

## MODELADO DE LAS VIBRACIONES DE UN ARREGLO DE TUBOS ELÁSTICAMENTE MONTADOS INMERSOS EN UN FLUIDO COMPRESIBLE UTILIZANDO ADAPTIVIDAD HP

Claudio Padra<sup>a</sup>, Mario Scheble<sup>a,b</sup> and José M. Piracés<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*División Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina, padra@cab.cnea.gov.ar*

<sup>b</sup>*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina, scheble@cab.cnea.gov.ar*

**Keywords:** Vibraciones, Interacción fluido-estructura, Elementos finitos, Adaptividad *hp*.

**Abstract.** Se desarrolló un método para obtener los modos de vibración de un haz de tubos sumergido en un fluido levemente compresible. Se propone una formulación variacional del problema de Helmholtz, la cual fue implementada numéricamente con un algoritmo adaptivo *hp* de elementos finitos. También se desarrolló un estimador de error confiable y eficiente que permitió obtener un orden de convergencia exponencial. Para validar el código se utilizaron los resultados de un problema con solución analítica. La robustez fue evaluada al hacer tender la velocidad  $c$  de propagación del sonido en el fluido a infinito, lo que, además, permitió verificar que el modelo contempla al caso con fluido incompresible. Luego se analizó el refinamiento que se produce alrededor de vértices reentrantes que generan soluciones con singularidades. La dependencia de las primeras autofrecuencias con  $c$  fue evaluada para varios valores de este parámetro. Por otra parte, se obtuvieron las soluciones de un problema con parámetros físicos diferentes para cada tubo.

Por último se estudió un problema con una geometría realista que se presenta en ciertos componentes de centrales nucleares. Se hizo un análisis de los modos de vibración y de sus frecuencias naturales, así como también de la aproximación a un fluido incompresible.

## 1 INTRODUCCIÓN

El problema de vibraciones de sólidos inmersos en un fluido ha sido de interés para muchos investigadores durante los últimos años. Este problema tiene considerable importancia en ingeniería ya que ocurre naturalmente en el diseño y simulación de intercambiadores de calor, condensadores, elementos combustibles y núcleos de reactores nucleares [Conca et al. \(1995\)](#).

Concentramos nuestra atención en las vibraciones de un haz de tubos sumergidos en un fluido contenido dentro de una cavidad. Cuando un haz de tubos elásticamente montados se encuentran inmersos en un flujo, ambos, fluido y tubos, vibran. Esto puede modelarse a través de una ecuación diferencial en derivadas parciales no-estacionaria (E.D.P.) en la región del fluido acoplada con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.) que representa a las oscilaciones de los tubos. La solución en la región del fluido mide la amplitud de las vibraciones del fluido. Las interacciones fluido-sólido son tenidas en cuenta a través del acoplamiento entre la E.D.P. y el sistema de E.D.O.

Dependiendo del tipo de fluido en el cual el objeto sólido esté inmerso, estos modelos involucrarán diferentes tipos de E.D.P. Por ejemplo, trataríamos con la ecuación de Laplace en el caso de un fluido perfecto incompresible, con la ecuación de onda si el fluido se asume perfecto y compresible, y con un sistema de ecuaciones de Stokes en el caso de un fluido viscoso. Por otro lado, las ecuaciones que modelan las vibraciones de los tubos dependen del tipo de suposiciones que se hacen sobre ellos. Aquí serán considerados como masas sólidas rígidas que vibran con amplitudes pequeñas. Sin embargo, también sería posible considerarlos como cuerpos elásticos sometidos a deformaciones.

Como se observa en la figura 1, un fluido homogéneo está contenido dentro de una cavidad tridimensional cilíndrica de sección transversal constante  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Dentro de la cavidad se encuentra una estructura sólida inmersa en el fluido cuya proyección en  $\Omega_0$  es también una región constante, la cual asumimos que es múltiplemente conexa con componentes  $\{\mathcal{O}_j\}_{j=1}^K$ . Es posible considerarlo como un conjunto de  $K$  tubos cilíndricos de la misma longitud, no necesariamente de sección circular, cuyas líneas generatrices son paralelas entre sí y a la vez perpendiculares a  $\Omega_0$ .

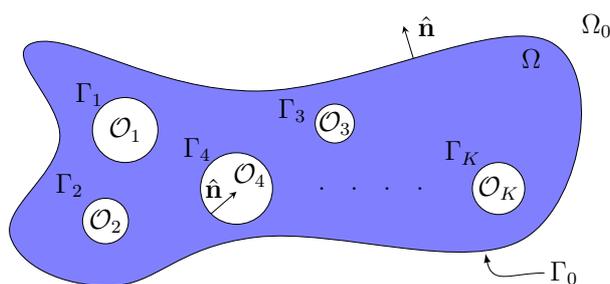


Figura 1: Regiones de  $\Omega_0$  y  $\Omega$ .

La interacción entre el fluido y dicha estructura sólida será estudiada en base a las siguientes consideraciones: (i) Los extremos de cada tubo se vinculan a dos superficies opuestas de la cavidad de manera tal de que cada uno puede asemejarse a una barra sólida a la cual se le permite mover transversalmente pero que no se le permite movimiento perpendicular a su sección, y (ii) Los tubos son suficientemente largos. Lo anterior nos permite ignorar efectos tridimensionales y entonces el problema puede ser estudiado sobre cualquier sección transversal perpendicular a los tubos.

Denotaremos a la parte de  $\Omega_0$  ocupada por el fluido como  $\Omega$ , i.e.,

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^K \bar{\mathcal{O}}_j.$$

Suponemos que  $\Omega_0$ ,  $\Omega$  y  $\mathcal{O}_j$  son todos subconjuntos acotados, conexos y abiertos de  $\mathbb{R}^2$  con fronteras localmente Lipschitz. Denotamos las fronteras de  $\Omega_0$  y de  $\mathcal{O}_j$  como  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_j$  respectivamente.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS DE VIBRACIONES DE FLUIDO-ESTRUCTURAS SÓLIDAS

### 2.1 Interacción sólido-fluido perfecto levemente compresible

#### 2.1.1 Hipótesis

1. Se considerará un fluido *levemente compresible*, es decir que su densidad puede tener sólo pequeñas variaciones alrededor de un valor medio, de tal modo que:

$$\rho^* = 1 + \rho'^* \quad \text{con} \quad |\rho'^*| \ll 1 \quad (1)$$

en donde se adimensionalizaron las densidades de acuerdo a  $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$  y  $\rho'^* = \frac{\rho'}{\rho_0}$ .

2. Se consideran pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio. Supondremos además que tanto  $\mathbf{v}$  como  $\nabla \mathbf{v}$  son pequeños.
3. La presión es una función creciente con la densidad, cuya dependencia viene dada por:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{p=p_0} \cdot \rho' + \mathcal{O}^2(\rho') \\ &\approx p_0 + c^2 \cdot \rho' \end{aligned} \quad (2)$$

en donde  $c = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{p=p_0}}$  es la velocidad de propagación del sonido en el fluido.

4. El campo de velocidades  $\mathbf{v}$  proviene de una función potencial  $\phi$ , tal que

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (3)$$

5. La viscosidad es nula:  $\mu = 0$ .

#### 2.1.2 Ecuación del fluido

A partir de la ecuación de conservación de la masa para fluidos compresibles, y empleando la hipótesis enumeradas anteriormente, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \Delta \phi = 0, \quad (4)$$

A partir de la ecuación de la conservación de momento, en donde se desprecia el término de segundo orden, se obtiene la siguiente relación entre el campo de presiones y el campo escalar  $\phi$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{p}{\rho_0}. \quad (5)$$

Derivando (5) respecto de  $t$ , llevando a (4), y simplificando los  $\rho_0$ , podemos arribar a la siguiente ecuación diferencial que describe el comportamiento del fluido

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0 \quad (6)$$

la cual es la ecuación de onda en  $\phi$ .

### 2.1.3 Ecuación de los sólidos

Se asume que el movimiento del tubo  $i$  es el de un oscilador armónico simple con un término de fuerza modelado por su interacción con el fluido. Más aún, se supone que los desplazamientos de los tubos son lo suficientemente pequeños para que las variaciones de  $\Omega$  inducidas por el movimiento de los tubos sean despreciadas. Como se asume que el fluido es no viscoso, este término depende sólo de la presión  $p$  del fluido, y por lo tanto del campo escalar  $\phi$ . Más precisamente, si  $\mathbf{s}_i$  es la velocidad transversal al instante  $t$  del  $i$ -ésimo tubo, medido desde la posición de reposo, entonces se satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{s}_i}{dt^2} + k_i \mathbf{s}_i = -\rho_0 \int_{\Gamma_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \hat{\mathbf{n}} d\gamma \quad i = 1, \dots, K \quad (7)$$

en donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el versor normal saliente de la frontera  $\Omega$ ,  $m_i$  es la masa por unidad de longitud del  $i$ -ésimo tubo,  $k_i$  es su constante de rigidez por unidad de longitud, y  $\phi(\mathbf{x}, t)$  es el campo escalar asociado a la presión del fluido en el punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  al instante  $t$ .

