

ESTIMACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO APARENTE DEL HUESO TRABECULAR MEDIANTE MÉTODOS DE HOMOGENIZACIÓN

Ariel A. Ibarra Pino y Adrián P. Cisilino

*División Soldadura y Fractomecánica -INTEMA-CONICET-, Universidad Nacional de Mar del Plata,
Av. Juan B. Justo 4302, 7200 Mar del Plata, Argentina, aaibarra@fi.mdp.edu.ar,
<http://www.fi.mdp.edu.ar>*

Palabras Clave: Homogenización, elementos finitos, tejido y hueso trabecular.

Resumen. En este trabajo se emplean los métodos de homogenización directo y asintótico para determinar las propiedades elásticas homogéneas y anisótropas aparentes del hueso trabecular. Con este objeto se emplean modelos de elementos finitos para efectuar un análisis de tensiones en una muestra de volumen representativo construida a partir de imágenes de microtomografía computada. Las deformaciones se postprocesan y con éstas se computa el tensor de localización que relaciona las deformaciones a escala microestructural con las deformaciones aparentes de la muestra. Por último se utiliza el tensor de localización para estimar el tensor de elasticidad aparente de la muestra. Se introducen las hipótesis fundamentales de ambos métodos y se discute su influencia sobre las propiedades elásticas estimadas. Los resultados obtenidos con cada método son comparados y se analiza la influencia del procedimiento de construcción sobre las propiedades computadas.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo de prótesis para el reemplazo de articulaciones se ha convertido en una práctica habitual de la cirugía ortopédica aunque persisten algunos inconvenientes asociados a ésta. Un aspecto de primordial importancia está relacionado con la fijación de implantes y prótesis al hueso. Se ha reportado un número importante de fallas de prótesis de reemplazo de cadera en un período de 9 años posteriores a su implante en pacientes jóvenes (Dorr et al., 1990). En muchos casos, estas fallas son una consecuencia del llamado fenómeno de *stress shielding* asociado al proceso de remodelado óseo.

Una estrategia para mitigar este problema es incorporar, durante diseño, las llamadas teorías de remodelado (Cowin, 1986; Mullender et al., 1994; García Aznar, 1999; Hart, 2001) que permitirían a los diseñadores considerar estimaciones del crecimiento óseo alrededor de los implantes y dispositivos de fijación.

Si bien existen varias teorías de remodelado, muchas emplean parámetros de ajuste y métodos empíricos para relacionar la respuesta mecánica de porciones de tejido óseo con su comportamiento mecánico macroscópico. Es común el empleo de correlaciones de resistencia o elasticidad con la densidad, considerando al hueso como un material homogéneo e isótropo o, en algunos casos, ortótropo (Cowin y Mehrabadi, 1989). De este modo se omite la influencia de las características microestructurales en la respuesta mecánica macroscópica de la pieza ósea. Otro enfoque, consiste en utilizar las teorías de remodelado sin correlación alguna, es decir, incorporando información relacionada con el arreglo microestructural óseo y estimando el comportamiento mecánico aparente del hueso. Esta última tarea no es trivial dada las características jerárquicas y heterogéneas del hueso¹ (Keaveny et al., 2001).

Este trabajo se concentra en el estudio de dos escalas del hueso trabecular: la escala microscópica en la que se identifican los campos de tensión y deformación de las fases que lo componen (tejido trabecular y espacio intertrabecular) y; la escala mesoscópica, que consiste en una muestra representativa de hueso trabecular que contiene a dichas fases (Ibarra Pino y Cisilino, 2010).

El tejido trabecular es la única de las fases consideradas que puede tomar carga y puede modelarse como un material lineal y elástico (Kabel et al., 1999), por lo tanto, el material homogéneo aparente se comportará de forma lineal y elástica también. Bajo estas condiciones el comportamiento mecánico aparente de una muestra de hueso queda completamente caracterizado por el tensor de elasticidad C de la Ley de Hooke generalizada. En el resto del trabajo, se considera que el módulo de Young del tejido trabecular es igual a $E_{tejido} = 1000$ MPa y el coeficiente de Poisson igual a $\nu_{tejido} = 0,3$ mientras que los parámetros homólogos para la fase espacio intertrabecular o hueco son $E_{hueco} = 10^{-5}$ MPa y $\nu_{hueco} = 0,3$.

En este trabajo se emplean los métodos de homogenización directo (Hashin, 1983) y asintótico (Sanchez-Palencia, 1986) para hallar el tensor de elasticidad del material homogéneo equivalente C que caracteriza el comportamiento macroscópico de una muestra de hueso trabecular. El método se aplica a modelos reconstruidos de hueso trabecular a partir de imágenes de microtomografía computarizada que se analizan mediante el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos mediante ambos métodos se comparan y se estudia el efecto de la discretización sobre las predicciones de los valores del tensor C .

¹Se dice jerárquica porque las estructuras óseas poseen distintas escalas y, heterogénea porque cada una de ellas está compuesta por más de una fase.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A continuación se introducen algunos conceptos fundamentales referidos a los métodos de homogenización en el contexto de los materiales lineales y elásticos.

2.1. Elemento de volumen representativo

La estimación del tensor de elasticidad del material homogéneo equivalente al hueso trabecular requiere del estudio de muestras que sean representativas del comportamiento macroscópico del hueso. En ciencia de materiales y mecánica aplicada, dicha muestra se denomina elemento de volumen representativo o RVE, por sus siglas en inglés.

La determinación del tamaño adecuado del RVE está asociado a la definición de lo que se entiende por muestra representativa, discusión que excede el alcance de este trabajo, una revisión breve puede encontrarse en [Kanit et al. \(2003\)](#). A los efectos prácticos bastará con indicar que, de acuerdo a las definiciones convencionales de RVE, su respuesta mecánica aparente debe ser independiente de las condiciones de contorno empleadas.

Esta última condición es excesivamente estricta para tejidos biológicos al punto que muchas veces requiere de muestras tan grandes que quizás no existan en la naturaleza. Esta es una consecuencia de la heterogeneidad de los materiales biológicos que no satisfacen la definición convencional de continuo. Por consiguiente, en materiales heterogéneos a lo sumo puede hallarse un tamaño de muestra en la cual la fluctuación de una propiedad respecto de su valor medio es mínima. Con esto en mente [Harrigan et al. \(1988\)](#) analizó la variación de la desviación estándar de la fracción volumétrica ósea de muestras de hueso trabecular y concluyó que, para minimizar el error en la determinación de dicha propiedad, las aristas de la muestra de hueso deben ser de al menos 5 longitudes intertrabeculares.

En vista de la discusión precedente, en el resto del trabajo utilizaremos un concepto de RVE más laxo que el convencional pero, que garantiza que las hipótesis de la teoría de medios continuos se satisfaga para el material equivalente al hueso trabecular. Por este motivo, salvo en las excepciones específicamente indicadas, los volúmenes de las muestras que empleamos en el resto del trabajo satisfacen la condición de tamaños de arista. Como consecuencia de este concepto de RVE, las propiedades computadas resultan dependientes del tamaño del volumen y condiciones de contorno empleadas, es decir, las propiedades computadas no son *efectivas* sino propiedades *aparentes* del volumen bajo estudio.

2.2. Variables macroscópicas y microscópicas

Dada la naturaleza heterogénea y jerárquica del hueso trabecular se consideran las variables macroscópicas del material homogéneo equivalente, cuyas propiedades se desean hallar por un lado y; las variables microscópicas que existen dentro del elemento de volumen representativo por otro. De este modo, se diferencian los tensores de tensión y deformación macroscópicos ϵ_{ij}^0 y σ_{ij}^0 de sus homólogos microscópicos ϵ_{ij}^1 y σ_{ij}^1 .

Las deformaciones y tensiones en la escala macroscópica son iguales al promedio en el volumen del RVE de las respectivas cantidades en la escala microscópica

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{|V_{RVE}|} \int_{V_{RVE}} \epsilon_{ij}^1(x) dV \quad \text{y} \quad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{|V_{RVE}|} \int_{V_{RVE}} \sigma_{ij}^1(x) dV \quad (1)$$

donde V_{RVE} representa el volumen del RVE y las demás cantidades fueron definidas previamente.

