Mecánica Computacional Vol. XXIII, pp. 2409-2425
G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.)
Bariloche, Argentina, November 2004

DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE NUSSELT PARA TUBERÍAS TRIANGULARES

Claudio E. Jouglard y Ana L. Perez

Laboratorio de Mecánica Computacional. Departamento de Física.
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.
Av. Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina
e-mail: cjougla@fi.uba.ar.

Palabras claves: Transferencia de calor, tuberías triangulares, número de Nusselt.

Resumen. La transferencia de calor total en una tubería por la que circula un fluido a una cierta temperatura, se puede calcular mediante el número Nu de Nusselt. En particular para condiciones de flujo hidrodinámicamente desarrollada y térmicamente en desarrollo se ha observado en algunas referencias bibliográficas una cierta discrepancia entre las curvas de Nu en la zona de transición entre longitudes largas y cortas de tuberías. El objeto de este trabajo es validar estas curvas en la zona de transición mediante un modelo de elementos finitos específicamente realizado para tuberías de sección triangular.

Se puede demostrar que la ecuación diferencial que gobierna este problema es similar a la ecuación de conducción de calor transitoria, por lo tanto se ha realizado un modelo de elementos finitos en ABAQUS usando las capacidades de este sistema para análisis de problemas de transferencia térmica. Se ha modelado una tubería de sección triangular, donde por simetría solo se ha discretizado una sexta parte de la sección usando elementos cuadriláteros de cuatro nodos. El campo de velocidades sobre la sección se puede asimilar a la variación del calor específico sobre dicha región. Finalmente, para la obtención de los números de Nusselt se ha realizado un programa en lenguaje C para postprocesar las salidas de ABAQUS. La metodología descripta se puede extender fácilmente a otras secciones de formas diferentes de la triangular.

INTRODUCCION

A continuación se describe en detalle la transferencia de calor en flujo laminar en un tubo, paso necesario para la comprensión del fenómeno físico involucrado y las ecuaciones que lo rigen.

1.1 Planteo del problema

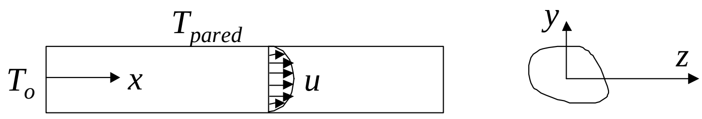

Figura 1. Planteo del problema.

Dado un tubo de sección transversal constante a lo largo del eje axial, se desplaza un fluido que posee las siguientes características: densidad ρ y coeficiente de calor específico a presión constante Cp. El fluido posee una temperatura T_o al ingresar en la tubería. La pared mantiene una temperatura uniforme T_{pared}.

Se quiere calcular la transferencia de calor en condiciones de flujo desarrollado cuando el flujo se mantiene laminar. Se supone presión uniforme en cualquier sección transversal. La distribución de velocidades u es la distribución parabólica del flujo laminar en un tubo.

1.2 Mecanismos de la transferencia de calor involucrados

1.2.1 Conducción:

Es la transferencia de calor a través de un material fijo. Cuando en un cuerpo existe un gradiente de temperatura, la experiencia muestra que hay una transferencia de energía desde la región a alta temperatura hacia la región de baja temperatura. El flujo de calor por un área A es proporcional al gradiente de temperatura:

$$Q = k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1}$$

La constante k se llama *conductividad térmica* del material.

1.2.2 Convección:

Es la transferencia de calor entre partes relativamente calientes y frías de un fluido por medio de mezcla. La transferencia de calor por convección puede ser descripta en una ecuación que imita la forma de la ecuación de conducción y está dada por:

$$Q = h \cdot A \cdot (T_{pared} - T_{fluido}) \tag{2}$$

Esta ecuación se la conoce como la “ley del enfriamiento de Newton” y la constante h se llama *coeficiente de transferencia de calor por convección,* y depende de la naturaleza del fluido y de la forma de la agitación.

El mecanismo físico de la convección está relacionado con la conducción a través de una delgada capa de fluido adyacente a la superficie que transfiere el calor. Para establecer el gradiente de temperaturas hay que utilizar mecánica de fluidos.

