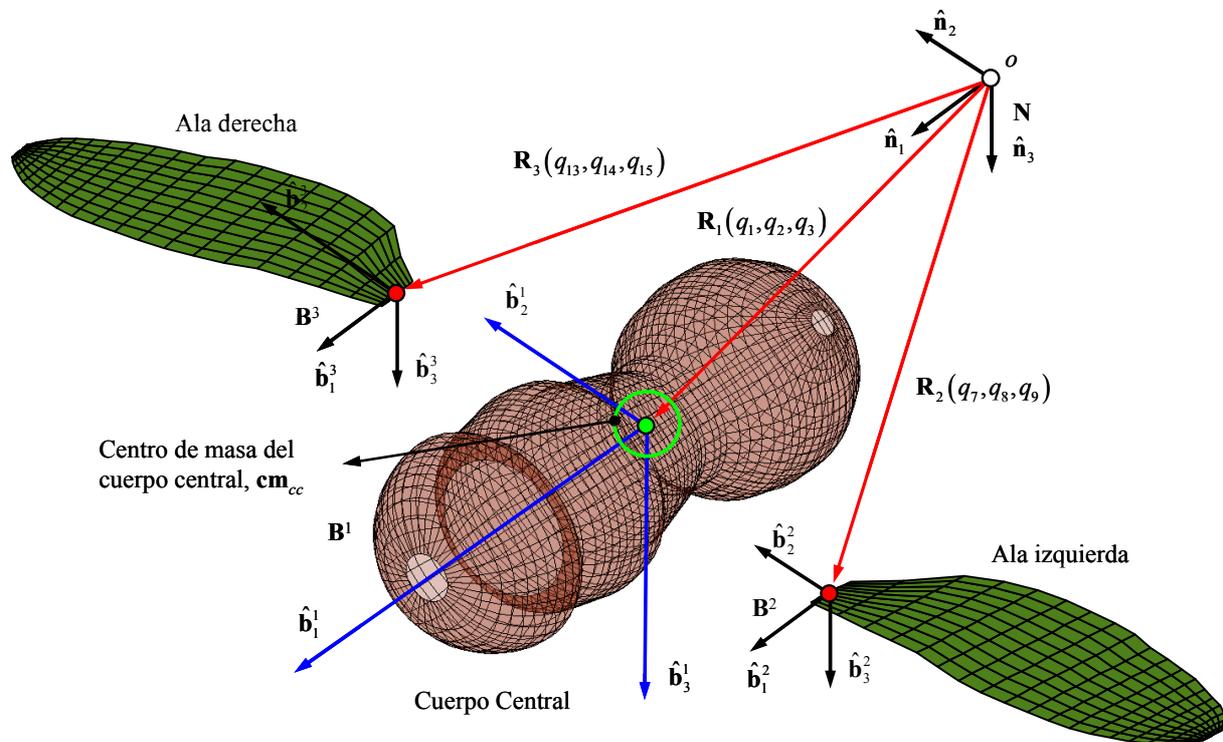


Figura 5: Definición de los marcos de referencias para cada cuerpo, y definición de los vectores posición del origen de cada sistema de referencia

3.1 Ecuaciones de restricción

La cinemática que caracteriza el movimiento de las alas de insectos y aves pequeñas es bastante compleja, involucrando simultáneamente rotaciones, oscilaciones, y cambios significativos en el ángulo de ataque. En la literatura existen muchos trabajos, experimentales y analíticos, sobre el estudio de la cinemática de alas batientes (Willmott *et al.*, 1997; Dickinson *et al.*, 2001; Bos *et al.*, 2007; Ellington, 1984; Roccia *et al.*, 2011).

Como se mencionó anteriormente las alas tienen un movimiento prescrito respecto del cuerpo central. En este trabajo se adoptó la descripción cinemática descrita en el trabajo de Roccia *et al.* (2011) para formular las ecuaciones de restricción de orientación de las dos alas respecto del cuerpo central del insecto. Por consiguiente, para cada ala se tiene:

- Restricción de posición: especifica el punto de conexión del ala con el cuerpo central para todo t .
- Restricción de orientación: especifica la orientación del ala respecto del cuerpo central del insecto para todo t .

Tanto la restricción de posición como así también la de orientación son del tipo holonómicas, a su vez la restricción de posición es esclerónoma debido a que el tiempo no aparece explícitamente en la formulación de dicha ecuación. Por el contrario, las restricciones a nivel de la orientación son del tipo reónomas porque dependen explícitamente del tiempo. Esta dependencia es consecuencia del movimiento prescrito que tienen las alas respecto del cuerpo central (Shabana, 2005).