2.3. Los métodos de homogenización y sus condiciones de contorno

Las condiciones de contorno deben producir campos homogéneos dentro de una muestra homogénea (Hashin, 1983; Zohdi y Wriggers, 2005). En cuerpos elásticos, dos condiciones de contorno que satisfacen este requisito son los desplazamientos lineales y las tracciones uniformes, es decir

$$u_k = \epsilon_{kl}^0 x_l \quad \text{y} \quad T_k = \sigma_{kl}^0 n_l, \quad (2)$$

donde u_k y T_k corresponden a los desplazamientos y tracciones aplicados sobre el contorno del RVE, x_l y n_l representan la posición de los puntos sobre dicho contorno en coordenadas de la escala microscópica² y su normal respectivamente, mientras que ϵ_{kl}^0 y σ_{kl}^0 representan las deformaciones y tensiones constantes del material homogéneo aparente en la escala de la muestra.

Cuando se emplea alguna de las condiciones de contorno anteriores se dice que el método de homogenización empleado es el directo (Hashin, 1983) o estándar (Hollister y Kikuchi, 1992). Si las microestructuras son periódicas, los campos microscópicos de tensión σ_{ij}^1 y deformación ϵ_{ij}^1 son periódicos. Sus valores dependen de las componentes macroscópicas y microscópicas que las componen. Se puede demostrar que las condiciones de periodicidad sobre la muestra representativa están garantizadas si se satisface que

$$u_k = \epsilon_{kl}^0 x_l + \tilde{u}_k \quad \text{siendo} \quad \tilde{u}_k \text{ periódico.} \quad (3)$$

A esta expresión se llega operando sobre una aproximación asintótica del campo de desplazamientos por cuanto el método de homogenización será denominado de aquí en adelante como asintótico (Sanchez-Palencia, 1986). Los lectores interesados en la deducción pueden consultar Sanchez-Palencia (1986); Nemat-Nasser y Hori (1999) y Torquato (2002).

De la comparación de la primera de las Ec. 2 y la Ec. 3, resulta evidente que la diferencia principal entre ambos métodos de homogenización reside en la aproximación del campo de desplazamientos. En homogenización asintótica se considera las componentes macroscópicas y las componentes fluctuantes (periódicas) del desplazamiento en las escalas menores (Nemat-Nasser y Hori, 1999; Torquato, 2002).

Si bien el método de homogenización asintótica fue concebido para el estudio de microestructuras periódicas, esto es, constituidas por celdas unitarias que se repiten en el dominio de una pieza, se ha demostrado que las condiciones de contorno periódicas pueden aplicarse a muestras de materiales heterogéneos no periódicos como el hueso trabecular. Los resultados obtenidos mediante otras técnicas se aproximan a los hallados mediante el método asintótico cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande (Terada et al., 2003), es decir, igual al tamaño de RVE dado por la definición convencional.

Una vez seleccionada la muestra representativa se resuelven seis problemas de valor de contorno mediante el método de los elementos finitos imponiendo las condiciones indicadas por las Ecs. 2 y 3 al RVE. Puesto que las componentes del tensor de elasticidad del material homogéneo aparente resultan excesivamente subestimadas cuando se emplea el método directo en tracciones (Ibarra Pino y Cisilino, 2010), en este trabajo se consideraron únicamente los desplazamientos sobre el contorno del RVE dados por la primera de las Ecs. 2 y las condiciones impuestas por la Ec. 3 en el método asintótico.

²En análisis multiescala se consideran al menos dos sistemas coordenados: uno microscópico (posición de un punto dentro del RVE) y otro macroscópico (posición del RVE en el seno de una pieza ósea).

Posteriormente, los resultados se postprocesan a efectos de computar las deformaciones ϵ_{ij}^1 en el centroide de los elementos empleando la Ec. 1. Las deformaciones en ambos niveles estructurales están relacionadas por el llamado tensor de localización de deformaciones M_{ijkl} mediante la relación

$$\epsilon_{ij}^1 = M_{ijkl} \epsilon_{kl}^0. \quad (4)$$

La expresión anterior se emplea para computar las componentes del tensor de localización que es el único parámetro desconocido en la Ec. 4. Finalmente, el tensor de elasticidad del material homogéneo aparente C_{ijkl}^0 se determina considerando los tensores de localización M_{ijkl} y las propiedades elásticas de las $r = 2$ fases que componen la muestra de hueso trabecular caracterizadas por sus respectivos tensores de elasticidad C_{mijkl}^1 mediante la expresión

$$C_{ijkl}^0 = \frac{1}{|V_{RVE}|} \int_{V_{RVE}} C_{r_{ijkl}}^1 M_{mnkl} dV. \quad (5)$$

3. ASPECTOS PRÁCTICOS

En la sección anterior se describió como obtener el tensor de elasticidad aparente C_{ijkl}^0 una vez conocidos los tensores de M_{ijkl} en el dominio del RVE. A continuación, se ilustrará el procedimiento para el cómputo de éstos últimos mediante el método de los elementos finitos. En particular, se describirá el procedimiento para implementar las condiciones de contorno necesarias sobre el RVE en el programa de cálculo Abaqus (Simulia, 2010).

3.1. Casos de carga

El tensor M_{ijkl} puede computarse utilizando la relación dada por la Ec. 4. Puesto que los modelos son tridimensionales, para su cómputo es necesario resolver seis problemas de valor de contorno. Cada problema de valor de contorno está asociado a un caso de carga linealmente independiente, para ello se impone que la deformación del material homogéneo aparente sea

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{0\ 11} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{11}, & \epsilon_{ij}^{0\ 22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{22}, & \epsilon_{ij}^{0\ 33} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^0 \end{bmatrix}^{33}, \\ \epsilon_{ij}^{0\ 12} &= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{12}^0 & 0 \\ \epsilon_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{12}, & \epsilon_{ij}^{0\ 23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{23}^0 \\ 0 & \epsilon_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}^{23}, & \epsilon_{ij}^{0\ 31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{31}^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{31}^0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{31}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde los pares de supraíndices representan cada uno de los seis pq casos de carga.

3.2. Condiciones de contorno para ambos métodos de homogenización

Las condiciones de contorno sobre el RVE difieren según el método de homogenización que se utilice. Para el método de homogenización directo, dichas condiciones se obtienen de la primera de las Ecs. 3, es decir

$$\begin{aligned}
 u_k^{11} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^0 x_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & u_k^{22} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_{22}^0 x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, & u_k^{33} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_{33}^0 x_3 \end{Bmatrix}, \\
 u_k^{12} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{12}^0 x_2 \\ \epsilon_{12}^0 x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & u_k^{23} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_{23}^0 x_3 \\ \epsilon_{23}^0 x_2 \end{Bmatrix}, & u_k^{31} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{31}^0 x_3 \\ 0 \\ \epsilon_{31}^0 x_1 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Estas seis expresiones especifican las $k = 3$ componentes de los desplazamientos que deben aplicarse al contorno (caras, aristas y vértices) del RVE en cada uno de los seis pq casos de carga.