Se define a la temperatura promedio, ó temperatura media energética del fluido a lo largo del tubo Tb, como:

$$Tb = \frac{\int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot T \cdot dA}{\int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot dA} \qquad (3)$$

En la mayoría de los problemas de transferencia de calor en la corriente en un tubo o un canal, el asunto de mayor interés es la energía total transferida al fluido, o en una longitud elemental del tubo, o a lo largo de toda la longitud del canal. En cualquier posición de x, la temperatura que indica la energía total de la corriente es una temperatura ponderada con la masa y la energía, integrada sobre toda el área de la sección del tubo. El numerador representa el flujo total de energía en la sección del tubo, y el denominador representa el producto del flujo másico por el calor especifico integrado sobre el área de la sección del tubo. La temperatura promedio representa entonces la energía total de la corriente en un lugar determinado. Por esta razón, a la temperatura promedio se la llama a veces “temperatura de mezcla” ya que es la temperatura que tendría el fluido si se colocase en una cámara de mezcla y se le permitiese alcanzar el equilibrio:

$$T_{fluído} = Tb \qquad (4)$$

1.3 Balance de energía en el fluido

Si tomamos un elemento diferencial anular del fluido que se mueve con velocidad u densidad ρ y calor específico a presión constante Cp, en un tubo de longitud dx y evaluamos la transferencia de calor que se produce por el movimiento de un fluido, el flujo de calor por conducción es:

$$dQ_{conducción} = k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dA_{pared} \qquad (5)$$

donde dA_{pared} es un diferencial de área de pared que se define como:

$$dA_{pared} = ds \cdot dx \qquad (6)$$

siendo ds es un diferencial de longitud de perímetro.

El calor que sale por convección es:

$$dQ_{convección} = \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA \cdot dx \tag{7}$$

donde *dA* es un diferencial de área transversal.

Luego el balance de energía implica que la energía neta que sale por convección debe ser igual al calor neto que entra por conducción

$$\int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA = \int_c k \frac{\partial T}{\partial n} \cdot ds \tag{8}$$

Por el teorema de Green en el plano:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dn} = n^T * \nabla T \tag{9}$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_c k \cdot (n^T * \nabla T) \cdot ds = \int_A k \cdot \nabla^2 T \cdot dA \tag{10}$$

La ecuación de balance de energía queda:

$$\int_A (\rho \cdot Cp \cdot u \frac{\partial T}{\partial x} - k \cdot \nabla^2 T) \cdot dA = 0 \tag{11}$$

Para que la integral sea nula, debe ser nulo el paréntesis, resultando la ecuación de convección - conducción:

$$\rho \cdot Cp \cdot u \frac{\partial T}{\partial x} = k \cdot \nabla^2 T \tag{12}$$

1.4 Balance de energía en las paredes del tubo

El flujo de calor a través de un elemento fluido con flujo laminar se expresa:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \tag{13}$$

Luego a lo largo de la pared de la tubería, el flujo de calor se define como:

$$Q_{pared} = \int_{Ap} k \frac{\partial T}{\partial n} dA_{pared} = \int_x \int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA \cdot dx \tag{14}$$

Por otra parte, en la pared de la tubería, el calor por convección también puede evaluarse mediante la ley de enfriamiento de Newton:

$$dQ_{pared} = h \cdot dA_{pared} \cdot (T_{pared} - Tb\ ) \tag{15}$$

Integrando sobre el perímetro

$$Q_{pared} = \int_x h \cdot S \cdot (T_{pared} - Tb) \cdot dx \tag{16}$$

donde S es el perímetro total de la sección transversal.

Ambas expresiones del calor por convección en la pared deben ser iguales, por lo tanto:

$$\int_x h \cdot S \cdot (T_{pared} - Tb) \cdot dx = \int_x \int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA \cdot dx \tag{17}$$

Resultando

$$\int_x \left[h \cdot S \cdot (T_{pared} - Tb) - \int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA \right] \cdot dx = 0 \tag{18}$$

Para que la integral anterior sea nula, debe ser nulo el corchete:

$$h \cdot S \cdot (T_{pared} - Tb) - \int_A \rho \cdot Cp \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA = 0 \tag{19}$$

Si en el fluido en cuestión tanto ρ como Cp son constantes en toda el área, queda:

$$h \cdot A \cdot (T_{pared} - Tb) - \rho \cdot Cp \cdot \int_A u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dA = 0 \tag{20}$$