Todas las ecuaciones de restricción son escritas respecto del marco de referencia inercial, \mathbf{N} . Para ello se define el vector posición de un punto arbitrario perteneciente a cada cuerpo, respecto del marco \mathbf{N} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p^1 &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{T}_1^{\mathbf{NB}^1} \mathbf{r}_1; & \mathbf{R}_1 &= (q_1, q_2, q_3)^T; \\ \mathbf{R}_p^2 &= \mathbf{R}_2 + \mathbf{T}_2^{\mathbf{NB}^2} \mathbf{r}_2; & \mathbf{R}_2 &= (q_7, q_8, q_9)^T; \\ \mathbf{R}_p^3 &= \mathbf{R}_3 + \mathbf{T}_3^{\mathbf{NB}^3} \mathbf{r}_3; & \mathbf{R}_3 &= (q_{13}, q_{14}, q_{15})^T, \end{aligned} \quad (3)$$

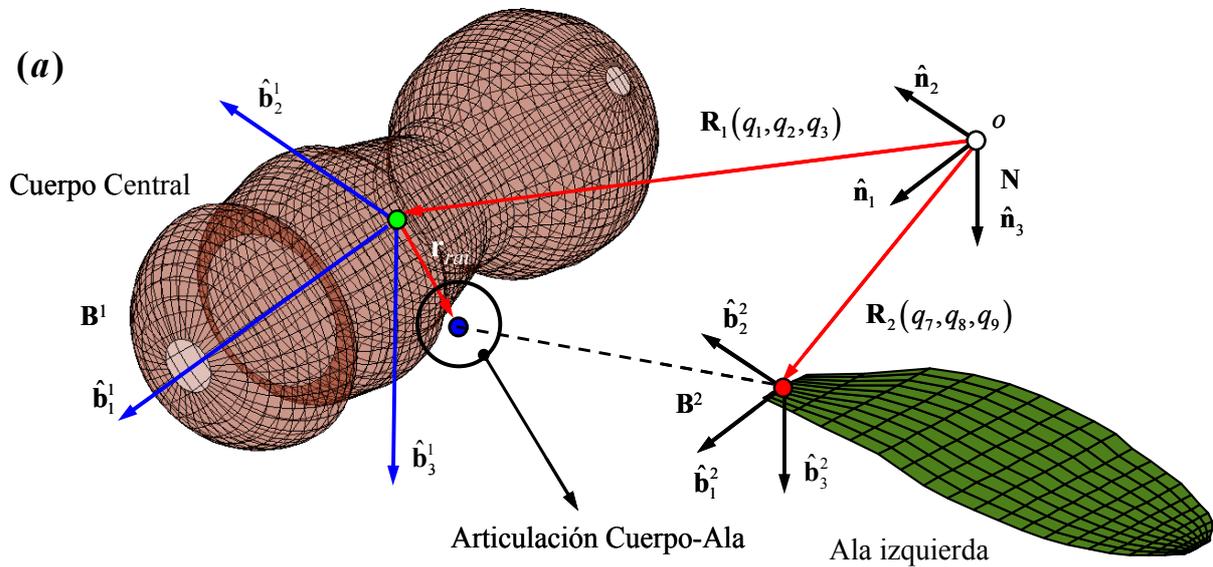
donde \mathbf{R}_i para $i = 1, 2, 3$ es el vector posición del origen de cada marco de referencia respecto del marco inercial \mathbf{N} , $\mathbf{T}_i^{\mathbf{NB}^i}$ para $i = 1, 2, 3$ representa la matriz de transformación de coordenadas (matriz de rotación) del marco de referencia \mathbf{B}^i respecto del marco de referencia inercial \mathbf{N} , y \mathbf{r}_i es el vector posición de un punto arbitrario sobre el cuerpo i respecto del marco de referencia fijo a dicho cuerpo.

Los superíndices “1”, “2”, y “3” en la Ecuación (3) se refieren al cuerpo central, ala izquierda y ala derecha respectivamente. Cada matriz de rotación, $\mathbf{T}_i^{\mathbf{NB}^i}$, se obtiene a partir de la secuencia de rotación mediante ángulos de Euler elegida para cada (Baruh, 1999).

Las doce ecuaciones de restricción para el sistema se dan en la Ecuación (4).

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rai}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = 0; & \varphi_7 &= (\hat{\mathbf{b}}_1^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{a}}_2 = 0; \\
 \varphi_2 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rai}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0; & \varphi_8 &= (\hat{\mathbf{b}}_2^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{a}}_3 = 0; \\
 \varphi_3 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rai}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0; & \varphi_9 &= (\hat{\mathbf{b}}_3^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{a}}_1 = 0; \\
 \varphi_4 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rad}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = 0; & \varphi_{10} &= (\hat{\mathbf{b}}_1^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_2 = 0; \\
 \varphi_5 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rad}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0; & \varphi_{11} &= (\hat{\mathbf{b}}_2^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_3 = 0; \\
 \varphi_6 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rad}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0; & \varphi_{12} &= (\hat{\mathbf{b}}_3^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_1 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Restricción de Conexión: cuerpo central – ala izquierda