En el método de homogenización asintótico se utiliza la Ec. 3. Sin embargo, ésta no puede aplicarse al contorno del RVE en esa forma ya que la componente \tilde{u}_k es desconocida. A efectos de obtener expresiones adecuadas para su implementación numérica considérese los desplazamientos de un par de puntos ubicados sobre caras opuestas

$$u_i^{(+)} = \epsilon_{ij} x_j^{(+)} + \tilde{u}_i \quad \text{y} \quad u_i^{(-)} = \epsilon_{ij} x_j^{(-)} + \tilde{u}_i, \tag{8}$$

donde x_j es la posición de los puntos sobre caras opuestas, los signos '+' y '-' identifican las caras considerando el sentido positivo del eje cartesiano perpendicular a ambas (Figura 1) y el resto de las cantidades ya fue definido previamente. Por lo tanto la diferencia entre ambas ecuaciones es

$$u_i^{(+)} - u_i^{(-)} = \epsilon_{ij} (x_j^{(+)} + x_j^{(-)}). \tag{9}$$

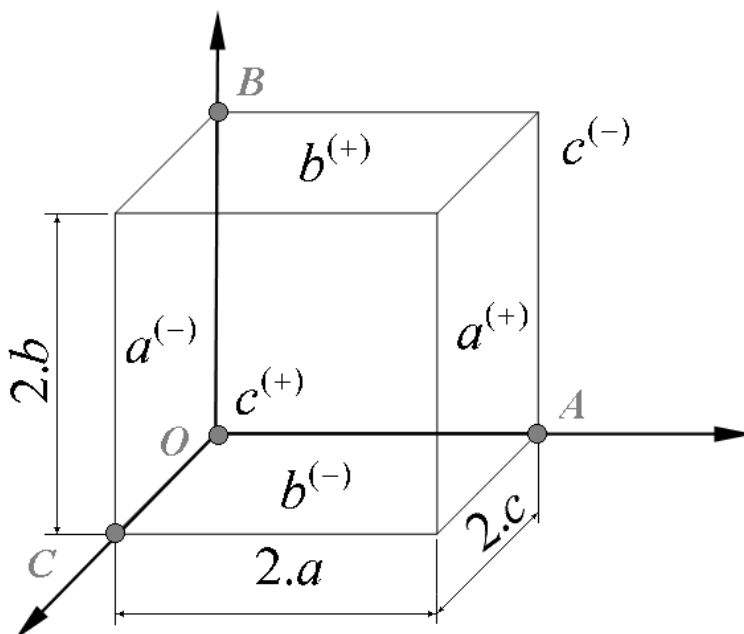


Figura 1: Nomenclatura de las caras, identificación de los nodos maestros y dimensiones del RVE.

Puede imponerse un estado de deformaciones arbitrario ϵ_{ij}^0 a un RVE, utilizando condiciones de contorno periódicas, asegurándose que los puntos homólogos de caras opuestas satisfagan la

ecuación precedente. Las condiciones de contorno que se deben imponer a las caras del RVE son

$$u_i(a, x_2, x_3) - u_i(-a, x_2, x_3) = (2a)\epsilon_{i1}^0 \quad \begin{array}{l} \forall x_2 \in [-b, b] \\ \forall x_3 \in [-c, c] \end{array} \quad (10)$$

$$u_i(x_1, b, x_3) - u_i(x_1, -b, x_3) = (2b)\epsilon_{i2}^0 \quad \begin{array}{l} \forall x_2 \in [-a, a] \\ \forall x_3 \in [-c, c] \end{array} \quad (11)$$

$$u_i(x_1, x_2, c) - u_i(x_1, x_2, -c) = (2c)\epsilon_{i3}^0 \quad \begin{array}{l} \forall x_1 \in [-a, a] \\ \forall x_2 \in [-b, b] \end{array} \quad (12)$$

En las expresiones anteriores se reemplazó la notación de caras ('+' y '-') por las coordenadas del plano. La notación empleada resulta conveniente también para indicar los casos de carga. Por ejemplo, para las caras ' $a^{(+)}$ ' y ' $a^{(-)}$ ' (Ec. 10) solamente interesan tres casos de carga ya que el segundo subíndice del desplazamiento impuesto ϵ_{i1}^0 está fijo y el primero sólo puede tomar los valores de 1 a 3.

Enfatizamos que estas ecuaciones imponen condiciones a los desplazamientos pero no implican que el valor de los mismos sea conocido, de este modo, las ecuaciones presentadas establecen meras relaciones entre puntos ubicados en caras opuestas de un RVE de forma tal que la deformación de éste último sea igual a un valor prescrito. Operando de un modo análogo con las Ecs. 11 y 12 se pueden obtener las ecuaciones homólogas para las caras b y c .

Nótese que las aristas, al estar formadas por la intersección de dos planos, responden a dos de las ecuaciones 10-12. Por ejemplo, los desplazamientos de las aristas formadas por la intersección de las caras planas ' a ' y ' b ' (ver Fig. 1), están sujetos a las restricciones impuestas por las ecuaciones 10 y 11 simultáneamente. Para hallar las restricciones que deben satisfacer los desplazamientos en dichas aristas consideramos que estas son paralelas a los ejes del sistema de coordenadas (cartesiano), por cuanto el lugar geométrico de las aristas puede representarse por un segmento (x_1, x_2, x_3) donde dos de las x_i son conocidas y la tercera puede variar entre $\pm\alpha$ siendo α la longitud de la mitad de las aristas (a, b o c). Puesto que la intersección de las caras a y b genera cuatro segmentos o aristas, es necesario definir cuáles son los pares de aristas con los que se va a operar, esto se debe a que sólo pueden seleccionarse aristas diagonalmente opuestas ya que éstas deben estar relacionadas por las expresiones 10 y 11 a la vez. A modo de ejemplo, considérese a las aristas representadas por los segmentos (a, b, x_3) y $(-a, -b, x_3)$, usando las expresiones 10 y 11 especializadas en $x_2 = b$ y $x_1 = -a$ respectivamente se obtiene

$$\begin{aligned} u_i(a, b, x_3) - u_i(-a, b, x_3) &= (2a)\epsilon_{i1}^0, \\ u_i(-a, b, x_3) - u_i(-a, -b, x_3) &= (2b)\epsilon_{i2}^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Particularizando para el caso de carga cuya deformación impuesta es ϵ_{11}^0 y sumando ambas expresiones resulta

$$u_1(a, b, x_3) - u_1(-a, -b, x_3) = (2a)\epsilon_{11}^0, \quad (14)$$

donde queda explícitamente indicado la arista a la que corresponde cada desplazamiento u_i . La misma operación debe efectuarse para las demás direcciones (u_2 y u_3). Las ecuaciones completas para este caso de carga, y para este par de aristas, son

$$\begin{aligned} u_1(a, b, x_3) - u_1(-a, -b, x_3) &= (2a)\epsilon_{11}^0, \\ u_2(a, b, x_3) - u_2(-a, -b, x_3) &= 0, \\ u_3(a, b, x_3) - u_3(-a, -b, x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Operando de una forma similar para los cinco casos de carga restantes se obtienen las relaciones válidas para cada uno de ellos. Posteriormente, el mismo procedimiento se emplea para hallar las restricciones en las demás aristas.

Las expresiones anteriores no son válidas en las esquinas, donde se intersecan tres planos, es decir tres aristas cuyas restricciones deben ser debidamente consideradas. A modo de ejemplo, para las esquinas (a, b, c) y $(-a, -b, -c)$ y, para el caso de carga cuya deformación impuesta es ϵ_{11}^0 , los desplazamientos deben satisfacer

$$\begin{aligned} u_1(a, b, c) - u_1(-a, -b, -c) &= -(2a)\epsilon_{11}^0, \\ u_2(a, b, c) - u_2(-a, -b, -c) &= 0, \\ u_3(a, b, c) - u_3(-a, -b, -c) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

De un modo semejante se pueden hallar relaciones para los cinco casos de carga restantes en éste y los demás vértices.

3.3. Implementación de las condiciones de contorno

La implementación de las condiciones de contorno requeridas por el método de homogenización asintótico es directa, basta con imponer los desplazamientos indicados en la Ec. 7 a los nodos de la superficie del RVE. En Abaqus esto se realiza utilizando la herramienta de creación de campos analíticos (ANALYTICAL FIELDS). La forma en que se vinculan los campos analíticos con el administrador de condiciones de contorno (en el entorno gráfico) está bien documentada en los manuales del usuario (Simulia, 2010).