### 2.1.4 Condiciones de borde

El fluido no puede escaparse de la cavidad, por lo que  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  en la frontera exterior de  $\Omega$ , y entonces  $\phi$  satisface una condición de borde homogénea tipo Neumann en  $\Gamma_0$ :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0 \quad (8)$$

Por su parte, en  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , la componente normal de la velocidad del fluido debe coincidir con la componente normal de la velocidad del tubo, es decir que  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{s}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , y por lo tanto

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = \mathbf{s}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad i = 1, \dots, K \quad (9)$$

### 2.1.5 Formulación en el campo de las frecuencias

Como es usual en modelos de vibraciones, buscamos soluciones armónicas de la forma:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\ \mathbf{s}_i(t) &= \mathbf{S}_i e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (10)$$

en donde la *frecuencia angular de vibración*  $\omega$  del sistema acoplado es una de las incógnitas del problema.

Reemplazando (10) en la ecuación del fluido (6), en la ecuación del sólido (7), y empleando las condiciones de borde, arribamos al siguiente conjunto de ecuaciones que describen el problema físico estudiado:

$$\begin{cases} \Delta\Phi(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi(\mathbf{x}) = \omega^2 \left[ \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} d\gamma \right) + \frac{m_i}{k_i} \mathbf{S}_i \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, K \\ \mathbf{S}_i = \omega^2 \left[ \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} d\gamma \right) + \frac{m_i}{k_i} \mathbf{S}_i \right] & \text{en } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, K \end{cases}\quad (11)$$

A este problema se lo denomina *modelo de Helmholtz*. Observemos que el parámetro de frecuencia aparece en la ecuación en  $\Omega$  y en la condición de borde no local en  $\Gamma_i$ .

### 2.1.6 Formulación variacional del problema

Sean  $\Psi(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$  una función de prueba y  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2K}$  un vector de prueba, ambos arbitrarios. El problema variacional asociado a (11) puede formularse como sigue:

- Encontrar  $\omega^2$  y  $(\Phi, \mathbf{S}) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{2K}$  que satisfagan

$$\begin{cases} a((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = \omega^2 b((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) & \forall (\Psi, \mathbf{T}) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{2K}, \\ b((\Phi, \mathbf{S}), (\Phi, \mathbf{S})) = 1 \end{cases}\quad (12)$$

en donde

$$a((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = \int_{\Omega} \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_i, \quad (13)$$

$$b((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \Psi\Phi d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^K \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Psi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{T}_i \right) \cdot \left( \int_{\Gamma_i} \Phi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{S}_i \right) \quad (14)$$

De este modo, el problema queda planteado en forma simétrica, ya que las formas bilineales  $a$  y  $b$  son simétricas, como se mostrará en la observación 2.1.6. La solución de (12) es una sucesión infinita de pares  $(\omega_j^2, (\Phi_j, \mathbf{S}_j))$ , con autovalores  $\omega_j^2$  positivos, que suponemos ordenados en forma creciente:  $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots$ . Asociado a cada  $\omega_j^2$  existe un autovector  $(\Phi_j, \mathbf{S}_j) \in V$ , que tiene dos componentes: una función  $\Phi_j$  asociada al movimiento del fluido, y un vector  $\mathbf{S}_j$  que describe el movimiento de los tubos.

**Observación** Las formas bilineales  $a$  y  $b$  son simétricas.

**Prueba** De las definiciones de  $a$  y  $b$ , surge inmediatamente que

$$a((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = a((\Psi, \mathbf{T}), (\Phi, \mathbf{S}))$$

y que

$$b((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = b((\Psi, \mathbf{T}), (\Phi, \mathbf{S})).$$

**Observación** La forma bilineal  $b$  es definida positiva.

**Prueba** En efecto, para todo  $(\Phi, \mathbf{S}) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{2K} - \{(0, \mathbf{0})\}$  se cumple que

$$b((\Phi, \mathbf{S}), (\Phi, \mathbf{S})) = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \Phi^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^K \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{S}_i \right)^2 > 0.$$

### 2.1.7 Discretización del problema

Sea  $V_h^P$  el espacio de elementos finitos de dimensión  $N$ . El problema discreto de autovalores asociado con (12) es el siguiente:

- Hallar  $\omega_h^2$  y  $(\Phi_h, \mathbf{S}_h) \in V_h^P \times \mathbb{R}^{2K}$  que satisfagan

$$\begin{cases} a((\Phi_h, \mathbf{S}_h), (\Psi_h, \mathbf{T}_h)) = \omega_h^2 b((\Phi_h, \mathbf{S}_h), (\Psi_h, \mathbf{T}_h)) & \forall (\Psi_h, \mathbf{T}_h) \in V_h^P \times \mathbb{R}^{2K}, \\ b((\Phi_h, \mathbf{S}_h), (\Phi_h, \mathbf{S}_h)) = 1. \end{cases} \quad (15)$$

donde  $V_h^P$  es el espacio de elementos finitos de dimensión  $N$ .

Este problema se reduce a un problema matricial generalizado de autovalores, con  $N + 2K$  autovalores positivos, que suponemos ordenados en forma creciente:  $0 \leq \omega_{h,1}^2 \leq \dots \leq \omega_{h,N+2K}^2$ . Asociado a cada uno de ellos, existe un autovector  $(\Phi_{h,j}, \mathbf{S}_{h,j}) \in V_h^P \times \mathbb{R}^{2K}$ , tal que  $\{(\Phi_{h,1}, \mathbf{S}_{h,1}), \dots, (\Phi_{h,N+2K}, \mathbf{S}_{h,N+2K})\}$  es un conjunto linealmente independiente.

Si  $\{\varphi_{h,1}, \dots, \varphi_{h,N}\}$  es una base nodal de  $V_h^P$ , la ecuación (15) puede representarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0}_{N \times 2K} \\ \mathbf{0}_{2K \times N} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (16)$$

en donde

- $\mathbf{K}_{11} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tal que

$$[\mathbf{K}_{11}]_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{h,i} \cdot \nabla \varphi_{h,j} d\mathbf{x}$$

es la matriz de rigidez usual del Laplaciano

- $\mathbf{K}_{22} \in \mathbb{R}^{2K \times 2K}$  es una matriz diagonal dada por

$$\mathbf{K}_{22} = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_K & & \\ & & & & m_K & \\ & & & & & m_K \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{M}_{11} = \frac{1}{c^2} \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_\Gamma$  es una matriz en  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , siendo  $\mathbf{M}_L$  la matriz de masa usual del Laplaciano, y  $\mathbf{M}_\Gamma$  una matriz similar a la que surge en el modelo de Laplace para fluido incompresible Scheble (2010), cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_L]_{i,j} &= \int_{\Omega} \varphi_{h,i} \varphi_{h,j} d\mathbf{x} \\ [\mathbf{M}_\Gamma]_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^K \frac{\rho_0}{k_\ell} \left( \int_{\Gamma_\ell} \varphi_{h,i} \hat{\mathbf{n}} d\gamma_\ell \right) \cdot \left( \int_{\Gamma_\ell} \varphi_{h,j} \hat{\mathbf{n}} d\gamma_\ell \right). \end{aligned} \quad (17)$$

- $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^t \in \mathbb{R}^{N \times 2K}$  es una matriz de la forma

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_1 n_x d\gamma_1 & \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_1 n_y d\gamma_1 & \cdots & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_1 n_x d\gamma_K & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_1 n_y d\gamma_K \\ \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_2 n_x d\gamma_1 & \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_2 n_y d\gamma_1 & \cdots & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_2 n_x d\gamma_K & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_2 n_y d\gamma_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_N n_x d\gamma_1 & \frac{m_1}{k_1} \int_{\Gamma_1} \varphi_N n_y d\gamma_1 & \cdots & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_N n_x d\gamma_K & \frac{m_K}{k_K} \int_{\Gamma_K} \varphi_N n_y d\gamma_K \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{M}_{22} \in \mathbb{R}^{2K \times 2K}$  es una matriz diagonal dada por

$$\mathbf{M}_{22} = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{k_1} & & & & & \\ & \frac{m_1^2}{k_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{m_K^2}{k_K} & & \\ & & & & \frac{m_K^2}{k_K} & \\ & & & & & \frac{m_K^2}{k_K} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

- $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$  es el vector de coordenadas de la solución  $\Phi_h$  en la base nodal de  $V_h^p$ , es decir

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_{h,j}.$$

- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2K}$  es el vector formado por las componentes de los vectores de velocidad de los tubos, según se explicó anteriormente.

Por provenir de una forma bilineal definida positiva, también debe serlo la matriz de masa del problema de Helmholtz, que según vimos en (16) toma la forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Caso de un fluido perfecto incompresible

A continuación obtendremos el modelo del problema con fluido incompresible a partir del modelo con fluido levemente compresible descrito por el sistema (11). Como  $c$  aparece sólo en la ecuación diferencial en derivadas parciales, si tomamos el límite para  $c \rightarrow \infty$ , arribamos entonces al siguiente planteo de la ecuación diferencial con sus condiciones de borde:

$$\begin{cases} \Delta \Phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}) = \omega^2 \left[ \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} d\gamma \right) + \frac{m_i}{k_i} \mathbf{S}_i \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, K \\ \mathbf{S}_i = \omega^2 \left[ \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} d\gamma \right) + \frac{m_i}{k_i} \mathbf{S}_i \right] & \text{en } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, K \end{cases} \quad (19)$$

Esta es una formulación alternativa al *modelo de Laplace* para fluido incompresible (Conca et al. (1995)) en la cual las velocidades de los tubos aparecen como variables independientes. Mientras que la discretización del modelo de Laplace (Scheble (2010)) conduce a un problema matricial de dimensión  $N$ , en el presente caso arribamos a un problema ampliado de dimensión  $N + 2K$ .