Restricción de Orientación: cuerpo central – ala izquierda

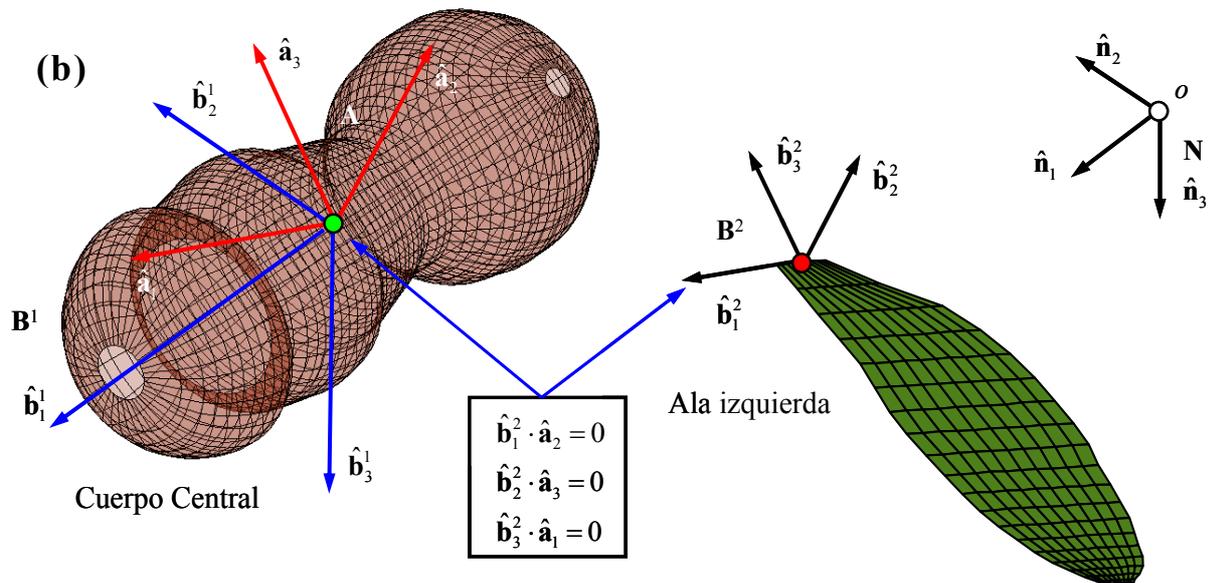


Figura 6: Restricciones: (a) restricción de conexión; (b) restricción de orientación

En la Ecuación (4) \mathbf{r}_{rai} es el vector posición de la articulación del ala izquierda con el cuerpo central medido respecto del marco de referencia fijo al cuerpo central, \mathbf{r}_{rad} es el vector posición de la articulación del ala derecha con el cuerpo central medido respecto del marco de referencia fijo al cuerpo central (ver Figura 6a), $\mathbf{C}_1(t)$ y $\mathbf{C}_2(t)$ son las matrices de rotación que orientan el ala izquierda y derecha respecto del cuerpo del insecto y dependen de la cinemática utilizada para describir el movimiento de las alas durante un ciclo completo de batimiento (Roccia *et al.*, 2007; Roccia *et al.*, 2011), y los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}_i$ y $\hat{\mathbf{e}}_i$ para $i = 1, 2, 3$ forman dos marcos de referencias adicionales llamados \mathbf{A} y \mathbf{E} , los cuales resultan de componer las rotaciones $\mathbf{C}_1(t)$ y $\mathbf{C}_2(t)$ con la matriz de transformación $\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i}$ (ver Figura 6b).

Finalmente el vector de restricción, $\Phi(\mathbf{q}, t)$, tiene la siguiente forma:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{12})^T \quad (5)$$

3.2 Fuerzas generalizadas

Un paso esencial en la formulación de las ecuaciones de movimiento de un sistema mediante el enfoque Lagrangiano es determinar las fuerzas generalizadas que actúan sobre dicho sistema. Estas pueden ser de naturaleza conservativa o no conservativa. Como paso previo a la formulación de las ecuaciones de movimiento, en esta sección se determinaran las fuerzas generalizadas no-conservativas provenientes de la aerodinámica y las fuerzas conservativas debidas a la acción del campo gravitatorio terrestre sobre cada parte componente del insecto.

Para determinar las fuerzas generalizadas asociadas con el conjunto de coordenadas generalizadas absolutas introducidas anteriormente, se utiliza el principio de trabajo virtual (Shabana, 2005; Shabana, 2010; Kane 1968; Bauchau, 2011). El trabajo virtual de una fuerza externa, \mathbf{F} , aplicada al sistema se define de la siguiente manera:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (6)$$

donde $\delta \mathbf{r}$ es un desplazamiento virtual arbitrario que pertenece al espacio tangente, \mathcal{TM} , al espacio de configuración, \mathcal{M} . Para sistemas con restricciones, dicho desplazamiento virtual pertenece al espacio tangente, pero además satisface la versión homogénea de las ecuaciones de restricción, \mathcal{TM} , (Heard, 2006; Terze and Naudet, 2006).