Además:

$$\frac{\partial (T \cdot u)}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \tag{21}$$

como u no varía con la variación de x, entonces su derivada es nula, y queda:

$$\frac{\partial (T \cdot u)}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \tag{22}$$

Reemplazando (22) en (20) resulta:

$$h \cdot S \cdot (T_{pared} - Tb\ ) - \rho \cdot Cp \frac{\partial}{\partial x} \int_A (T \cdot u) \cdot dA = 0 \tag{23}$$

En este caso, siendo ρ como Cp constantes, la temperatura promedio viene dada por:

$$Tb = \frac{\int_A (T.u)\cdot dA}{\int_A u\cdot dA} \tag{24}$$

esto es

$$Tb\int_A u\cdot dA = \int_A (T.u)\cdot dA \tag{25}$$

Reemplazando (25) en (23) resulta:

$$h\cdot S\cdot(T_{pared} - T_{fluído}) - \rho\cdot Cp\,\frac{\partial}{\partial x}\left(Tb\int_A u\cdot dA\right) = 0 \tag{26}$$

Analizando aparte la expresión de la derivada tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Tb\int_A u\cdot dA\right) = \left(\frac{\partial Tb}{\partial x}\right)\cdot\int_A u\cdot dA + Tb\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_A u\cdot dA \tag{27}$$

Como la derivada respecto de x de la integral de la velocidad sobre el área es nula, queda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Tb\int_A u\cdot dA\right) = \left(\frac{\partial Tb}{\partial x}\right)\cdot\int_A u\cdot dA \tag{28}$$

Además si en forma análoga a la definición de temperatura promedio, se define la velocidad promedio u_m como:

$$u_m = \frac{\int_A u\cdot dA}{A} \tag{29}$$

esto es

$$\int_A u\cdot dA = u_m\cdot A \tag{30}$$

Luego la ec. (28) se puede expresar como:

$$h\cdot S\cdot(T_{pared} - Tb) - \rho\cdot Cp\cdot\left(\frac{\partial Tb}{\partial x}\right)\cdot u_m\cdot A = 0 \tag{31}$$

Interesa conocer el coeficiente de transferencia de calor por convección, en consecuencia se despeja h:

$$h = \frac{\rho\cdot Cp}{(T_{pared} - Tb)}\cdot\left(\frac{\partial Tb}{\partial x}\right)\cdot u_m\cdot\frac{A}{S} \tag{32}$$

Si el conducto a través del cual circula el fluido no tiene sección circular, se recomienda que las correlaciones de transferencia de calor se basen en el diámetro hidráulico, definido por:

$$Dh = \frac{4.A}{S} \tag{33}$$

Finalmente el coeficiente de transferencia *h* se puede expresar como:

$$h = \frac{\rho \cdot Cp}{(T_{pared} - Tb)} \cdot \left(\frac{\partial Tb}{\partial x} \right) \cdot u_m \cdot \frac{Dh}{4} \tag{34}$$

1.5 Número de Nusselt

El número de Nusselt es el coeficiente de transmisión de calor adimensional, aparece debido a la convección. Este número provee una medida de la convección sobre la superficie. Está definido por:

$$Nu = \frac{h \cdot L}{k} \tag{35}$$

donde *h* es el coeficiente de transmisión de calor, *L* es una longitud característica y *k* es la conductividad térmica. En el caso de tuberías, la longitud característica *L* es el diámetro hidráulico.

Teniendo en cuenta las ecuaciones ya desarrolladas, el número de Nusselt se escribe como sigue:

$$Nu_D = \frac{\rho \cdot Cp \cdot u_m}{k \cdot (T_{pared} - Tb)} \cdot \left(\frac{\partial Tb}{\partial x} \right) \cdot \frac{Dh^2}{4} \tag{36}$$

Por otra parte, se define al número de Nusselt promedio como:

$$Nu_L = \frac{1}{x} \int_0^x Nu_D \cdot dx \tag{37}$$

2 RESOLUCION DE ECUACIONES

Es necesario resolver la ecuación de convección-conducción para conocer la temperatura del fluido en cada punto del tubo. Tal como se presenta, la ecuación obtenida está lejos de ser resuelta en forma simple y certera. Una alternativa válida es disminuir la complejidad, transformando la ecuación en una equivalente a la general de Fourier. Lo ideal es llegar a la forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \tag{38}$$

siendo α la difusividad térmica:

$$\alpha = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\rho} \cdot \tilde{C}p} \tag{39}$$

donde $\tilde{k}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{C}p$ son las propiedades de un medio bidimensional.