Es importante notar que la forma bilineal  $b$ , definida ahora como:

$$b((\Phi, \mathbf{S}), (\Psi, \mathbf{T})) = \sum_{i=1}^K \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Psi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{T}_i \right) \cdot \left( \int_{\Gamma_i} \Phi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{S}_i \right) \quad (20)$$

solamente es *semi*-definida positiva. En efecto, si  $\Phi$  es una función no nula tal que  $\Phi|_{\Gamma_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ , y  $\mathbf{S}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , entonces  $(\Phi, \mathbf{S})$  es un vector no nulo de  $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{2K}$  para el cual se verifica que

$$b((\Phi, \mathbf{S}), (\Phi, \mathbf{S})) = \sum_{i=1}^K \frac{\rho_0}{k_i} \left( \int_{\Gamma_i} \Phi \hat{\mathbf{n}} d\gamma_i + \frac{m_i}{\rho_0} \mathbf{S}_i \right)^2 = 0.$$

En concordancia con este hecho, en la versión discreta la matriz de masa de la ecuación (16) se reduce a

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\Gamma & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

que tiene rango  $4K$  y por lo tanto no es estrictamente definida positiva.

## 3 MÉTODO *HP* DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 Estimador de error *a posteriori*

Para un uso eficiente del método *hp* de elementos finitos, típicamente es necesario adoptar un esquema adaptivo. Este se basa en un estimador de error *a posteriori* y una estrategia para decidir en cada paso si realizar un refinamiento  $h$  o un enriquecimiento de  $p$ .

Sean  $(\omega, \Phi, \mathbf{S})$  y  $(\omega_h, \Phi_h, \mathbf{S}_h)$  las soluciones de los problemas (12) y (15), respectivamente. Suponemos que  $\omega^2$  es un autovalor simple del problema (12), que  $\omega_h^2$  es el autovalor (también

simple) del problema (15), que converge a  $\omega^2$  cuando  $\max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{p_T} \rightarrow 0$ , y que  $(\Phi, \mathbf{S})$  y  $(\Phi_h, \mathbf{S}_h)$  han sido elegidos normalizados en  $\|\cdot\|_b$ .

Denotamos por  $e_\Phi := \Phi - \Phi_h$  y  $\mathbf{e}_\mathbf{S} := \mathbf{S} - \mathbf{S}_h$  a los respectivos errores. Presentamos aquí el estimador de error a posteriori del tipo residual que se usó en la implementación del modelo de Helmholtz, medido en la norma  $\|\cdot\|_a$ :

$$\|(e_\Phi, \mathbf{e}_\mathbf{S})\|_a = \left[ \|\nabla\Phi - \nabla\Phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{\rho_0} |\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_{h,i}|^2 \right]^{1/2}.$$

La razón principal para esta elección es que es la norma de la energía, la norma natural de este problema. Debemos remarcar que los últimos términos son de orden superior al primero, de modo tal que la medida más relevante del error es  $\|\nabla e_\Phi\|_{L^2(\Omega)}$ .

Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , sea  $\mathcal{E}_T$  el conjunto de lados de  $T$  y  $\mathcal{E} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_T$ . Descomponemos  $\mathcal{E}$  en conjuntos disjuntos  $\mathcal{E}_{\Gamma_i} := \{\ell \in \mathcal{E} : \ell \subset \Gamma_i\}$ , con  $0 \leq i \leq K$ , y  $\mathcal{E}_\Omega := \mathcal{E} \setminus \bigcup_{i=0}^K \mathcal{E}_{\Gamma_i}$ .

Para cada  $\ell \in \mathcal{E}_\Omega$  elegimos un vector normal unitario  $\mathbf{n}_\ell$  y denotamos los dos triángulos que comparten este lado como  $T_{in}$  y  $T_{out}$ , con  $\mathbf{n}_\ell$  apuntando en dirección saliente de  $T_{in}$ . Para  $\Psi \in V_h$  establecemos:

$$\left[ \left[ \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} \right] \right]_\ell := \nabla(\Psi_h|_{T_{out}}) \cdot \mathbf{n}_\ell - \nabla(\Psi_h|_{T_{in}}) \cdot \mathbf{n}_\ell,$$

que corresponde al salto en la derivada normal de  $\Psi_h$  a lo largo del lado  $\ell$ . Nótese que este valor es independiente de la dirección elegida para el vector normal  $\mathbf{n}_\ell$ .

Para cada  $\ell \in \mathcal{E}$ , definimos el residuo del lado

$$J_\ell := \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{\partial \Phi_h}{\partial n} \right] \right]_\ell, & \ell \in \mathcal{E}_\Omega, \\ -\frac{\partial \Phi_h}{\partial n}, & \ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_0}, \\ -\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial n} - \mathbf{S}_{hi} \cdot \mathbf{n}\right), & \ell \in \mathcal{E}_{\Gamma_i}, \quad i = 1, \dots, K, \end{cases}$$

y, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , el residuo volumétrico

$$R_T := \Delta(\Phi_h|_T) + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi_h|_T.$$

Definimos también, para cada elemento  $T \in \mathcal{T}_h$ , el **estimador local del error**  $\eta_T$  como

$$\eta_T^2 := \frac{h_T^2}{p_T^2} \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\ell \in \mathcal{E}_T} \frac{|\ell|}{p_\ell} \|J_\ell\|_{L^2(\ell)}^2$$

siendo  $p_\ell := \max\{p_T : \mathcal{E}_T \ni \ell\}$ , y el **estimador global del error** correspondiente  $\eta_\Omega$  como

$$\eta_\Omega^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2.$$

### 3.2 Confiabilidad

El siguiente teorema provee una cota superior para el error, al cual prueba la **confiabilidad** del estimador de error a menos de términos de orden superior.

**Teorema 3.1** *Existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\|(e_\Phi, \mathbf{e}_S)\|_a \leq C \left[ \eta_\Omega + \left( \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{p_T} \right)^{2r} |e_\Phi|_{H^1(\Omega)} \right].$$

Debido a que el término  $\left( \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{p_T} \right)^{2r} |e_\Phi|_{H^1(\Omega)}$  es claramente despreciable en forma asintótica con respecto al término izquierdo de esta estimación, concluimos que el error del método  $\|(e_\Phi, \mathbf{e}_S)\|_a$  es acotado por arriba por el estimador global  $\eta_\Omega$  a menos de términos de orden superior y una constante multiplicativa. En otras palabras,  $\eta_\Omega$  es un estimador de error a posteriori *asintóticamente confiable*.

### 3.3 Eficiencia

De manera de garantizar que el indicador de error es **eficiente** para dar lugar a un esquema de refinamiento adaptivo, a continuación mostraremos que  $\eta_T$  está acotada por la norma  $H^1$  del error en la vecindad de  $T$ , a menos de términos de orden superior.

**Teorema 3.2** *Para todo  $\delta > 0$ , existe una constante positiva  $C_\delta$  tal que para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , si  $T$  tiene sólo lados internos (i.e., lados  $\ell \in \mathcal{E}_\Omega$ ), entonces*

$$\eta_T \leq C_\delta p_T^{1+\delta} \left[ |e|_{H^1(\omega_T)} + \frac{h_T}{p_T} \left\| \frac{\omega^2}{c^2} \Phi - \frac{\omega_h^2}{c^2} \Phi_h \right\|_{L^2(\omega_T)} \right]$$

y, si  $T$  tiene un lado sobre  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , entonces

$$\eta_T \leq C_\delta p_T^{1+\delta} \left[ |e|_{H^1(\omega_T)} + \frac{h_T}{p_T} \left\| \frac{\omega^2}{c^2} \Phi - \frac{\omega_h^2}{c^2} \Phi_h \right\|_{L^2(\omega_T)} + \frac{h_T}{p_T} |\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_{h,i}| \right],$$

en donde  $\omega_T := \bigcup \{T' : T \text{ y } T' \text{ comparten un lado}\}$ .

### 3.4 Estrategia de refinamiento adaptivo

Existen varias estrategias para determinar qué elementos deben ser refinados. Uno de los más usuales es el siguiente: se marcan para refinar todos los triángulos  $T$  para los cuales resulte  $\eta_T \geq \theta \eta_M$ , donde

$$\eta_M^2 := \frac{1}{\#\mathcal{T}_h} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2$$

y  $\theta > 0$  es un parámetro que puede elegirse arbitrariamente.