Para implementar las condiciones periódicas se emplearon mallas con nodos enfrentados en caras opuestas. Considérese la Fig. 1, la Ec. 9 establece relaciones entre nodos sobre caras opuestas, por lo tanto resulta lícito escribir

$$\begin{aligned} u_i^{(+a)} - u_i^{(-a)} &= \epsilon_{ij}^0 \left(x_j^{(+a)} + x_j^{(-a)} \right), \\ u_i^{(A)} - u_i^{(O)} &= \epsilon_{ij}^0 \left(x_j^{(A)} + x_j^{(O)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Si se impide el desplazamiento del nodo O , el desplazamiento del nodo A queda impuesto por la condición expresada en la última ecuación ya que ϵ_{ij}^0 es la deformación impuesta y, la diferencia entre las posiciones de A y O es igual al largo de la arista $2a$. Considerando que los términos de la derecha son idénticos en ambas ecuaciones y operando, se obtiene una expresión que puede emplearse para imponer las condiciones de contorno periódicas a los nodos ubicados en las caras a , considerando el desplazamiento del nodo maestro A

$$u_i^{(+a)} - u_i^{(-a)} = u_i^{(A)}. \quad (18)$$

Nótese que la Ec. 18 posee la información del caso de carga sólo en el término de la derecha ya que, como se indicó más arriba, el desplazamiento del nodo A resulta sencillo de computar

$$u_i^{(A)} = \epsilon_{ij}^0 \left(x_j^{(A)} + x_j^{(O)} \right) \quad \text{donde} \quad x_j^{(A)} + x_j^{(O)} = 2.a. \quad (19)$$

Operando de forma análoga se pueden construir ecuaciones sencillas de implementar en códigos de elementos finitos para los nodos de las demás caras, las aristas y esquinas del RVE.

Las restricciones indicadas precedentemente constituyen un tipo particular de condiciones de contorno. Cuando se emplea el paquete comercial de cálculo por elementos finitos Abaqus,

éstas pueden implementarse utilizando el comando 'EQUATION'. Para ello la expresión 18 debe escribirse como

$$u_i^{(+a)} - u_i^{(-a)} + u_i^{(A)} = 0. \quad (20)$$

Los nodos $u^{(-)}$ en la expresión anterior son esclavos en ABAQUS y por ello no pueden usarse más de una vez en una ecuación de desplazamiento, de otro modo se impondrían desplazamientos inconsistentes a tales nodos. Los detalles del uso del comando EQUATION están bien documentados en los manuales de usuario, Simulia (2010). En la Fig. 2 se muestran los desplazamientos que deben imponerse a los nodos maestros A , B y C para cada caso de carga a efectos de obtener las deformaciones prescritas ϵ_{ij}^0 .

4. CONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Los modelos tridimensionales de la microestructura del hueso trabecular se construyeron procesando imágenes obtenidas mediante microtomografía computarizada (microTC). En este trabajo se emplearon dos estudios de microTC: el primero, *Muestra 1*, corresponde a una cabeza femoral humana (Perilli y Baruffaldi, 2003) y, el segundo, *Muestra 2*, a una cabeza femoral vacuna (Silva et al., 2009). Para la primera se procesaron 150 imágenes con un tamaño de píxel de $19,5 \mu\text{m}$ y 750 imágenes con píxeles de $6,52 \mu\text{m}$ para la segunda. A efectos de incluir sólo hueso trabecular y eliminar las regiones dañadas durante la preparación de las probetas, las imágenes fueron recortadas digitalmente. Las dimensiones de los modelos resultantes fueron $4,91 \times 4,91 \times 2,81 \text{ mm}$ y $4,96 \times 4,96 \times 4,96 \text{ mm}$ respectivamente.

La técnica empleada para la discretización de la microestructura fue adaptada del trabajo de Buroni et al. (2004). Esta comienza con la exploración de las imágenes binarizadas de microTC donde el analista define el llamado "*tamaño de paso*". El paso indica cada cuántos píxeles y cada cuántas imágenes se lee la información disponible en un estudio tomográfico. Los píxeles leídos se utilizan como nodos en la malla de elementos finitos. Estos nodos, espaciados entre sí por una distancia igual al producto del tamaño de paso y el tamaño de píxel de la imagen original, se emplean para construir los elementos que componen la versión discretizada de la microestructura.

Nótese que con el procedimiento descrito se disminuye el costo computacional del modelo. Esto es necesario puesto que un modelo tridimensional puede estar compuesto por decenas de millones de píxeles y cada uno de ellos representa un nodo con tres incógnitas o grados de libertad en el problema de valor de contorno. Aún si semejante modelo puede construirse, este tendría tantas incógnitas que no sería posible resolverlo con la capacidad de cómputo disponible en el laboratorio de los autores. Sin embargo, el procedimiento presenta una desventaja al hacer que los modelos sean susceptibles de un error en la representación geométrica llamado *error de discretización*. Esto es, errores por defecto o exceso de hueso dependiendo del algoritmo utilizado para la asignación de propiedades a los elementos.

Puesto que el error de discretización es arrastrado a la fase de cómputo, se desarrolló e implementó un algoritmo que minimiza el error en la fracción volumétrica ósea priorizando la detección de una fase seleccionada por el usuario. Básicamente, el algoritmo identifica la fase dominante dentro de un elemento hexaédrico patrón que está compuesto por seis tetraedros. Los elementos son considerados como pertenecientes a una fase u otra si y sólo si al menos cinco de los seis tetraedros corresponden a la fase seleccionada, para ello se evalúa cuál es la fase a la que pertenecen los nodos que componen cada tetraedro. Detalles acerca de este tipo de error y las alternativas de mitigación pueden consultarse en Ibarra Pino y Cisilino (2010).

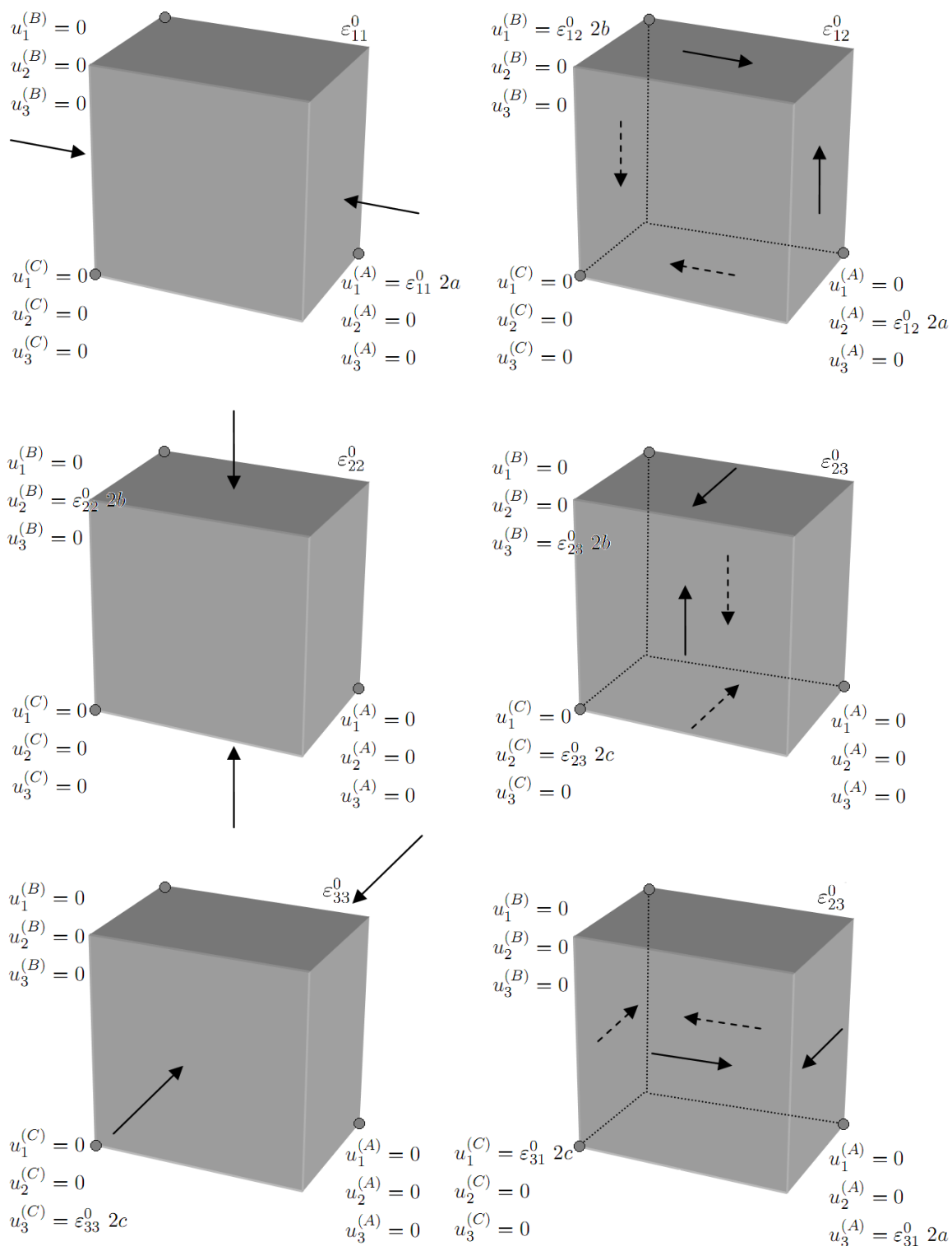


Figura 2: Desplazamientos impuestos a los nodos maestros A, B y C en los seis casos de carga empleados.