Perteneciendo al tipo descrito, la ecuación diferencial puede ser resuelta en forma sencilla y con gran aproximación mediante el método de los elementos finitos.

2.1 Proceso de transformación

La ecuación general que describe el fenómeno de conducción – convección a lo largo de la tubería es la ec.(12):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\rho \cdot Cp \cdot u} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{40}$$

Definiendo la temperatura adimensional θ como:

$$\theta = \frac{T - T_{pared}}{T_0 - T_{pared}} \tag{41}$$

donde T_0 es la temperatura de entrada del fluido en $x=0$. Luego θ varía entre 0 y 1.

Luego la temperatura T de cualquier punto se puede expresar como:

$$T = \theta (T_0 - T_{pared}) + T_{pared} \tag{42}$$

y notando que:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = (T_0 - T_{pared}) \tag{43}$$

las derivadas parciales de T respecto de x,y,z serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = (T_0 - T_{pared}) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = (T_0 - T_{pared}) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = (T_0 - T_{pared}) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \tag{44}$$

Y las derivadas segundas son:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \left(T_0 - T_{pared}\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{45}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \left(T_0 - T_{pared}\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = \left(T_0 - T_{pared}\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

Reemplazando las derivas en (40) resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{k}{\rho \cdot Cp \cdot u} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) \tag{46}$$

Definiendo la variable adimensional *X* como:

$$X = \frac{x}{Dh.\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}} \tag{47}$$

donde Re y Pr son respectivamente los números de Reynolds y de Prandtl definidos como

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_m . Dh}{\nu} \tag{48}$$
$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu . \rho . Cp}{k}$$

donde ν es la viscosidad del fluido.

Notando que

$$Dh \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} = Dh^2 \cdot \frac{u_m \cdot \rho \cdot Cp}{k} \tag{49}$$

entonces la variable *X* se puede expresar como:

$$X = \frac{k \cdot x}{Dh^2 \cdot u_m \cdot \rho \cdot Cp} \tag{50}$$

Luego la derivada de la temperatura adimensional θ respecto de *x* es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial X}\left(\frac{k}{Dh^2 \cdot u_m \cdot \rho \cdot Cp}\right) \tag{51}$$

Definiendo las variables adimensionales *Y, Z* como:

$$Y = \frac{y}{b} \tag{52}$$
$$Z = \frac{z}{b}$$

donde *b* es una longitud característica de la sección transversal, tenemos que las derivadas parciales de la temperatura adimensional θ respecto de *y*, *z* son:

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial Y}\frac{1}{b} \tag{53}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{1}{b}$$

y las derivadas segundas respecto de *y*, *z* son:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right)\frac{1}{b}+\frac{\partial\theta}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\frac{1}{b^2} \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right)\frac{1}{b}+\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\frac{1}{b^2}$$

Reemplazando (51) y (54) en (46) obtenemos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial X}=\frac{Dh^2}{b^2}\frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\right) \tag{55}$$

Donde

$$U=\frac{u}{u_m} \tag{56}$$

es la velocidad adimensional.

2.2 Comparación de ecuaciones

La ecuación general de Fourier bidimensional es:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) \tag{57}$$

Comparando la ecuación (55) con la ecuación general de Fourier, se infiere que ambas resultan equivalentes si se considera:

$$\theta\equiv\Phi, \qquad X\equiv t, \qquad \alpha\equiv\frac{Dh^2}{b^2\cdot U} \tag{58}$$

Llevando en cuenta la definición de α de la ec. (39)

$$\alpha=\frac{k\cdot\rho}{Cp} \tag{59}$$

para que ambas ecuaciones sean equivalentes se debe asumir:

$$k=\frac{Dh^2}{b^2}, \qquad \rho=1, \qquad Cp=U \tag{60}$$

2.3 Obtención del Número de Nusselt

Continuando con las transformaciones, se rescribe la expresión del número de Nusselt, para poder calcularlo utilizando los valores de temperatura adimensional obtenidos mediante la resolución de la ecuación de energía equivalente.