Nuestro algoritmo adaptivo  $hp$  usa esta estrategia para marcar los triángulos a ser refinados, con la consideración adicional de que, en cada paso, para cada triángulo marcado, tiene que decidirse si realizar un refinamiento  $p$  o un refinamiento  $h$ . En el caso del refinamiento  $p$ , el grado  $p_T$  del elemento marcado se incrementa en uno y el triángulo no se modifica. Por su parte, en el caso del refinamiento  $h$ , el elemento marcado  $T$  se subdivide en cuatro triángulos,  $T = \bigcup_{j=1}^4 T'_j$ , y el grado es heredado por los nuevos elementos, es decir,  $p_{T'_j} = p_T$ . Además, la conformidad de la malla se preserva mediante la estrategia de bisección por el lado más largo de los triángulos vecinos no refinados (ver [Verfürth \(1996\)](#)). Debido a esto, sucede que algunos elementos no marcados para el refinamiento  $h$  de todos modos se subdividen en dos o tres triángulos. Así, en general, tendremos que  $T = \bigcup_{j=1}^k T'_j$ , con  $k = 2, 3$ , o  $4$ . Similarmente,

cuando se realiza un refinamiento  $p$  de un elemento, debe modificarse el grado de algunos triángulos vecinos para mantener la conformidad del método  $hp$  de elementos finitos.

Con el objeto de decidir si un triángulo particular debe refinarse  $p$  o  $h$ , adoptamos un criterio propuesto en [Melenk and Wohlmuth \(2001\)](#), que se basa en la comparación del error local estimado actual con una predicción de dicho error obtenida en el paso anterior. Si en el paso previo se produjo un refinamiento  $h$  que dio origen a una partición  $T = \bigcup_{j=1}^k T'_j$ ,  $k = 2, 3$ , o  $4$ , entonces el indicador del error predicho se define como sigue:

$$\left(\eta_{T'_j}^{pred}\right)^2 := \gamma_h \left(\frac{|T'_j|}{|T|}\right)^{p_T+1} \eta_T^2,$$

donde  $\gamma_h$  es un parámetro de control a ser determinado. Por otro lado, si en el paso precedente se realizó un refinamiento  $p$  en el elemento  $T$ , entonces el indicador de error predicho se define como

$$\left(\eta_T^{pred}\right)^2 := \gamma_p \eta_T^2,$$

donde  $\gamma_p \in (0, 1)$  es un factor de reducción que puede elegirse arbitrariamente. Finalmente, para los elementos que no sufrieron ninguno de los dos tipos de refinamiento en el paso anterior,

$$\left(\eta_T^{pred}\right)^2 := \gamma_n \left(\eta_T^{pred}\right)^2,$$

donde  $\gamma_n$  es un factor de reducción o amplificación, también arbitrario. En todos los casos, efectuamos un refinamiento  $h$  de  $T$  cuando el indicador de error  $\eta_T$  es mayor que el indicador de error predicho  $\eta_T^{pred}$ , y un refinamiento  $p$  en caso contrario.

El algoritmo al que arribamos mediante el procedimiento anteriormente descrito, se muestra esquemáticamente a continuación:

- 1: **if**  $\eta_T^2 \geq \theta \eta_M^2$  **then**
- 2:   **if**  $\eta_T^2 \geq \left(\eta_T^{pred}\right)^2$  **then**
- 3:     subdividir  $T$  en 4 triángulos  $T'_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$
- 4:     partición por el lado más largo para mantener la conformidad de la malla
- 5:      $p_{T'_j} := p_T$
- 6:      $\left(\eta_{T'_j}^{pred}\right)^2 := \gamma_h \left(\frac{|T'_j|}{|T|}\right)^{p_T+1} \eta_T^2$
- 7:   **else**
- 8:      $p_T := p_T + 1$
- 9:     conformación  $p$
- 10:     $\left(\eta_T^{pred}\right)^2 := \gamma_p \eta_T^2$
- 11:   **end if**
- 12: **else**
- 13:     $\left(\eta_T^{pred}\right)^2 := \gamma_n \left(\eta_T^{pred}\right)^2$
- 14: **end if**

Hemos fijado  $\eta_T^{pred} := 0$  para todos los elementos  $T$  de la triangulación inicial, de tal modo que el primer paso sea exclusivamente un refinamiento  $h$  de todos los elementos.

## 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1 Ejemplo con solución analítica: Dos tubos cilíndricos concéntricos

En primer lugar consideramos un ejemplo con solución analítica, utilizado para validar el código de cálculo. Más adelante aprovechamos también este ejemplo para verificar la robustez del método en el caso con fluido incompresible, al hacer tender  $c \rightarrow \infty$ . Se trata de dos tubos circulares concéntricos de radios  $r_i$  y  $r_e$ , tal como se muestra en la figura 2.

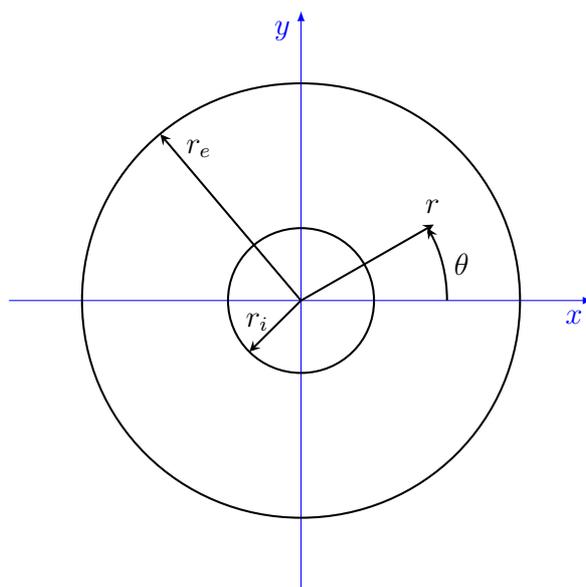


Figura 2: Tubos circulares concéntricos.

#### 4.1.1 Solución analítica general

Planteando el problema en coordenadas polares, y definiendo la normal saliente al dominio en el borde del tubo central como  $\hat{\mathbf{n}}(r_i, \theta) = -\cos\theta\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\hat{\mathbf{j}}$ , el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = 0, \quad r_i < r < r_e, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(r_e, \theta) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}(r_e, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(r_i, \theta) = \mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r_i, \theta) = \\ \quad = \frac{\rho_0\omega^2}{k-m\omega^2} \left( \int_0^{2\pi} \Phi(r_i, \vartheta) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i d\vartheta \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{array} \right. \quad (22)$$

en donde se hizo uso de la forma explícita de la velocidad  $\mathbf{S}_i$  de los tubos en la condición de borde sobre los mismos. Se propone un desarrollo de la solución en serie de Fourier de senos y cosenos,

$$\Phi(r, \theta) = \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(r) \cos n\theta + \beta_n(r) \sin n\theta], \quad (23)$$

y se reemplaza en la variable  $\Phi$  del sistema (22). Operando, se llega a un conjunto de ecuaciones ordinarias de Bessel. Luego de ser evaluadas las condiciones de borde, la solución de los valores de las autofrecuencias del problema se obtiene hallando los ceros de las siguientes funciones trascendentes sobre la variable  $\omega$ , ya que todos los demás parámetros son datos del problema:

$$\begin{cases} D_0(\omega) := J'_0\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) Y'_0\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) - Y'_0\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) J'_0\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) = 0, & n = 0, \\ D_1(\omega) := J'_1\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) \left[ Y'_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k - m \omega^2} r_i \pi Y_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) \right] - \\ \quad - Y'_1\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) \left[ J'_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k - m \omega^2} r_i \pi J_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) \right] = 0, & n = 1, \\ D_n(\omega) := J'_n\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) Y'_n\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) - Y'_n\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) J'_n\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) = 0, & n \geq 2. \end{cases} \quad (24)$$

#### 4.1.2 Solución de elementos finitos

Se hizo adaptividad sobre el modo 1 de vibración, al cual le corresponde la menor de las frecuencias no nulas. En la figura 3 se muestra la malla utilizada para comenzar el proceso adaptivo con elementos cuadráticos en todos los triángulos. Aprovechando las simetrías del dominio, se analizó la solución en un cuarto de anillo circular y se la extendió a todo el dominio, considerando las distintas combinaciones posibles de las condiciones de borde en los bordes  $\Gamma_s$ .

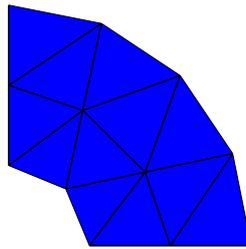


Figura 3: Tubos cilíndricos concéntricos. Dominio y malla inicial.

En las figuras 4 (a) y (b) se observan las curvas de nivel y el campo de velocidades del fluido y del tubo para el modo 1 de vibración. En la figura 5 presentamos las mallas extendidas obtenidas con el algoritmo adaptivo  $hp$  correspondiente a los pasos 3, 6, 9 y 12 del proceso de refinamiento para este modo. El color de cada triángulo representa el valor de  $p_T$  que le corresponde, según el código indicado por la paleta adjunta.

Se puede observar un marcado refinamiento  $h$  alrededor de los bordes circulares. El estimador es grande en esa zona por existir singularidades en los vértices del polígono que aproxima al tubo circular. Esto constituye un error de aproximación del dominio, por lo que al refinar  $h$  aumenta el número de lados del polígono. Por su parte se observa refinamiento  $p$  en las zonas alejadas de los bordes circulares, que no han sido muy refinadas en  $h$ .

Las autofrecuencias obtenidas con el programa numérico se comparan con los resultados obtenidos analíticamente en la tabla 1. Excepto la autofrecuencia 9, las demás son autofrecuencias dobles. Se puede apreciar un caso en donde existe un valor negativo en la columna de error absoluto. Esto se debe a que el dominio discretizado no coincide con el dominio del problema original en los bordes circulares, constituyendo lo que se denomina un error en la aproximación del dominio.