Con el objeto de cuantificar el error de discretización sobre la calidad de la representación geométrica se estudió el efecto del tamaño de paso sobre la fracción volumétrica ósea. Para ello se determinó un valor de fracción volumétrica ósea de referencia (FVR) para cada una de las muestras. Dicho valor se computó como el cociente entre el número de píxeles de la fase hueso y el número total de píxeles empleados para la construcción de los modelos. El valor de FVR fue comparado con las fracciones volumétricas óseas que resultan de discretizar los modelos con distinto tamaño de paso y, por lo tanto distinto tamaño de elemento. Los tamaños de los elementos evaluados son 59, 78, 98 y 117 μm para los modelos de la *Muestra 1* y, 60, 73, 90 y 119 μm para los de la *Muestra 2*.

En todos los modelos se emplearon elementos hexaédricos de ocho nodos. A efectos de evitar el fenómeno de bloqueo en las trabéculas sometidas a flexión ([van Rietbergen et al., 1995](#)) se emplearon elementos con integración reducida y control de hourglassing. Éste último fenómeno puede minimizarse además reduciendo el tamaño del elemento sin embargo, debido al procedimiento de construcción de los modelos, esto implica disminuir el tamaño de paso de todo el modelo, aumentando su costo computacional.

Existen otros dos aspectos importantes relacionados con la rigidez de los modelos. Uno es el error de discretización en la reconstrucción. El exceso de hueso respecto de la FVR implica que los modelos tendrán un comportamiento más rígido que la realidad³, como ocurre con los modelos la *Muestra 1*. El otro aspecto está relacionado con la discusión del párrafo precedente y ha motivado a algunos autores a sugerir que la relación entre el espesor de las trabéculas y el tamaño de los elementos debe ser superior a cuatro, ([Homminga et al., 2001](#)).

5. RESULTADOS

Los valores de las fracciones volumétricas de referencia (FVR) computados para las *Muestras 1* y *2* fueron 0,177 y 0,506 respectivamente. Se analizó la evolución de la fracción volumétrica ósea (FV) de los modelos con el número de nodos, los resultados se presentan en función del tamaño del elemento en las Tablas 1 y 2. Donde se reportan para cada modelo: el número de nodos; el número de elementos de la fase hueso y el número total de elementos. Con estos datos se determinó: la fracción de volumen óseo (FV), computada como el cociente entre el número de elementos que corresponden a la fase hueso y el número total de elementos del modelo; el error de discretización (ED), calculado como la diferencia porcentual entre la FV y el valor de referencia; y un indicador la calidad de la representación geométrica (IG) definido como la diferencia porcentual entre el número de elementos de la fase hueso que resultan de priorizar la detección de una u otra fase durante la asignación de propiedades a los elementos, [Ibarra Pino y Cisilino \(2010\)](#).

Paso	Tipo de Elemento	Nro. Nodos	Nro. Elem. Hueso	Nro. Total de Elementos	FV	ED [%]	IG [%]
06	Hexaedros	46225	7767	42336	0,1835	3,26	15,12
05	Hexaedros	81120	13757	75429	0,1824	2,69	10,56
04	Hexaedros	155648	26687	146853	0,1817	2,34	7,48
03	Hexaedros	369800	63992	354025	0,1875	1,82	5,25

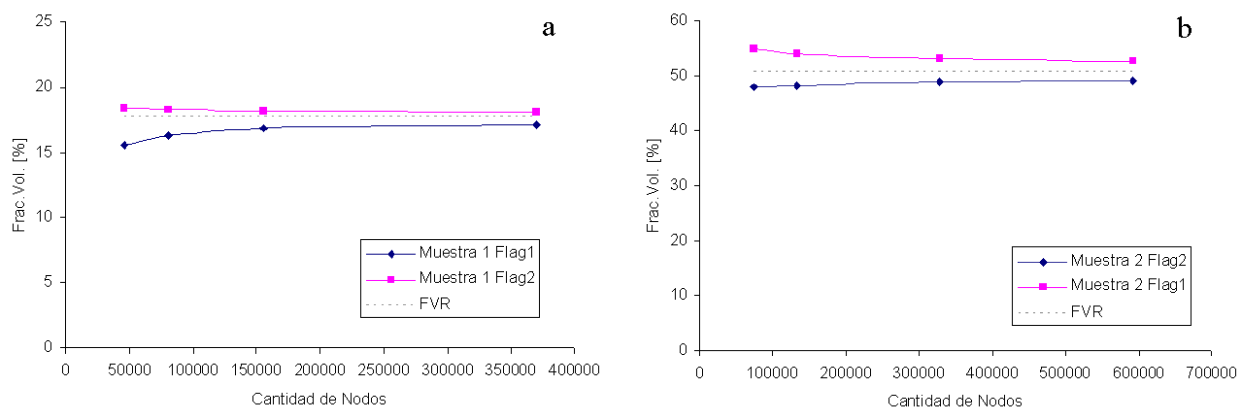
Tabla 1: Resumen de los datos de los Modelos para la *Muestra 1*.

³Independientemente de la tendencia de los modelos de elementos finitos a predecir un comportamiento más rígido que la realidad.

Paso	Tipo de Elemento	Nro. Nodos	Nro. Elem. Hueso	Nro. Total de Elementos	FV	ED [%]	IG [%]
18	Hexaedros	74088	32969	68921	0,5482	7,740	-14,60
15	Hexaedros	132651	60228	125000	0,5401	6,355	-12,09
11	Hexaedros	328509	153347	314432	0,5309	4,731	-8,85
09	Hexaedros	592704	280570	571787	0,5257	3,794	-7,13

Tabla 2: Resumen de los datos de los Modelos para la *Muestra 2*.

La Figura 3 muestra la evolución de la fracción volumétrica de tejido óseo FV con el número de nodos en los modelos de las *Muestras 1* y 2. El valor de referencia FVR de cada una se grafica a efectos de comparación. Nótese que en la *Muestra 1* el ED es menor cuando en el algoritmo de asignación de propiedades se selecciona la fase hueso mientras que, en la *Muestra 2* es menor cuando se selecciona la fase hueco.

Figura 3: Fracción volumétrica ósea (FV) en función del número de nodos: (a) *Muestra 1*, (b) *Muestra 2*.

En las Tablas 3 y 4 se reportan, en notación de Voigt, las componentes del tensor de elasticidad aparente C_{ij}^0 de las *Muestras 1* y 2 computadas mediante ambos métodos de homogenización y empleando distinto tamaño de elemento. Puesto que el tensor de elasticidad es simétrico sólo se reportan las componentes de la diagonal principal y por encima de esta. La simetría del tensor elástico se verificó comparando los valores hallados para cada una de las componentes simétricas encontrándose diferencias a partir de la sexta cifra significativa en los resultados obtenidos mediante el método de homogenización directo y, en la cuarta cifra significativa en los del método asintótico.

La Figura 4 ilustra la evolución de las componentes del tensor de elasticidad aparente C_{ij}^0 de la *Muestra 1* (Tabla 3). Los valores de las componentes se muestran en función del tamaño del elemento, donde además se grafican las líneas de tendencia para cada componente. En la Figura 5 se presenta un gráfico similar para los modelos construidos a partir de la *Muestra 2* (Tabla 4).