Se parte de:

$$Nu_D = \frac{\rho \cdot Cp \cdot u_m}{k \cdot (T_{pared} - Tb)} \cdot \left(\frac{\partial Tb}{\partial x}\right) \cdot \frac{Dh^2}{4} \tag{61}$$

se busca expresar al número de Nusselt en función de las variables de la ecuación diferencial transformada. La temperatura promedio se puede expresar como:

$$Tb = \theta b\left(T_0 - T_{pared}\right) + T_{pared} \tag{62}$$

La derivada de la temperatura promedio se expresa como:

$$\frac{\partial Tb}{\partial x} = \left(T_0 - T_{pared}\right)\frac{\partial \theta b}{\partial x} = \left(T_0 - T_{pared}\right)\frac{\partial \theta}{\partial X}\left(\frac{k}{Dh^2 \cdot u_m \cdot \rho \cdot Cp}\right) \tag{63}$$

Luego el número de Nusselt se puede expresar como:

$$Nu_D = \frac{1}{4(-\theta b)} \cdot \left(\frac{\partial \theta b}{\partial X}\right) \tag{64}$$

También se busca expresar al número de Nusselt promedio de manera coherente con las variables de la ecuación diferencial equivalente. El punto de partida es la definición:

$$Nu_L = \frac{1}{x}\int_0^x Nu_D \cdot dx \tag{65}$$

A la coordenada longitudinal se le aplica cambio de variables obteniendo

$$Nu_L = \frac{1}{X.}\int_0^x Nu_D \cdot dX \tag{66}$$

Ha quedado en función del número de Nusselt Nu_D, cuya expresión ya se ha conseguido, por lo tanto se escribe:

$$Nu_L = \frac{1}{X.}\int_0^x \frac{1}{4(-\theta b)} \cdot \left(\frac{\partial \theta b}{\partial X}\right) \cdot dX = -\frac{1}{4X.}\int_0^{\theta b} \frac{d\theta b}{\theta b} \tag{67}$$

Resolviendo la integral obtenemos

$$Nu_L = \frac{1}{4X.} \ln\left(\frac{1}{\theta b}\right) \tag{68}$$

Se observa que una vez conocido el θb de cada X , queda resuelto el problema de encontrar el número de Nusselt de la correspondiente distancia.

3 IMPLEMENTACION

Consta de numerosos pasos y de la utilización de distintos programas desarrollados y diferentes lenguajes de programación.

3.1 Resolución de ecuaciones diferenciales (ABAQUS)

Utilizando el programa **ABAQUS / CAE** se define la geometría de la sección en cuestión y se especifican las condiciones de contorno. La malla de elementos finitos se genera de acuerdo al tipo de elemento que se crea más conveniente.

Al asimilar la ecuación diferencial a una transitoria, para cada longitud deseada debe ingresarse el valor de X como una fracción del tiempo total de análisis.

Pasando al problema térmico propiamente dicho deben especificarse las características del material, es necesario ingresar los valores que determinan α. Las constantes k y ρ se ingresan como es habitual con sus valores equivalentes. Se utiliza la rutina de usuario **UMATHT** para definir la variación de calor específico Cp, asociada al campo de velocidades de la sección, en cada elemento.

Se genera un archivo de salida donde son escritas las coordenadas de la malla, y el valor θ de para cada nodo.

3.2 Rutina de integración (Lenguaje C)

Los valores de $\theta = \theta\,(Y,Z)$ deben ser integrados en toda la sección para obtener la expresión de la energía media para cada distancia especificada.

$$\theta b = \frac{\int_A (\theta . U) \cdot dA}{\int_A U \cdot dA} \tag{69}$$

este proceso se repite para cada distancia X especificada.

3.3 Rutina de interpolación y derivación (MATLAB)

Por los puntos obtenidos, se interpola una curva para obtener el valor de θb para cada longitud X. El método de interpolación elegido es el denominado *spline* (Cubic spline interpolation). Este método usa series de funciones para obtener los puntos interpolados. Entre cada par de puntos existentes se determinan funciones aisladas, con la condición de que en el extremo, cada función tenga las mismas derivadas primera y segunda que la función que le sigue.

De la simple observación de la expresión del número de Nusselt Nu_D emerge la necesidad de derivar θb a lo largo de la trayectoria.