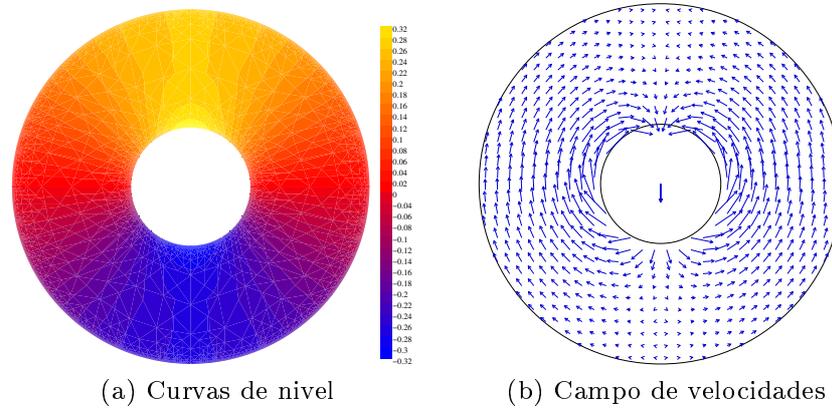


Figura 4: Modo 1: Curvas de nivel de la función  $\phi$  y campo de velocidades.

Modo n <sup>o</sup>	$\omega_{analitico}^2$	$\omega_{numerico}^2$	Error Absoluto
1	0.1357458	0.1357460	2.0E-07
3	0.6731973	0.6732010	3.7E-06
5	0.9554926	0.9554930	4.0E-07
7	1.9266273	1.9266489	2.2E-05
9	2.6752528	2.6752429	-1.0E-05
10	3.1301394	3.1301424	3.0E-06
12	4.3685180	4.3685292	1.1E-05

Tabla 1: Comparación de los valores de autofrecuencia obtenidos analíticamente vs numéricamente.

## 4.2 Caso con fluido incompresible

A continuación utilizaremos el programa para encontrar la solución de un problema incompresible, modificando sólo el parámetro de la velocidad del sonido  $c$ , llevándolo a este a un valor suficientemente alto.

Primero veamos qué resultado deberíamos encontrar. Llevando las expresiones (24) al límite de  $c \rightarrow \infty$ , tenemos:

- Para la primera ecuación,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[ J'_0 \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) Y'_0 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) - Y'_0 \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) J'_0 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] = -\frac{32}{3\pi}$$

que no depende de  $\omega$ , por lo tanto la única solución para este sistema es  $a_0 = b_0 = 0$ .

- Para la segunda,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ J'_1 \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) \left[ Y'_1 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k - m\omega^2} r_i \pi Y_1 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] - Y'_1 \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) \left[ J'_1 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k - m\omega^2} r_i \pi J_1 \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] \right\} = \frac{2(4 + 5\pi)\omega^2 - 8}{9\pi(\omega^2 - 1)}$$

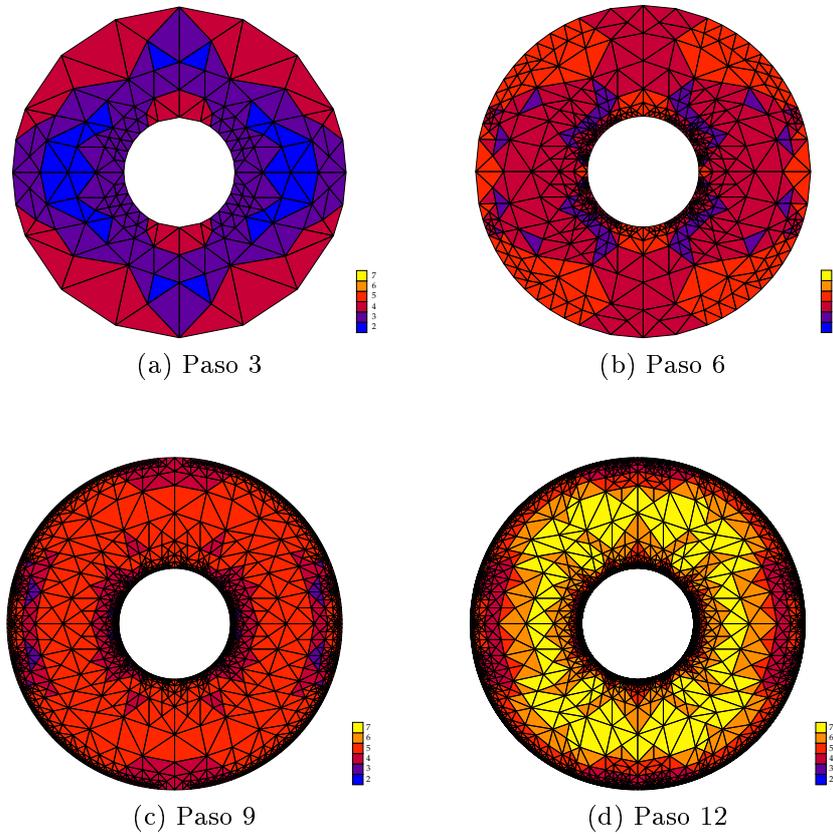


Figura 5: Tubos cilíndricos concéntricos. Mallas refinadas.

por lo que al igualar esta expresión a cero, resulta

$$\frac{2(4 + 5\pi)\omega^2 - 8}{9\pi(\omega^2 - 1)} = 0 \implies \omega^2 = \frac{4}{4 + 5\pi} = 0.20296364193580543$$

el cual es un autovalor doble ya que es solución de los sistemas que se desprenden de (23) con  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ .

- En la tercera,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[ J'_n \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) Y'_n \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) - Y'_n \left( r_e \frac{\omega}{c} \right) J'_n \left( r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] = \infty \quad \forall n \geq 2$$

por lo que  $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$  para  $n \geq 2$ .

Se recupera sólo el par de autofrecuencias provenientes de la condición de borde en el tubo, y los restantes no nulos tienden a infinito. Este último hecho está validado por el Teorema 3.13 inciso (iii) de la referencia (Conca et al. (1995)), en donde se demuestra este hecho por las propiedades continuas en la homotopía entre los modelos de Laplace y de Helmholtz. Luego, el Teorema 3.14 de la misma referencia muestra  $2K$  autovalores que convergen a los autovalores del modelo de Laplace a medida que  $c \rightarrow \infty$ .

Para la simulación numérica se tomó el parámetro  $1/c^2 = 10^{-10}$ , y se hicieron 12 pasos de adaptividad sobre el modo 1. En la tabla 2 se pueden observar las dos frecuencias correspondientes al primer y segundo modo, las cuales presentan su error absoluto en la columna de la derecha. Las siguientes frecuencias resultaron muy elevadas, las primeras del orden de  $c^2$ . El autovalor 0 no se obtuvo ya que se utilizaron las condiciones de borde DN y ND en los bordes que aparecen al dividir el dominio para aprovechar sus simetrías.

Nº	$\omega_{analitico}^2$	$\omega_{numerico}^2$	Error Absoluto
0	0	-	-
1	0.2029636419	0.2029636425	6.0E-10
2	0.2029636419	0.2029636505	8.6E-09
3	$\infty$	0.3E10	
4	$\infty$	0.6E10	

Tabla 2: Autofrecuencias para el caso con fluido incompresible.

### 4.3 Tubo romboidal dentro de una cavidad rectangular

Presentamos un ejemplo con una geometría simple, que utilizaremos para investigar el orden de convergencia del método *hp*-adaptivo. Consideramos un tubo romboidal centrado en una cavidad rectangular, como se muestra en la figura 6 que representa a la malla inicial. Se hizo adaptividad sobre los modos 1 y 3 de vibración.

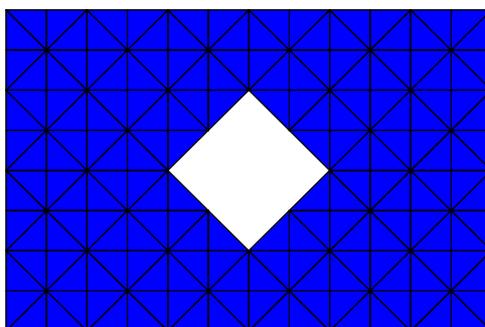


Figura 6: Dominio y malla inicial.

En este ejemplo el dominio ocupado por el fluido tiene ángulos reentrantes en los vértices del tubo. Debido a esto, los modos de vibración involucran autofunciones que son singulares en estos 4 puntos.

El comportamiento del sistema fluido-estructura para el modo 1 puede observarse en la figura 7 (a), y en la figura 7 (b) presentamos el campo de velocidades para el modo 3. Haciendo una comparación de ambas figuras, destacamos que, si bien en ambos casos el tubo se comporta en forma similar vibrando horizontalmente alrededor de la posición de equilibrio, el fluido se comporta de manera muy distinta. En el modo 1, la frecuencia es baja, y las líneas de flujo circulan desde el borde de ataque hacia el borde de fuga. Este comportamiento es cualitativamente parecido al del caso con un fluido incompresible (Scheble (2010)). En cambio, en el modo 3 el fluido acompaña al tubo, comprimiéndose sobre la pared que tiene enfrente.