Componente	Método Directo (desplazamientos)				Método Asintótico			
	59 μm	78 μm	98 μm	117 μm	59 μm	78 μm	98 μm	117 μm
C11	56,291	48,590	40,191	34,058	23,791	17,632	12,557	7,964
C12	10,944	8,630	6,392	4,757	2,629	2,047	0,970	0,964
C13	17,763	14,497	10,582	7,955	5,084	3,643	1,955	1,601
C14	1,130	1,210	0,795	0,583	0,412	0,039	0,021	-0,023
C15	3,368	2,665	1,648	1,176	1,177	0,773	0,290	0,190
C16	6,989	6,304	5,303	4,030	4,417	3,236	2,294	1,982
C22	27,696	24,130	20,246	17,692	4,670	3,301	1,506	1,011
C23	16,058	13,318	10,332	7,742	2,683	1,743	0,836	0,647
C24	-0,170	0,122	0,115	0,204	-0,412	-0,348	-0,247	-0,156
C25	8,453	7,343	5,926	4,742	1,873	1,331	0,676	0,458
C26	0,410	0,515	0,388	0,291	0,227	0,205	-0,007	0,023
C33	77,721	67,330	53,048	41,487	24,871	18,606	10,155	7,825
C34	2,739	2,576	2,078	1,619	0,717	0,350	-0,038	-0,043
C35	19,243	16,099	11,991	8,440	4,648	3,492	1,597	1,331
C36	5,846	5,390	4,671	4,142	3,057	2,061	1,175	0,995
C44	11,529	9,758	8,004	6,570	3,120	2,032	1,074	0,634
C45	1,843	1,705	1,295	1,098	0,379	0,199	-0,041	0,031
C46	6,423	5,376	4,065	3,097	2,489	1,690	0,928	0,514
C55	18,070	15,789	12,976	10,720	3,658	2,744	1,436	1,029
C56	2,959	2,610	1,985	1,673	1,105	0,814	0,304	0,297
C66	25,135	21,561	17,494	13,843	9,777	6,773	4,385	2,783

Tabla 3: Evolución de las componentes del tensor de elasticidad con el tamaño de elemento en ambos métodos de homogenización para los modelos construidos a partir de la *Muestra 1*.

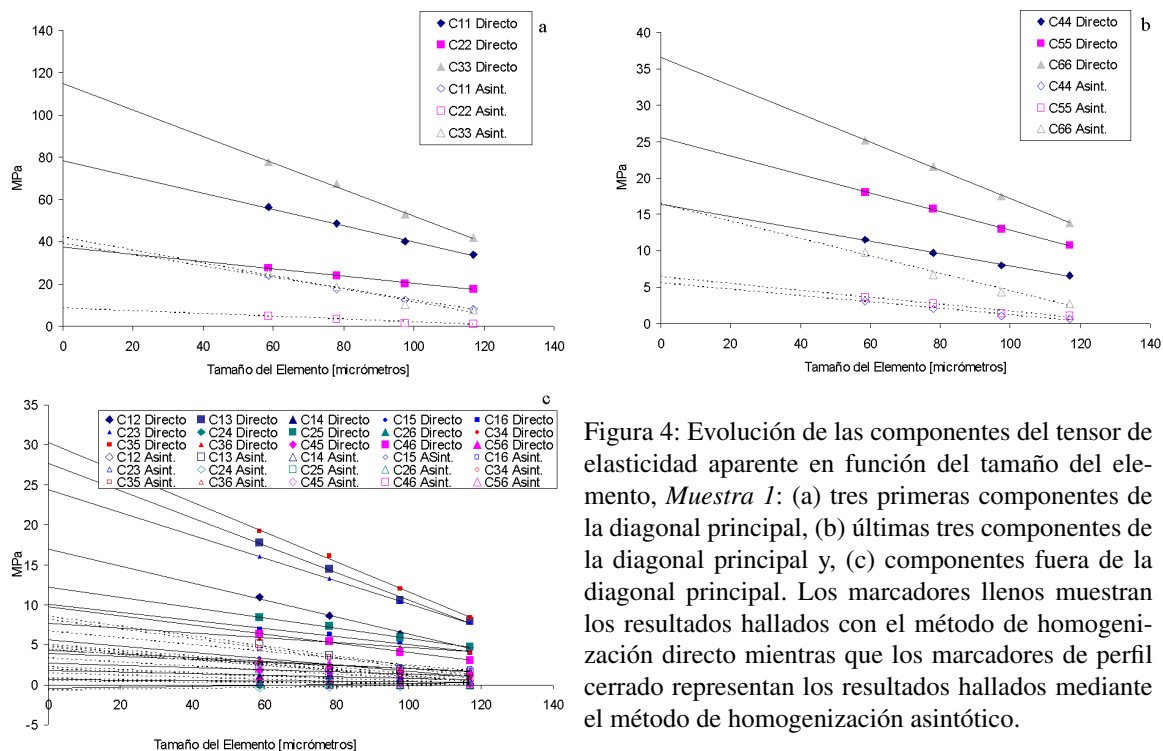


Figura 4: Evolución de las componentes del tensor de elasticidad aparente en función del tamaño del elemento, *Muestra 1*: (a) tres primeras componentes de la diagonal principal, (b) últimas tres componentes de la diagonal principal y, (c) componentes fuera de la diagonal principal. Los marcadores llenos muestran los resultados hallados con el método de homogenización directo mientras que los marcadores de perfil cerrado representan los resultados hallados mediante el método de homogenización asintótico.

Componente	Método Directo (desplazamientos)				Método Asintótico		
	60 μm	73 μm	99 μm	119 μm	73 μm	99 μm	119 μm
C11	346,203	347,790	347,908	351,753	291,933	289,222	292,858
C12	115,743	115,354	114,218	113,658	96,651	95,583	95,606
C13	120,812	120,695	119,087	119,187	98,007	96,192	96,631
C14	35,595	34,850	33,554	32,934	32,207	31,147	30,722
C15	-1,290	-1,673	-2,065	-2,231	-0,900	-1,148	-1,110
C16	-5,840	-5,468	-4,831	-3,881	-3,993	-3,201	-2,065
C22	328,472	328,957	332,132	335,762	277,421	278,988	280,715
C23	117,058	116,867	116,433	116,050	97,497	97,365	96,280
C24	28,857	28,261	27,544	27,278	25,458	24,662	24,559
C25	-2,154	-3,710	-5393	-5,935	-4,008	-5,960	-5,352
C26	-0,600	-0,638	-0,446	-0,138	-0,162	0,158	0,594
C33	356,287	357,382	359,221	361,973	299,029	299,230	298,395
C34	9,144	8,828	8,308	7,849	6,743	6,266	6,057
C35	-2,719	-4,123	-6,270	-6,276	-3,544	-5,357	-4,794
C36	-8,320	-7,795	-6,986	-6,632	-5,944	-5,101	-4,097
C44	116,163	116,231	116,100	116,540	99,059	98,236	98,009
C45	-2,674	-2,607	-2,562	-2,239	-2,192	-1,954	-1,606
C46	-2,465	-2,774	-3,228	-3,227	-2,056	-2,503	-2,277
C55	114,354	114,656	115,050	115,867	97,346	96,996	96,555
C56	13,058	12,855	12,614	12,391	12,446	12,326	11,853
C66	119,097	119,347	118,967	119,733	100,029	98,966	99,237

Tabla 4: Evolución de las componentes del tensor de elasticidad con el tamaño de elemento en ambos métodos de homogenización para los modelos construidos a partir de la *Muestra 2*.