El desplazamiento virtual de un punto arbitrario perteneciente a un cuerpo i del sistema multicuerpo se puede expresar como:

$$\delta \mathbf{r}^i = \delta \mathbf{R}_i + \delta \left(\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \mathbf{r}_i \right) \quad (7)$$

Reemplazando la Ecuación (7) en la Ecuación (6) y operando se obtiene:

$$\delta W = \mathbf{F}_i \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \mathbf{r}_i \right) \delta \mathbf{q}_i \right\} = \mathbf{Q}_i \delta \mathbf{q}_i \quad (8)$$

donde \mathbf{Q}_i son las fuerzas generalizadas asociadas al conjunto de coordenadas generalizadas absolutas \mathbf{q}_i .

Utilizando el resultado expuesto en la Ecuación (8), las fuerzas generalizadas no conservativas provenientes de la aerodinámica sobre cada ala del insecto se expresan de la siguiente manera (ver Figura 7):

$$\mathbf{Q}_i^{nc} = \sum_{j=1}^{np} ({}^j\mathbf{F}_i)^T [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{H}_j]; \quad \text{para } i = 2,3 \quad (9)$$

donde \mathbf{I}_3 es la matriz identidad de 3x3, np es el número de paneles aerodinámicos que conforma la malla aerodinámica sobre cada ala del insecto, y \mathbf{H}_j es una matriz de 3x3 y proviene de la derivada de $\mathbf{T}_i^{NB^i} \mathbf{r}_i$ respecto de las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_i (Shabana, 2005).

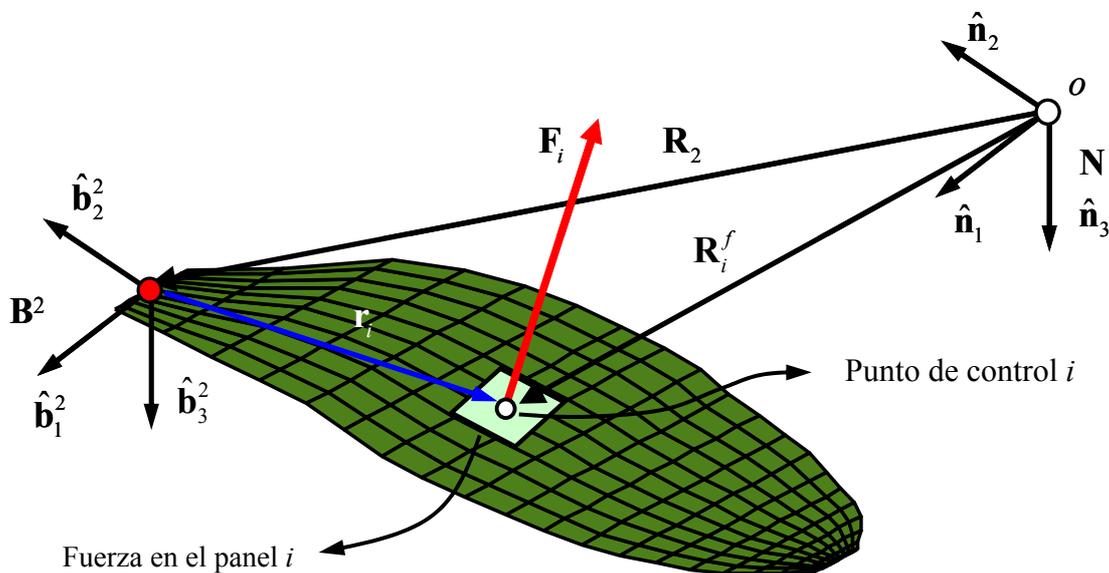


Figura 7: Fuerza aerodinámica sobre el panel i

Las fuerzas conservativas debidas al campo gravitatorio terrestre para los tres cuerpos que componen el sistema (cuerpo central, ala izquierda y ala derecha) se obtienen siguiendo el mismo procedimiento (ver Figura 8), esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^g &= (\mathbf{F}_1^g)^T [\mathbf{I}_3]; \\ \mathbf{Q}_i^g &= (\mathbf{F}_i^g)^T [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{H}_j]; \quad \text{para } i = 2,3; \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\mathbf{F}_i^g = m_i g \hat{\mathbf{n}}_3$

\mathbf{F}_i^g es el peso de cada cuerpo, m_i es la masa de cada cuerpo, y g es la constante de aceleración de la gravedad.