La figura 8 muestra las mallas obtenidas con el algoritmo adaptivo en el paso 24 para los modos 1 y 3. Se aprecia cómo aumentó el orden  $p$  de los elementos alejados de las singularidades, y cómo aumenta el orden  $h$  en los elementos cercanos a los mismos.

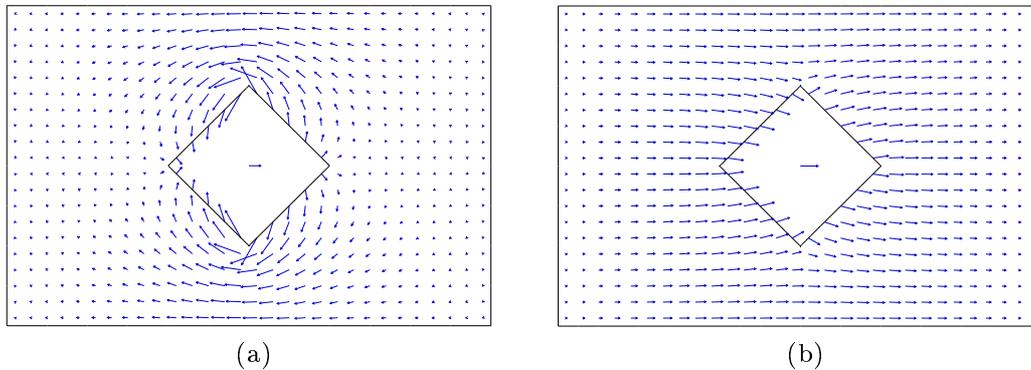


Figura 7: Campo de velocidades para los modos 1 y 3.

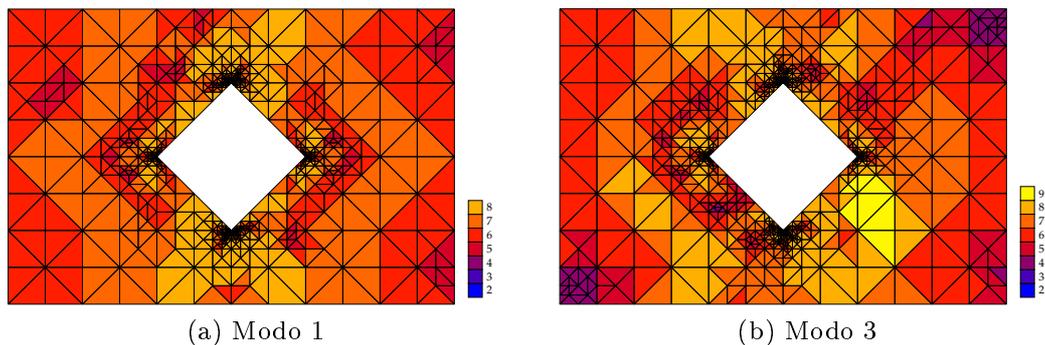


Figura 8: Dominio rectangular con tubo romboidal. Mallas refinadas en el paso 24.

En la figura 9 se ve una sucesión de ampliaciones de la malla del paso 24 alrededor de los vértices superior y derecho del tubo romboidal, para el modo 1. Podemos ver que en el primer caso los elementos más próximos al vértice son cuatro órdenes de magnitud más pequeños que en el segundo. Esta diferencia de refinamiento  $h$  es un indicio experimental de que ambas singularidades son de distinto orden. Podemos entonces afirmar que el movimiento del tubo determina el tipo de singularidad en cada uno de sus vértices.

#### 4.3.1 Orden de convergencia del estimador

Se hará un análisis de la velocidad de convergencia de la aproximación  $hp$  obtenido en este ejemplo. La combinación de refinamiento  $h$  con refinamiento  $p$  que implementamos, permite obtener una velocidad exponencial de convergencia

$$|e|_{H^1(\Omega)} \leq C e^{-\alpha \sqrt[3]{N}} \quad (25)$$

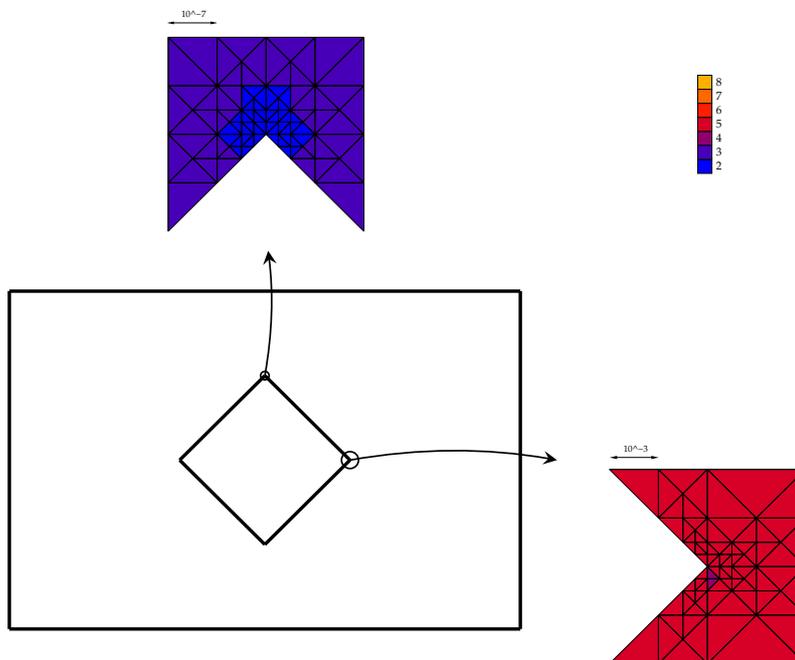


Figura 9: Órdenes de ampliación en los distintos vértices.

donde  $N$  es el número de grados de libertad.

En este caso no contamos con una solución analítica para verificar si el error absoluto también tiene el mismo tipo de convergencia exponencial. Para proveer evidencia numérica de tal comportamiento, se estimó el error de las autofrecuencias obtenidas usando como valor de referencia una aproximación obtenida mediante un proceso de extrapolación de los resultados numéricos. Dado que el orden de convergencia de los autovalores debería ser el doble del de las autofunciones, para obtener un valor más exacto podemos aplicar un procedimiento de extrapolación basado en el modelo

$$\omega_h^2 = \omega^2 + \kappa e^{-2\alpha \sqrt[3]{N}},$$

en donde deben determinarse los parámetros  $\omega^2$ ,  $\kappa$  y  $\alpha$  mediante un ajuste de cuadrados mínimos pesados. Los pesos se eligieron de tal modo que los autovalores obtenidos  $\omega_h^2$  más precisos, que corresponden a las mallas más refinadas, tengan un valor más significativo en el ajuste. Como los residuos en estas mallas son aproximadamente proporcionales a  $e^{-2\alpha \sqrt[3]{N}}$ , las soluciones mejor calculadas serían justamente las que menos influirían en un ajuste estándar. Para revertir esta situación elegimos  $(e^{-2\alpha \sqrt[3]{N}})^2$  como peso.

El procedimiento es el siguiente: para un  $\alpha$  dado, obtenemos  $\omega^2$  y  $\kappa$  de minimizar

$$g(\lambda, \kappa) := \sum_{j=J_1}^{J_2} \left( \omega_{h,j}^2 - \omega^2 - \kappa e^{-2\alpha \sqrt[3]{N_j}} \right)^2 \left( e^{2\alpha \sqrt[3]{N_j}} \right) = \sum_{j=J_1}^{J_2} \left[ (\omega_{h,j}^2 - \omega^2) e^{2\alpha \sqrt[3]{N_j}} - \kappa \right]^2, \quad (26)$$

donde  $\omega_{h,j}^2$  y  $N_j$  son las coordenadas de los puntos obtenidos en el paso  $j$ , y  $J_1$  y  $J_2$  indican respectivamente el primero y el último punto del sector asintótico de la curva en el cual realizamos el ajuste. Derivando (26) respecto de ambas variables e igualando a cero, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que permite obtener  $\omega^2$  y  $\kappa$  como funciones de  $\alpha$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=J_1}^{J_2} e^{4\alpha \sqrt[3]{N_j}} & \sum_{j=J_1}^{J_2} e^{2\alpha \sqrt[3]{N_j}} \\ \sum_{j=J_1}^{J_2} e^{2\alpha \sqrt[3]{N_j}} & (J_2 - J_1 + 1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=J_1}^{J_2} \omega_{h,j}^2 e^{4\alpha \sqrt[3]{N_j}} \\ \sum_{j=J_1}^{J_2} \omega_{h,j}^2 e^{2\alpha \sqrt[3]{N_j}} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

El valor óptimo de  $\alpha$ , a su vez, surgirá de minimizar

$$f(\alpha, \omega^2(\alpha), \kappa(\alpha)) = \sum_{j=J_1}^{J_2} \left( \omega_{h,j}^2 - \omega^2 - \kappa e^{-2\alpha \sqrt[3]{N_j}} \right)^2$$

en donde  $\omega^2(\alpha)$  y  $\kappa(\alpha)$  son la solución de (27). La minimización de  $f$  se efectúa numéricamente, a través de un barrido en  $\alpha$ .