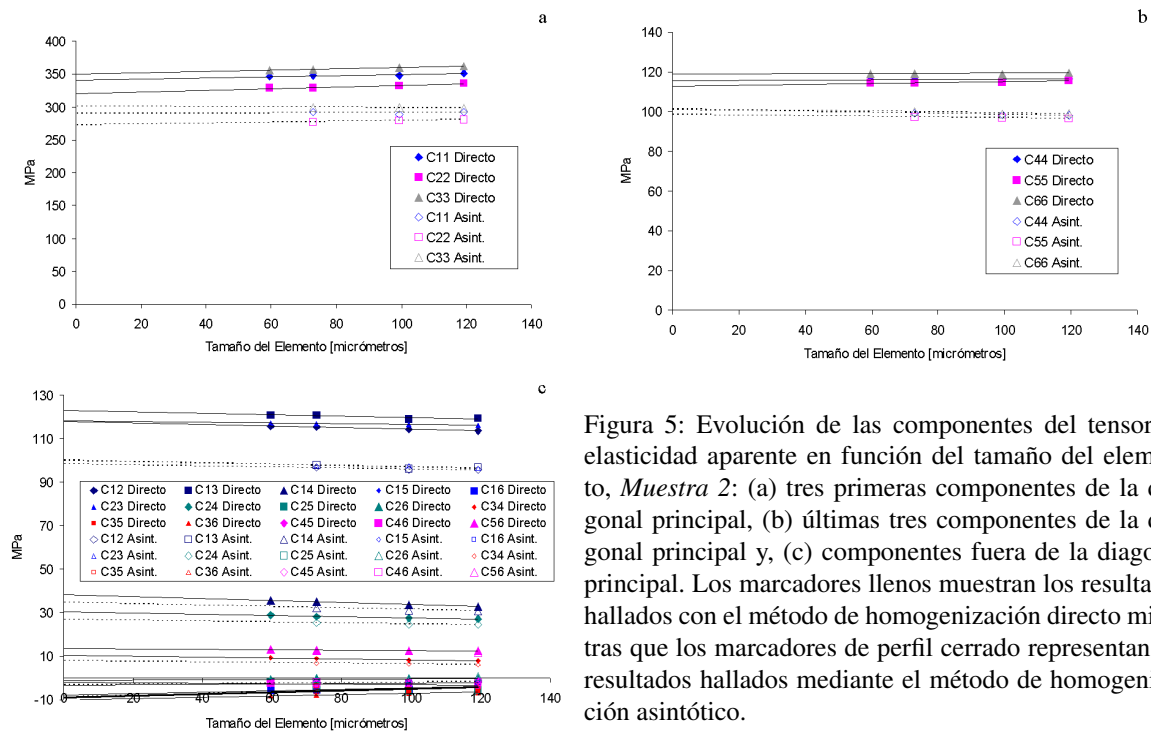


Figura 5: Evolución de las componentes del tensor de elasticidad aparente en función del tamaño del elemento, *Muestra 2*: (a) tres primeras componentes de la diagonal principal, (b) últimas tres componentes de la diagonal principal y, (c) componentes fuera de la diagonal principal. Los marcadores llenos muestran los resultados hallados con el método de homogenización directo mientras que los marcadores de perfil cerrado representan los resultados hallados mediante el método de homogenización asintótico.

La ordenada al origen de las líneas de tendencia de las Figs. 4 y 5 constituyen una estimación del valor de las componentes del tensor de elasticidad aparente para un elemento de tamaño nulo. Así, se estimaron los los tensores de elasticidad aparente de ambas muestras utilizando los dos métodos de homogenización. Para la *Muestra 1* se obtiene

$$C_{ij}^{0, Directo} = \begin{bmatrix} 78,58 & 17,04 & 27,70 & 1,85 & 5,63 & 10,10 \\ & 37,69 & 24,43 & -0,43 & 12,26 & 0,62 \\ & & 114,84 & 3,99 & 30,37 & 7,64 \\ & & & 16,45 & 2,68 & 9,82 \\ & & & & 25,58 & 4,32 \\ & & & & & 36,58 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$C_{ij}^{0, Asint} = \begin{bmatrix} 39,14 & 4,80 & 8,53 & 0,71 & 2,16 & 6,70 \\ & 8,37 & 4,63 & -0,68 & 3,29 & 0,48 \\ & & 42,18 & 1,45 & 8,10 & 5,01 \\ & & & 5,50 & 0,72 & 4,41 \\ & & & & 6,35 & 1,95 \\ & & & & & 16,44 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

y para la *Muestra 2*

$$C_{ij}^{0, Directo} = \begin{bmatrix} 341,65 & 117,92 & 122,79 & 38,18 & -0,46 & -7,79 \\ & 320,47 & 118,08 & 30,28 & 1,17 & -1,15 \\ & & 350,65 & 10,41 & 0,57 & -9,93 \\ & & & 115,84 & -1,66 & -1,77 \\ & & & & 112,88 & 13,68 \\ & & & & & 118,68 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C_{ij}^{0, Asint} = \begin{bmatrix} 290,04 & 98,25 & 100,03 & 34,51 & -0,59 & -7,07 \\ & 272,20 & 99,48 & 26,83 & -2,06 & -1,37 \\ & & 300,10 & 7,79 & -1,60 & -8,88 \\ & & & 100,68 & -3,12 & -1,76 \\ & & & & 98,60 & 13,41 \\ & & & & & 101,19 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

6. DISCUSIÓN

De la comparación con la fracción volumétrica de referencia (FVR), Figs. 4 y 5, se concluye que en ambos modelos el error de discretización (ED) es por defecto en la cantidad de hueso cuando, en el algoritmo de asignación de propiedades, se prioriza la detección del espacio intertrabecular o fase vacío mientras que el error es por exceso cuando se prioriza la detección de la fase hueso. Los resultados mostrados en la Tabla 3 permiten inferir que, con los parámetros empleados en la reconstrucción de la *Muestra 1*, el error de discretización es menor cuando se favorece la detección de la fase hueso sin importar el tamaño de los elementos utilizados. En la *Muestra 2*, en cambio, se observa la tendencia opuesta, ver Tabla 4.

El error en la representación geométrica debido a la discretización es usualmente caracterizado mediante la comparación de de la fracción volumétrica (FV) de los modelos con un valor de referencia (FVR) determinado mediante alguna técnica apropiada. Esta medida de la calidad de la representación geométrica resulta poco práctica ya que dos modelos cuyas FV no difieren significativamente (ED bajo) presentan marcadas diferencias en la calidad de la representación

geométrica. A modo de ejemplo en la Figura 6 se muestran los modelos de la geometría discretizados con elementos de $119 \mu\text{m}$ ($ED=7,740$) y $73 \mu\text{m}$ ($ED=4,731$). Las diferencias son aún mayores en los modelos de la *Muestra 1* donde, además de poseer trabéculas de menor espesor, el tamaño de píxel es relativamente grande.

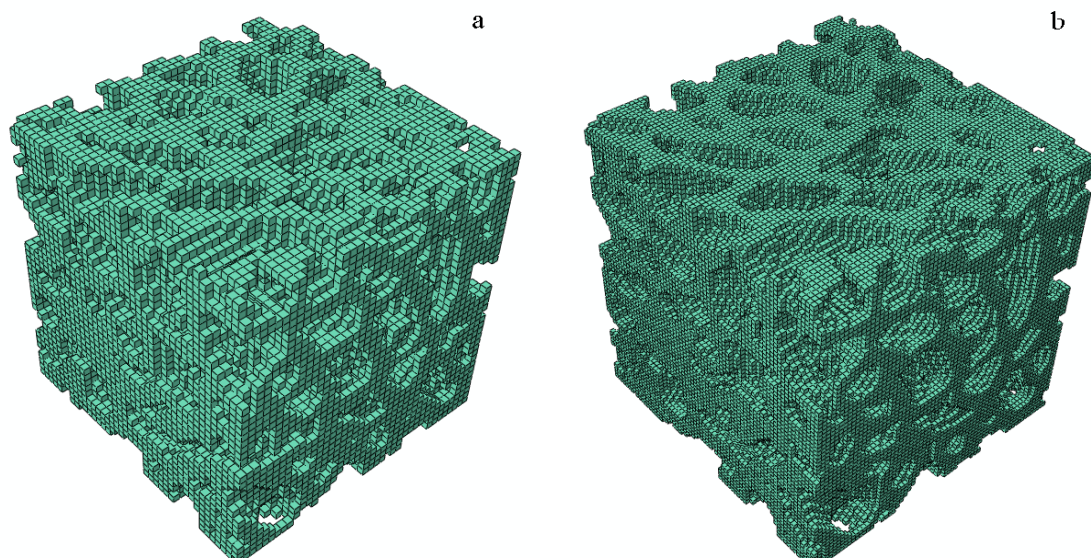


Figura 6: Modelos de la *Muestra 2*: (a) tamaño de elemento $119 \mu\text{m}$; (b) tamaño de elemento $73 \mu\text{m}$.