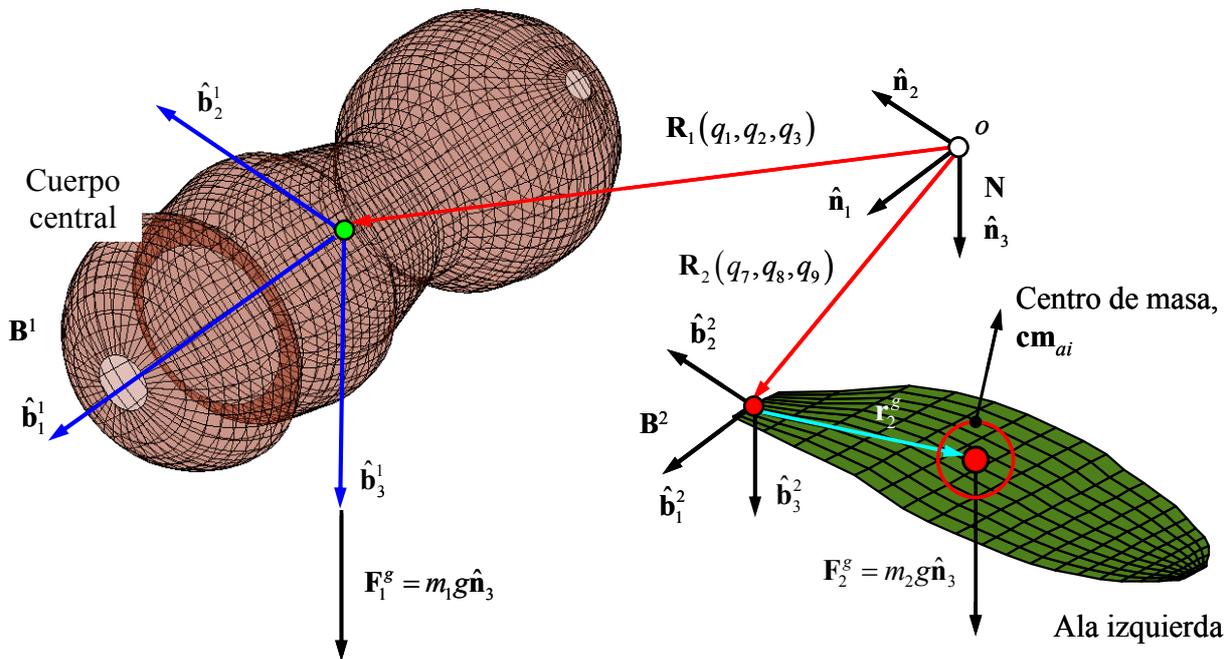


Figura 8: Fuerzas conservativas debidas a la acción de la gravedad sobre el cuerpo central y el ala izquierda (r_2^g es el vector posición del centro de masa del ala izquierda respecto del marco de referencia B^2)

3.3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de la criatura se escribieron empleando una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange con restricciones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \lambda^T \mathbf{B}_q = (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \tag{11}$$

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0},$$

donde L es el Lagrangiano del sistema, λ son los multiplicadores de Lagrange, y \mathbf{B}_q es la matriz Jacobiana de restricción.

En este trabajo, el potencial debido a la gravedad es incluido directamente dentro del término de las fuerzas conservativas, por lo tanto la Ecuación (11) se reduce a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \lambda^T \mathbf{B}_q = (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \tag{12}$$

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0},$$

donde T es la energía cinética del sistema.

Utilizando la metodología propuesta por Shabana (2005), la energía cinética T_i para cada parte del sistema se puede expresar como:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i (\dot{\mathbf{R}}_p^i)^T \dot{\mathbf{R}}_p^i dV_i, \tag{13}$$

donde el punto denota derivada respecto del tiempo, ρ_i es la densidad de masa por unidad de

longitud, de área o de volumen, y $\dot{\mathbf{R}}_p^i$ es la derivada respecto del tiempo y realizada por un observador inercial del vector posición de un punto arbitrario sobre el cuerpo i el cual fue definido anteriormente en la Ecuación (3).

Operando, el vector $\dot{\mathbf{R}}_p^i$ se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{R}}_p^i = \dot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \bar{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{14}$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_i$ es una matriz antisimétrica, y $\boldsymbol{\omega}_i$ es el vector velocidad angular del marco de referencia \mathbf{B}^i respecto del marco \mathbf{N} y expresado en el marco de referencia fijo al cuerpo i .

El vector velocidad angular del cuerpo i se puede expresar como el producto de una matriz, \mathbf{G}_i , que depende la parametrización de rotación elegida y un vector, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$, cuyas componentes son las derivadas temporales de las coordenadas angulares utilizadas para definir la orientación de dicho cuerpo:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{G}_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_i; \quad \text{donde } \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = (\dot{\phi}_i, \dot{\theta}_i, \dot{\psi}_i)^T \tag{15}$$

Reemplazando la Ecuación (15) en la Ecuación (14) se obtiene,

$$\dot{\mathbf{R}}_p^i = \dot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{G}_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_i, \tag{16}$$