Ajustando los últimos 16 puntos de los 25 que obtuvimos, que incluyen a la malla inicial, calculamos el valor de extrapolación  $\omega^2 = 0.438100529301668$  con un parámetro de convergencia  $\alpha = 0.645795$ . En la figura 10 (a) se muestra el logaritmo del error  $\ln(\omega_{h,j}^2 - \omega^2)$  calculado tomando el valor extrapolado como exacto, versus  $\sqrt[3]{N_j}$ . La superposición entre la curva obtenida numéricamente y la recta de ajuste muestra que se alcanza un orden exponencial de convergencia en la zona asintótica de la curva.

En la figura 10 (b) se muestra un gráfico de  $\ln \eta_\Omega$  versus  $\sqrt[3]{N}$ , en la cual se ha superpuesto el ajuste lineal de los últimos 8 puntos, en concordancia con la cantidad usada en el procedimiento de extrapolación. Se ve que el error estimado  $\eta_\Omega$  alcanza en este problema el orden exponencial de convergencia previsto en (25) para el error exacto. El valor  $\alpha = 0.65247$  obtenido es parecido al que surge de la extrapolación del autovalor, lo que muestra la consistencia de los ajustes.

### 4.3.2 Comparación entre estrategias de refinamiento *uniforme*, *h* y *hp*

Aprovechamos este ejemplo para realizar una comparación cualitativa entre las velocidades de convergencia de los métodos de refinamiento *uniforme*, *h* a *p* fijo, y *hp*.

Primero, en la figura 11 se muestra el refinamiento de la malla que se logra con los distintos métodos. Nótese que el número de grados de libertad que tiene la malla es del mismo orden en los tres casos, y sin embargo el número de pasos de refinamiento necesario para alcanzar tal número es mayor en donde hay adaptividad.

En la tabla 3 se realiza la comparación el número de grados de libertad necesarios para alcanzar aproximadamente el mismo orden en el error del autovalor. Se observa que con refinamiento uniforme se requiere de un número muy grande. Por otro lado, para este número de pasos, el método *hp* sólo tomó la mitad de grados de libertad respecto al refinamiento *h*.

En la tabla 4 puede apreciarse la ventaja de la adaptividad *hp* sobre la adaptividad *h*. Para lograr aproximadamente el mismo orden en el error, ambos en 20 pasos, el número de grados de libertad que requiere el método *hp* es de dos órdenes de magnitud menor.

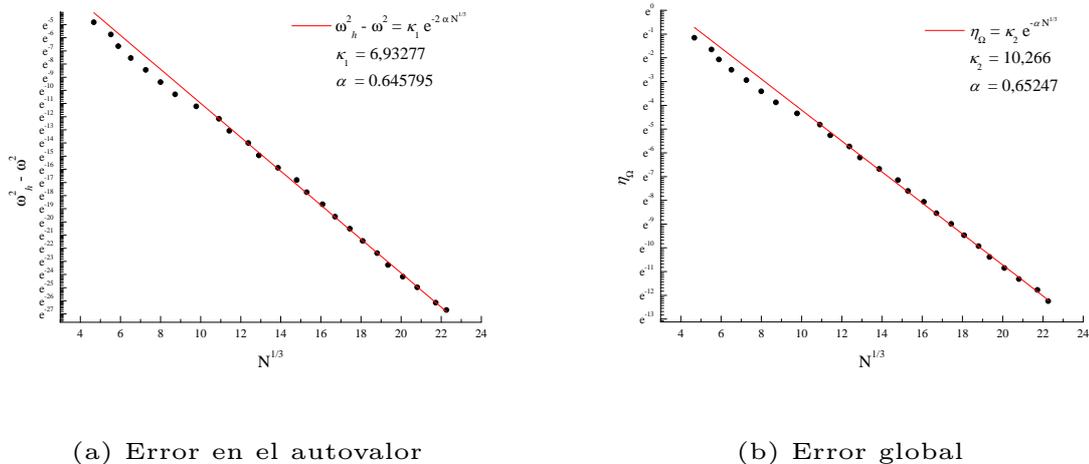


Figura 10: Curvas de convergencia del estimador y del error en el autovalor.



Figura 11: Mallas refinadas con los distintos métodos.

En las figuras 12 (a) y (b) se observa en escala logarítmica el decrecimiento del error estimado con cada uno de los pasos de adaptividad, y se distinguen las curvas correspondientes a la estrategia de refinamiento  $h$ , variando el valor de  $p$ , y la que corresponde a la estrategia de refinamiento  $hp$ , en negro.

En la figura (a) se puede ver que la curva correspondiente a la estrategia  $hp$  tiene una pendiente que decrece más rápidamente que las que se obtuvieron al utilizar la estrategia  $h$ , para  $p = 1, 2$  y  $3$ .

Observando la figura (b), notamos que si seguimos aumentando el orden de los polinomios interpolantes aumenta también el número de grados de libertad del primer paso de adaptividad. Esto demora más la convergencia hacia a una recta de pendiente proporcional a  $p$ . En consecuencia no se observa que para algún valor de  $p$  fijo, la estrategia de refinamiento  $h$  sea más eficiente que la estrategia  $hp$ , para algún número determinado de pasos de adaptividad.

	Ref uniforme	Adaptividad $h$	Adaptividad $hp$
Paso	6	6	6
DOF	361344	1420	665
Error abs	3.0E-05	3.3E-05	3.3E-05

Tabla 3: Comparación entre los métodos de refinamiento de malla. Error  $\approx 3.0E-5$ 

	Ref uniforme	Adaptividad $h$	Adaptividad $hp$
Paso	-	20	20
DOF	-	917589	7243
Error abs	-	1.4E-10	7.7E-11

Tabla 4: Comparación entre los métodos de refinamiento de malla. Error  $\approx 1.0E-10$ 

#### 4.4 Cavity cilíndrica con 28 tubos cilíndricos

Presentaremos un ejemplo de mayor interés práctico, ya que ciertos problemas de vibraciones que aparecen frecuentemente en la industria pueden ser estudiados utilizando la implementación del modelo de Helmholtz desarrollada. En particular, en la industria de la energía nuclear existen numerosos dispositivos sometidos a vibraciones que presentan geometrías que son factibles de analizar. Un ejemplo son las barras combustibles de los reactores nucleares de potencia, en donde algunos diseños consisten en un arreglo de barras cilíndricas, los elementos combustibles, dispuestos en forma de coronas concéntricas, y que van alojados dentro de un tubo cilíndrico, llamado canal combustible. Diseños con estas características geométricas pueden encontrarse en las barras combustibles de los reactores de las centrales nucleares Embalse, Atucha I y Atucha II, para citar algunos casos.

En la figura 13 mostramos la imagen que corresponde a la descripción anterior. Se trata de una barra combustible para reactores de tipo CANDU, de 28 elementos, de 52 cm de longitud y sin separadores interiores. En este caso, la disposición de los tubos es horizontal, por lo que los elementos quedarían apoyados sobre el canal combustible, si no fuera por unos pequeños separadores de aproximadamente 0.5 mm de espesor, que alcanzan a verse en la imagen en la entrada del tubo. Sin embargo esta situación no se tuvo en cuenta en el ejemplo propuesto.

Al analizar el problema, primero se identificaron las simetrías que contiene el dominio. Se tomó un subdominio que corresponde a un cuarto del dominio original, como se puede ver en la figura 14 que muestra la malla inicial.

Los parámetros físicos tomados para el presente ejemplo son los siguientes:

$$\begin{aligned} \emptyset_{cavidad} &= [0.1034]m & k &= [27800] \frac{kg}{m \cdot s^2} \\ \emptyset_{tubo} &= [0.01524]m & m &= [0.22] \frac{kg}{m} \\ \text{Espacio mínimo entre elementos} &= [0.00127]m & c &= [1200] \frac{m}{s} \\ \text{Espacio mínimo entre cavidad y elementos} &= [0.0005]m & \rho_0 &= [1000] \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

que corresponden a tubos soportados con la elasticidad del acero, sumergidos en agua. Los parámetros geométricos se obtuvieron de Page (2001), y los parámetros físicos fueron extraídos de la referencia Planchard (1983).

En la tabla 5 se presentan los valores de frecuencia de los modos de vibración 1,  $2K = 56$  y  $2K + 1 = 57$  en unidades de Hz. Se puede ver que las primeras  $2K = 56$  frecuencias

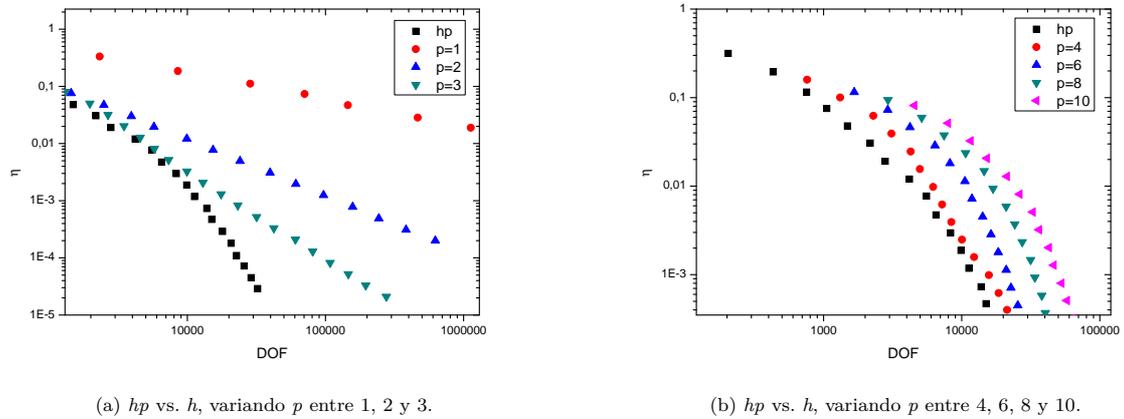


Figura 12: Curvas de decrecimiento del error estimado y aumento del número de grados de libertad (DOF) con cada paso de adaptividad.