A efectos de evitar el uso de medidas subjetivas de la calidad de la representación geométrica, como la inspección visual de los modelos resultantes, Ibarra Pino y Cisilino (2010) propusieron el uso del índice IG. El IG es una medida porcentual de la diferencia entre el número de elementos de la fase hueso (tejido trabecular) que se obtiene priorizando la detección de una u otra fase, durante la etapa de asignación de propiedades a los elementos de la malla de elementos finitos. La definición del IG se fundamenta en el hecho que, para un paso de discretización igual a un píxel, el número de elementos asociados a la fase hueso es idéntico sin importar cuál sea la fase cuya detección se priorice. En ese sentido, en las Tablas 1 y 2 se observa que el IG disminuye conforme se reduce el tamaño del paso.

Las componentes del tensor de elasticidad C_{ij}^0 computadas mediante el método directo poseen valores más elevados que las computadas mediante el método asintótico (Tablas 3 y 4) en un todo de acuerdo con sus cotas energéticas, Nemat-Nasser y Hori (1999). La diferencia entre los tensores hallados con ambos métodos fue evaluada utilizando como norma el mayor valor singular de C_{ij}^0 .

Las normas de los tensores de elasticidad computados utilizando el método directo en los modelos de la *Muestra 1* presentan una tendencia creciente prácticamente lineal entre 52,3 y 99,67 para los modelos con el tamaño de elemento más grande y más chico respectivamente. Las normas de los tensores computados con el método asintótico también pueden aproximarse por una recta entre 10,23 y 32,01 para idénticos tamaños de elemento. Las normas de los tensores de elasticidad aparentes C_{ij}^0 determinadas para tamaño de elemento nulo presentan discrepancias del 63,74 %.

Las normas de C_{ij}^0 computados empleando el método directo para los modelos de la *Muestra 2* se encuentran entre 583,91 MPa y 586,38 MPa mientras que los hallados con el método asintótico están en el rango que va desde los 486,54 MPa y 488,21 MPa. Las normas de los tensores de elasticidad determinadas para tamaño de elemento nulo difieren en un 15,32 %.

7. CONCLUSIONES

Se determinó el tensor de elasticidad aparente en muestras de hueso trabecular mediante los métodos de homogenización directo (en desplazamientos) y asintótico.

Se observó que, para las muestras analizadas y el procedimiento empleado en la construcción de los modelos de elementos finitos, no se puede predecir “*a priori*” cual es la fase que se debe priorizar a efectos de minimizar el error de discretización geométrica (ED). El ED fue menor en el *Modelo 2* cuya fracción volumétrica ósea (FV) es mayor que el *Modelo 1*.

El método de homogenización asintótica predice un comportamiento menos rígido que el método directo en un todo de acuerdo con sus cotas energéticas.

Se observó que, aún cuando algunos de los modelos poseen una pobre representación de la geometría trabecular, las componentes del tensor de elasticidad aparente varían en forma lineal con el tamaño de elemento.

Los resultados obtenidos con el método asintótico son menos sensibles al tamaño de los elementos. Esto resultó particularmente evidente en los modelos de la *Muestra 2*. La influencia de la calidad de la representación geométrica y la relación entre el *espesor trabecular/tamaño de los elementos* sobre esta característica está siendo investigada.

Del estudio de convergencia efectuado se concluye que bastan dos modelos de elementos lineales, cuyos errores de representación y discretización sean bajos, para hallar el tensor de elasticidad aparente de muestras de tejido trabecular sin la necesidad de convertir todos los vóxeles de un estudio de microTC en hexaedros, disminuyendo de este modo el costo computacional de los modelos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Prof. Marcos Alves por facilitar imágenes de microtomografía. Este trabajo fue financiado por la ANPCyT (PICT 1154), la UNMdP y el CONICET.

REFERENCIAS

- Buroni F.C., Comisso P.E., Cisilino A.P., y Sammartino M. Determinación de las constantes elásticas anisótropas del tejido óseo utilizando tomografías computadas. aplicación a la construcción de modelos de elementos finitos. En *Proceedings of the ENIEF 2004, Mecánica Computacional*, volumen XXIII de *Mecánica Computacional*, páginas 3009–3032. Asociación Argentina de Mecánica Computacional - AMCA -, 2004.
- Cowin S. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *Journal Biomech. Eng.*, 108:83–88, 1986.
- Cowin S. y Mehrabadi M. Identification of the elastic symmetry of bone and other materials. *J. Biomech.*, 22:503–515, 1989.
- Dorr L., Lockett M., y Conaty J.P. Total hip arthroplasties in patients younger than 45 years, a nine- to ten-year follow-up study. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 260:215–219, 1990.
- García Aznar J.M. *Modelos de remodelación ósea: análisis numérico y aplicaciones al diseño de fijaciones de fracturas del fémur proximal*. Tesis de Doctorado, Centro Politécnico Superior de la Universidad de Zaragoza, 1999.
- Harrigan T.P., Jasty M., Mann R.W., y Harris W.H. Limitations of the continuum assumption in cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 21(4):269–275, 1988.
- Hart R.T. Bone modeling and remodeling: Theories and computation. En S.C. Cowin, editor, *Bone Mechanics Handbook*. CRC Press LLC, Boca Raton, 2001.

- Hashin Z. Analysis of composite materials: A survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):481–505, 1983.
- Hollister S.J. y Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Computational Mechanics*, 10(2):73–95, 1992.
- Homminga J., Huiskes R., van Rietbergen B., Rügsgger P., y Weinans H. Introduction an evaluation of gray-value voxel conversion technique. *Journal of Biomechanics*, 34:513–517, 2001.
- Ibarra Pino A. y Cisilino A. El método de homogenización directo aplicado al tejido óseo trabecular. En *Proceedings of the Bicentennial MECOM, Mecánica Computacional*, volumen XXIX de *Mecánica Computacional*, páginas 8281–8305. Asociación Argentina de Mecánica Computacional - AMCA -, 2010.
- Kabel J., van Rietbergen B., Dalstra M., Odgaard A., y Huiskes R. The role of an effective isotropic tissue modulus in the elastic properties of cancellous bone. *J. Biomech.*, 32:673–680, 1999.
- Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., y Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13/14):3647–3679, 2003.
- Keaveny T., Morgan E., Niebur G., y Yeh O. Biomechanics of trabecular bone. *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, 3:307–335, 2001.
- Mullender M.G., Huiskes R., y Weinans H. A physiological approach to the simulation of bone remodeling as self-organizational control process. *J. Biomech.*, 27:1389–1394, 1994.
- Nemat-Nasser S. y Hori M. *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials, Second Ed.* Elsevier, 1999.
- Perilli E. y Baruffaldi F. Proposal for shared collections of x-ray microct datasets of bone specimens. En *ICCB 03, Zaragoza, España*, volumen 1, páginas 235–236. Ed. M. Doblaré, M. Cerrolaza y H. Rodriguez, 2003.
- Sanchez-Palencia E. Homogenization in mechanics. a survey of solved and open problems. Seminario de matemática, Universidad Politécnica de Torino, 1986.
- Silva A.M.H., Alves J.M., da Silva O.L., Junior N.F.S., Gazziro M., Pereyra J.C., Lasso P.R.O., Vaz C.M.P., Pereira C.A.M., Leiva T.P., y Guarniero R. Análise microestrutural Ósea trabecular utilizando microtomografía tridimensional. En *Proceedings of the XVII Congreso Argentino de Bioingeniería, SABI 09*. Sociedad Argentina de Bioingeniería - SABI -, 2009. Rosario, Santa Fe, Argentina.
- Simulia. *Abaqus Documentation 6.9*. Dassault Systèmes, 2010.
- Terada K., Hori M., Kyoya T., y Kikuchi N. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 37(16):2285–2311, 2003.
- Torquato S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, 2002.
- van Rietbergen B., Weinans H., Huiskes R., y Odgaard A. A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models. *Journal of Biomechanics*, 28:69–81, 1995.
- Zohdi T.I. y Wriggers P. *Introduction to Computational Micromechanics*. Springer-Verlag, 2005.