Reemplazando la Ecuación (16) en la Ecuación (13) se obtiene:

$$T_i = \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} (\dot{\mathbf{R}}_i)^T & (\dot{\boldsymbol{\eta}}_i)^T \end{matrix} \right] \left\{ \int_{V_i} \rho_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{G}_i \\ \left(-\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{G}_i\right)^T & \mathbf{G}_i^T \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \mathbf{G}_i \end{bmatrix} dV_i \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{R}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \end{matrix} \right\}, \tag{17}$$

Por último, se define la matriz de masa del cuerpo i como sigue:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_i^{RR} & \mathbf{m}_i^{R\eta} \\ \left(\mathbf{m}_i^{R\eta}\right)^T & \mathbf{m}_i^{\eta\eta} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i^{RR} &= \int_{V_i} \rho_i \mathbf{I}_3 dV_i = m_i \mathbf{I}_3; \\ \mathbf{m}_i^{R\eta} &= -\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \left[\int_{V_i} \rho_i \bar{\mathbf{r}}_i dV_i \right] \mathbf{G}_i = -\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \mathbf{U}_i \mathbf{G}_i; \\ \mathbf{m}_i^{\eta\eta} &= \mathbf{G}_i^T \left[\int_{V_i} \rho_i \bar{\mathbf{r}}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i dV_i \right] \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T \mathbf{I}_i^{\eta\eta} \mathbf{G}_i, \end{aligned} \tag{19}$$

donde \mathbf{U}_i y $\mathbf{I}_i^{\eta\eta}$ son el primer tensor de inercia y el segundo tensor de inercia del cuerpo i calculados respecto del origen del marco de referencia fijo a dicho cuerpo y expresados en el mismo sistema.

Finalmente, la energía cinética del cuerpo i es:

$$T_i = \frac{1}{2} \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{q}_i \quad (20)$$

Introduciendo la Ecuación (20) en las ecuaciones de Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento para el cuerpo i :

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i^v + (\mathbf{Q}_i^{nc})^T + (\mathbf{Q}_i^c)^T$$

donde $\mathbf{Q}_i^v = -\dot{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} (T_i)$ (21)

\mathbf{Q}_i^v es un vector que es cuadrático en las velocidades y surge de derivar la energía cinética respecto del tiempo y de las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_i .

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el sistema total se obtienen ensamblando las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo i :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T;$$

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0},$$
(22)

donde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^T$.

3.4 Vector \mathbf{Q}^v

Para determinar el vector cuadrático en las velocidades, \mathbf{Q}_i^v , asociado a cada cuerpo i , escribimos la energía cinética del cuerpo i de la siguiente manera:

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{RR} \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{R\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^T \mathbf{m}_i^{\eta\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \quad (23)$$

Luego, el vector \mathbf{Q}_i^v , se puede expresar como:

$$\mathbf{Q}_i^v = -\dot{\mathbf{m}}_i^{RR} \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{m}}_i^{R\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i - (\dot{\mathbf{m}}_i^{R\eta})^T \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{m}}_i^{\eta\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{RR} \dot{\mathbf{R}}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{R\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^T \mathbf{m}_i^{\eta\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \right)$$
(24)

donde,

$$\dot{\mathbf{m}}_i^{RR} = \mathbf{0}_3;$$

$$\dot{\mathbf{m}}_i^{R\eta} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{T}_i^{\text{NB}'}) \mathbf{U}_i \mathbf{G}_i - \mathbf{T}_i^{\text{NB}'} \mathbf{U}_i \frac{d}{dt} (\mathbf{G}_i);$$

$$\dot{\mathbf{m}}_i^{\eta\eta} = \frac{d}{dt} (\mathbf{G}_i^T) \mathbf{I}_i^{\eta\eta} \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i^T \mathbf{I}_i^{\eta\eta} \frac{d}{dt} (\mathbf{G}_i),$$
(25)

donde $\mathbf{0}_3$ es la matriz nula de 3x3.

Finalmente, el vector \mathbf{Q}_i^v es:

$$\mathbf{Q}_i^v = - \left[\begin{array}{c|c} \dot{\mathbf{m}}_i^{RR} & \dot{\mathbf{m}}_i^{R\eta} \\ \hline (\dot{\mathbf{m}}_i^{R\eta})^T & \dot{\mathbf{m}}_i^{\eta\eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{R}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \end{array} \right\} + \quad (26)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{RR} \dot{\mathbf{R}}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{m}_i^{R\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^T \mathbf{m}_i^{\eta\eta} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \right)$$

El vector cuadrático, \mathbf{Q}_i^v , comprende todos los términos giroscópicos. Otro camino ampliamente utilizado en dinámica de multicuerpos para calcular este término es trabajar a nivel de componentes, este enfoque produce una formulación elegante para el vector \mathbf{Q}_i^v en término de los *símbolos de Christoffel* de primera especie (Heard, 2006).