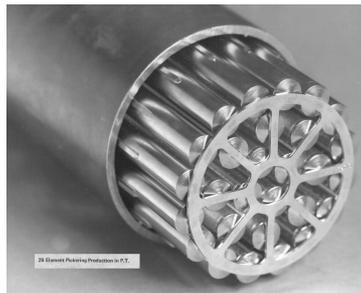


Figura 13: Arreglo de elementos combustibles tipo CANDU modelos Pickering y Bruce.

son menores a la frecuencia del sistema masa-resorte en vacío, dado por  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = [56.5758632407] Hz$ . Por otro lado, debemos notar que el autovalor correspondiente al modo “0” no es un cero numérico tan pequeño como en los ejemplos anteriores. Respecto a esta situación podemos inferir que el método de iteración de subespacios parece no ser tan robusto para el tipo de distribución espectral de las frecuencias que se presenta en este ejemplo particular, debido a los “saltos” en los órdenes de magnitud de los autovalores.

En la figura 15 se presentan los campos de velocidades y curvas de nivel de  $\Phi$  de algunos modos obtenidos con las condiciones de borde homogéneas Dirichlet-Dirichlet, Dirichlet-Neumann o Neumann-Neumann, que resultaron interesantes de observar. En los tres casos se tomó el último modo que pueda ser reconstruido a partir de las respectivas condiciones de borde aplicadas sobre el dominio reducido, inferior al modo  $2K$ , lo que corresponde a los modos 48 para NN, 53 para DN y 56 para DD.

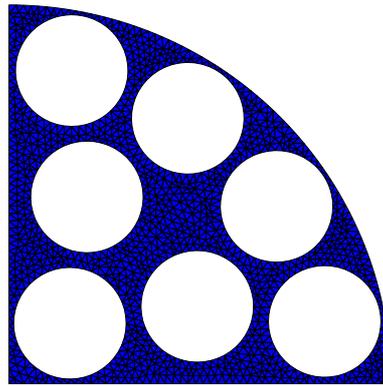


Figura 14: Malla inicial.

Nº	Frecuencia Natural	CB
0	0.00115664248642	NN
1	23.2772284333117	NN
56	50.6651088392104	DD
57	10270.2318954485	DN

Tabla 5: Frecuencias en Hz de los modos normales de vibración. 5 pasos de adaptividad.

## 5 CONCLUSIONES

### 5.1 Sobre el modelo matemático

Hasta donde conocemos, la formulación teórica del problema de Helmholtz desarrollada en este trabajo es original. Este modelo representa un método alternativo al presentado en [Conca et al. \(1995\)](#), que resulta particularmente adecuado para ser utilizado en el cálculo de aproximaciones por elementos finitos. La inclusión de las velocidades de los tubos como incógnitas adicionales, permitió reducir el problema cuadrático original de autovalores a un problema generalizado estándar, bien planteado, con matriz de masa simétrica y definida positiva, y con matriz de rigidez simétrica y semi-definida positiva.

La implementación del modelo de Helmholtz presentado en este trabajo contempla al problema de Laplace fijando  $\frac{1}{c^2} = 0$ , y además permite la utilización de parámetros físicos distintos desde la formulación variacional, constituyendo una herramienta más versátil que la desarrollada en [Scheble \(2010\)](#) para tratar el caso particular de fluido incompresible. Una ventaja adicional de esta formulación es que el álgebra matricial es muy simple: no necesita proyecciones ni rotaciones para obtener un problema resoluble.

El estimador de error implementado tiene las propiedades matemáticas deseables: es confiable y eficiente. Su implementación es imprescindible para obtener un algoritmo *hp*-adaptivo. El esquema de adaptividad es una extensión del presentado en [Melenk and Wohlmuth \(2001\)](#). Con estas herramientas se mantiene el orden exponencial de convergencia que se tenía para el modelo de Laplace en [Scheble \(2010\)](#).

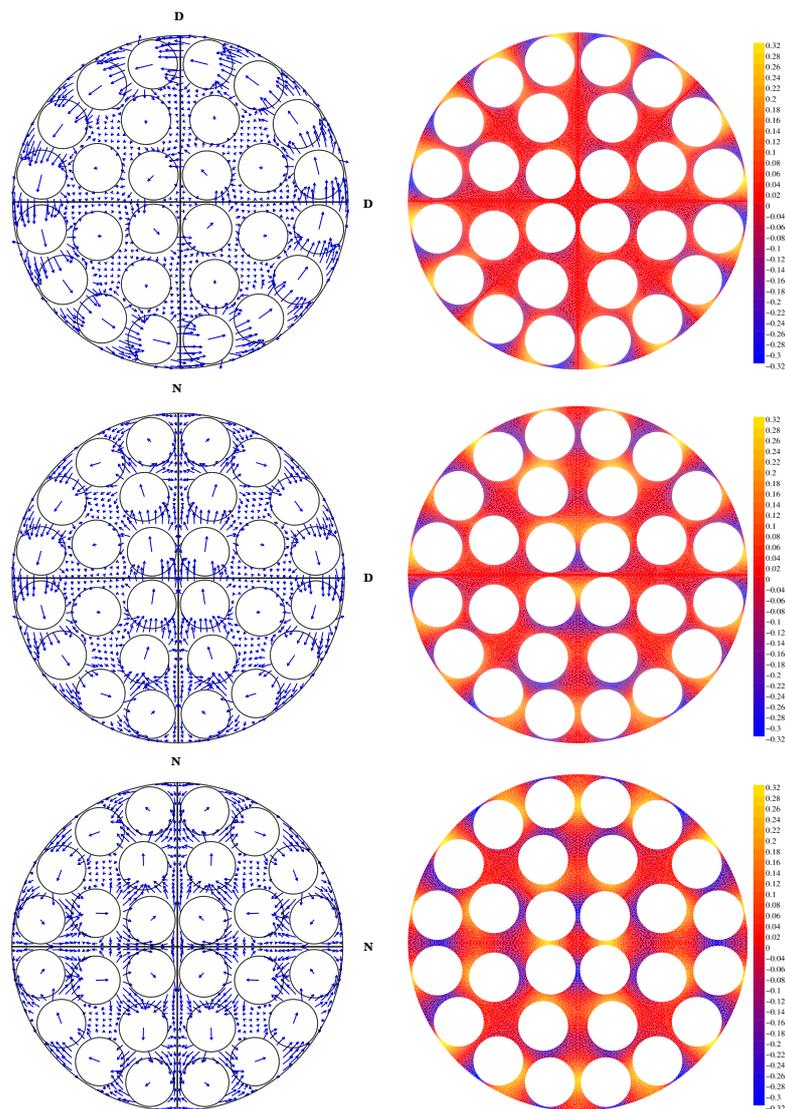


Figura 15: Campos de velocidades en la malla extendida.

## 5.2 Sobre la implementación

Se validó la implementación estudiando un problema cuya solución analítica no se encontró en la principal bibliografía referida al tema, pero que logramos resolver mediante la utilización de funciones de Bessel y un programa de manipulación simbólica. En este caso hay un error adicional proveniente de la aproximación del dominio, y sin embargo los autovalores obtenidos con el método *hp*-adaptivo pueden coincidir con gran precisión con los analíticos sin utilizar una gran cantidad de recursos computacionales.

Verificamos experimentalmente que la implementación computacional del modelo de Helmholtz aquí presentada tiene un comportamiento robusto cuando  $c \rightarrow \infty$ , ya que los primeros  $2K$  autovalores no nulos obtenidos tienden a los del modelo de Laplace, mientras que los restantes tienden a  $\infty$ .

### 5.3 Sobre los ejemplos numéricos

En el ejemplo más cercano a las aplicaciones realistas que resolvimos, notamos un salto importante entre las frecuencias de los modos  $2K$  y  $2K + 1$ , producto de la pequeña compresibilidad del agua. Las primeras  $2K$  se mantuvieron por debajo de  $k/m$ , lo cual era esperado en concordancia con el teorema 3.14 de la referencia [Conca et al. \(1995\)](#).

#### BIBLIOGRAFÍA

- Conca C., Planchard J., and Vanninathan M. *Fluid and Periodic Structures*. Masson, 1995.
- Melenk J.M. and Wohlmuth B.I. On residual-based a posteriori error estimation in *hp*-fem. *Adv. Comput. Math.*, 15:244–257, 2001.
- Page R. *Canadian Power Reactor Fuel*. Nuclear Power Symposium, Atomic Energy of Canada Limited, 2001.
- Planchard J. and Ibnou Zahir M. Natural frequencies of tube bundle in an incompressible fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, 41:47–68, 1983.
- Scheble M. *Un método hp-adaptivo para resolver problemas de vibraciones en sistemas con acoplamiento fluido-estructura*. Tesis de Doctorado, Instituto Balseiro, 2010.
- Verfürth R. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*. Wiley & Teubner, 1996.