4 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones diferenciales y el vector de restricciones cinemáticas, Φ , expuestas en la Ecuación (22) representan un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (*differential-algebraic equations*, DAEs) de índice 3 para el insecto completo con 6 DOF. Estas ecuaciones son, altamente no-lineales y una técnica analítica para su solución, en general no existe.

La metodología adoptada en este trabajo para resolver el sistema presentado en la Ecuación (22) consiste en derivar el vector de restricciones dos veces respecto del tiempo. Esta nueva ecuación suele ser llamada “restricciones a nivel de la aceleración”, y tiene la siguiente forma:

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{B}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (27)$$

El paso anterior permite reemplazar el sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas que gobiernan la evolución temporal de la criatura por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \lambda^T \mathbf{B}_q = \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \quad (28)$$

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0},$$

Sin embargo, el sistema derivado en la Ecuación (28) puede presentar inestabilidades como consecuencia del acumulamiento de errores de redondeo producidos durante el proceso de integración numérica, este hecho se ve reflejado en la violación de las ecuaciones de restricción. Bauchau (2011) realizó una extensa revisión bibliográfica sobre métodos de estabilización y de eliminación para evitar violaciones en las ecuaciones de restricción.

En este trabajo se utilizó el método de estabilización propuesto por Baumgarte (1972), cuya simplicidad y fácil implementación computacional lo hace una de las técnicas más populares en

la resolución de problemas dentro del ámbito de la dinámica de multicuerpos. Este método consiste en reemplazar la Ecuación (27) por:

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) + 2\alpha\dot{\Phi}(\mathbf{q}, t) + \beta^2\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (29)$$

donde α y β son constantes positivas definidas por el usuario.

Finalmente, el sistema de ODEs a resolver es:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{B}_q^T \\ \hline \mathbf{B}_q & \mathbf{0}_{12} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{q}} \\ - \\ \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}, t, \alpha, \beta) \end{array} \right\}; \quad (30)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, t, \alpha, \beta) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \right) \dot{\mathbf{q}} -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{q}, t) - 2\alpha \left(\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \right) - \beta^2 \Phi(\mathbf{q}, t)$$

donde $\mathbf{0}_{12}$ es la matriz nula de orden 12x12.

Otro aspecto de importancia crítica en la resolución final del sistema de ODEs es proveer un conjunto adecuado de condiciones iniciales, debido a que estas deben ser compatibles con las ecuaciones de restricción presentadas en la Ecuación (4).

Debido a la complejidad del problema abordado en este trabajo se utilizó una partición de coordenadas propuesto por Shabana (2005) y se implementó un esquema de Newton-Raphson para varias variables con el objetivo de determinar correctamente las condiciones iniciales (posición y velocidad) de todos los cuerpos que componen el sistema (cuerpo central, ala izquierda, y ala derecha) (Suli and Mayers, 2003; Heath, 2002).

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo se desarrolló el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento de un insecto. Para ello se utilizó una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. La robustez y generalidad del modelo desarrollado permite agregar cuerpos al sistema de una manera simple y, además, permite tratar de una manera sencilla las fuerzas no conservativas provenientes de la aerodinámica.

El modelo dinámico desarrollado en este trabajo tiene en cuenta el aporte de los efectos inerciales de las alas sobre el cuerpo del insecto, efecto que ha sido despreciado por la mayoría de los trabajos encontrados en la literatura.

Actualmente se está trabajando en la implementación computacional de un algoritmo de integración predictor-corrector de las ecuaciones de movimiento que permitirá en un futuro adicionar un modelo de predicción de cargas aerodinámicas, y la integración simultánea del conjunto en el tiempo.

REFERENCIAS

- Baruh H., *Analytical Dynamics*. McGraw Hill, 1999.
- Bauchau, O.A., *Flexible multibody dynamics*, Springer, New York, 2011.
- Baumgarte, J., Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1:1–16, 1972.
- Berman, G., and Wang, Z., Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight. *Journal of Fluid Mechanics*, 582:53–168, 2007.
- Bolender, M.A., Rigid multi-Body equations-of-motion for Flapping Wing MAVs using Kane's equations. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6158*, Chicago, IL, 2009.
- Bos, F.M., Lentink, D., van Oudheusden, B.W. and Bijl, H., Numerical study of kinematic wing models of hovering insect flight. *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 1–18, 2007.
- Buler, W., Loroch, L., Sibilski, K., and Zyluk, A., Modeling and simulation of the nonlinear dynamic behavior of a flapping wings micro-aerial-vehicle. *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2004-541*, Reno, NV, 2004.
- Deng, X., Schenato, L., and Sastry, S., Flapping flight for biomimetic robot insects: Part 2: Flight control design. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 22(4):789–803, 2006b.
- Deng, X., Schenato, L., and Sastry, S., Hovering flight control of a micromechanical flying insect. *40th IEEE Conference on Decision and Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers Paper TuA08-5*, Orlando, FL, 2001.
- Deng, X., Schenato, L., Wu, W., and Sastry, S., Flapping flight for biomimetic robot insects: Part 1: System modeling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 22(4):776–788, 2006a.
- Dickinson M., Solving the mystery of insect flight. *Scientific American*, 284(6):48-57, 2001.
- Dickinson M.H., Lehmann, F.O. and Sane S.P., Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284:1954–1960, 1999.
- Dietl, J., and Garcia, E., Stability in ornithopter longitudinal flight dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(4):1157–1162, 2008.
- Doman, D., Oppenheimer, M., and Sigthorrson, D., Dynamics and control of a minimally actuated biomimetic vehicle: Part 1: Aerodynamic Model. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6160*, Chicago, IL, 2009a.
- Doman, D., Oppenheimer, M., and Sigthorrson, D., Dynamics and control of a minimally actuated biomimetic Vehicle: Part 2: Control. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6161*, Chicago, IL, 2009b.
- Ellington C.P., The aerodynamics of hovering insect flight. III. Kinematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 305(1122): 41-78, 1984.
- Etkin, B., and Reid, L., *Dynamics of Flight*, Wiley, New York, 1996.
- Grauer, J., and Hubbard, J., Multibody model of an ornithopter. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(5):1675–1679, 2009.
- Heard, W.B., *Rigid Body Mechanics*, Wiley – VCH Verlag GmbH & Co., 2006.
- Heath, M., *Scientific Computing: An Introductory Survey*, McGraw-Hill Inc., New York, 2002.
- Kane T.R., *Dynamics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968.
- Konstadinopoulos, P., Mook, D.T. and Nayfeh, A.H., A numerical method for general unsteady aerodynamics. AIAA-81-1877. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, August 19–21, Albuquerque, New Mexico, 1981.

- Lasek, M., and Sibilski, K., Modeling and simulation of flapping wing control for a micromechanical flying insect (Entomopter). *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, AIAA Paper 2002-4973*, Monterey, CA, 2002.
- Markow, T., and O'Grady, P., *Drosophila: A Guide to Species Identification and Use*, Elsevier Inc., San Diego, California, 2006.
- Mueller, T.J. and Delaurier, J.D., An overview of micro air vehicle aerodynamics. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 195:1-10, 2001.
- Orlowski, C., Girard, A., and Shyy, W., Derivation and simulation of the nonlinear dynamics of a flapping wing micro-air vehicle. 2009 European Micro-Air Vehicle Conference and Competition, Delft, The Netherlands, 2009.
- Orlowski, C., Girard, A., and Shyy, W., Open loop pitch control of a flapping wing micro air vehicle using a tail and control mass. 2010 American Control Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Baltimore, MD, 536–541, 2010.
- Orlowski, C.T., and Girard, A.R., Modeling and simulation of nonlinear dynamics of flapping wing micro air vehicles. *AIAA Journal*, 49(5):969–981, 2011.
- Preidikman, S., Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Ph.D. Dissertation*, Dep. of Eng. Science and Mechanics, Virginia Tech, 1998.
- Roccia B.A., Preidikman S. y Massa J.C., Desarrollo de un código computacional para simular y analizar la cinemática de alas batientes. *Mecánica Computacional*, 26:3224-3245, 2007.
- Roccia, B.A., Preidikman, S., Massa J.C., and Mook, D.T., Development of a kinematical model to study the aerodynamics of flapping-wings. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 3(2):61-88, 2011.
- Roccia, B.A., Preidikman, S., y Massa, J.C., Aerodinámica de alas batientes: influencia del desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque. *Mecánica Computacional*, 29:3799-3823, 2010.
- Schenato, L., Campolo, D., and Sastry, S., Controllability issues in flapping flight for biomimetic micro air vehicles (MAVS),” *42nd IEEE Conference on Decision and Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers Paper FrE10-5*, Maui, HI, 2003.
- Shabana, A.A., *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2010.
- Shabana, A.A., *Dynamics of multibody systems*, Cambridge, New York, 2005.
- Suli, E., and Mayers, D.F., *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge, New York, 2003.
- Sun, M., and Xiong, Y., Dynamic flight stability of a hovering bumblebee. *Journal of Experimental Biology*, 208(3):447–549, 2005.
- Sun, M., Wang, J., and Xiong, Y., Dynamic flight stability of Hovering Insects. *Acta Mechanica Sinica*, 23(3):231–246, 2007.
- Taylor, G., and Thomas, A., Dynamic flight stability in the Desert Locust *Schistocera Gregaria*. *Journal of Experimental Biology*, 206(16):2803–2829, 2003.
- Terze, Z., and Naudet, J., Projective constraint violation stabilization method for multibody systems on manifolds. 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics, September 21-23, Troger/Split, Croatia, 2006.
- Willmott A.P. and Ellington C.P., The mechanics of flight in the hawkmoth *Manduca Sexta*. I. Kinematics of hovering and forward flight. *Journal of Experimental Biology*, 200:2705-2722, 1997.