La derivada se calcula directamente de la curva de interpolación. La aproximación de la derivada calculada de esta manera es muy buena, dado que la interpolación de la curva original también lo es.

4 NÚMERO DE NUSSELT PARA TUBERÍAS TRIANGULARES

Se evalúa la transferencia de calor en un conducto cuya sección mantiene la forma de un triángulo equilátero en toda su longitud.

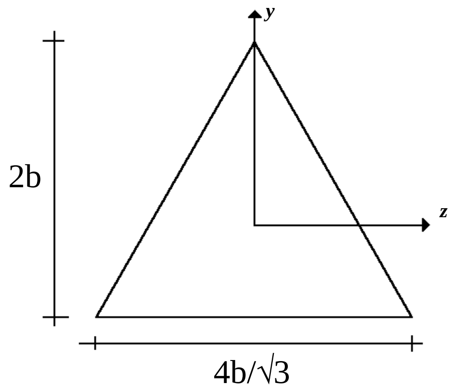

Figura 2. Conducto triangular equilátero.

Se parte de la ecuación general, adecuándola para este caso particular:

$$\frac{\partial\theta}{\partial X}=\frac{Dh^2}{b^2\cdot U}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\right) \tag{70}$$

Se utiliza el diámetro hidráulico de la sección transversal:

$$Dh=\frac{4}{3}b \tag{71}$$

y la expresión del campo de velocidades parabólico:

$$u=\frac{c_1}{8b}\left[-y^3+3yz^2+2b(y^2+z^2)-\frac{32}{27}b^3\right] \tag{72}$$

La velocidad promedio está dada por:

$$u_m=\frac{\int_A u\cdot dA}{A}=-\frac{c_1}{15}b^2 \tag{73}$$

Se obtiene el valor de la velocidad adimensional:

$$U=\frac{u}{u_m}=\frac{15}{8}\left[-Y^3+3YZ^2+2(Y^2+Z^2)-\frac{32}{27}\right] \tag{74}$$

Con todas estas consideraciones queda totalmente definida la ecuación diferencial de transferencia de calor de un fluido en régimen laminar, a través de un tubo de sección triangular equilátera, como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{16}{9 \cdot U}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}\right) \qquad (75)$$

Esta ecuación se resuelve mediante el programa ABAQUS, asumiendo:

$$k = \frac{16}{9}, \qquad \rho = 1, \qquad Cp = \frac{15}{8}\left[-Y^3 + 3YZ^2 + 2(Y^2 + Z^2) - \frac{32}{27}\right] \qquad (76)$$

Por razones de simetría se modela sólo la sexta parte de la sección, la cual se discretiza usando elementos cuadriláteros de cuatro nodos (ver figuras 3 y 4).

Se resuelve la ecuación equivalente para ciertas longitudes escogidas. Para cada una de estas longitudes específicas se obtienen los valores θ nodales de la malla adoptada. Estos valores de $\theta = \theta\,(Y,Z)$ son integrados de manera que la temperatura promedio represente la energía media. De esta manera, el estado energético para ciertas localizaciones en el conducto queda descrito por la tabla 1.

X	θb	X	θb
0.0004	5.8242066	0.0100	4.70582386
0.0006	5.77204541	0.0200	4.07661162
0.0008	5.72617999	0.0400	3.21034564
0.0010	5.68452908	0.0600	2.58963008
0.0020	5.51235813	0.0800	2.10875073
0.0040	5.25209851	0.1000	1.72431886
0.0060	5.04402609	0.2000	0.6405264
0.0080	4.86511711		

Tabla 1. Resultados de temperatura adimensional promedio.

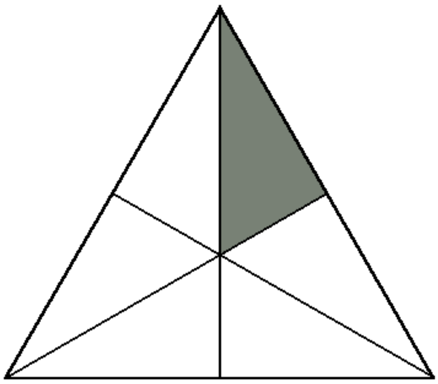

Figura 3. Modelo en ABAQUS.

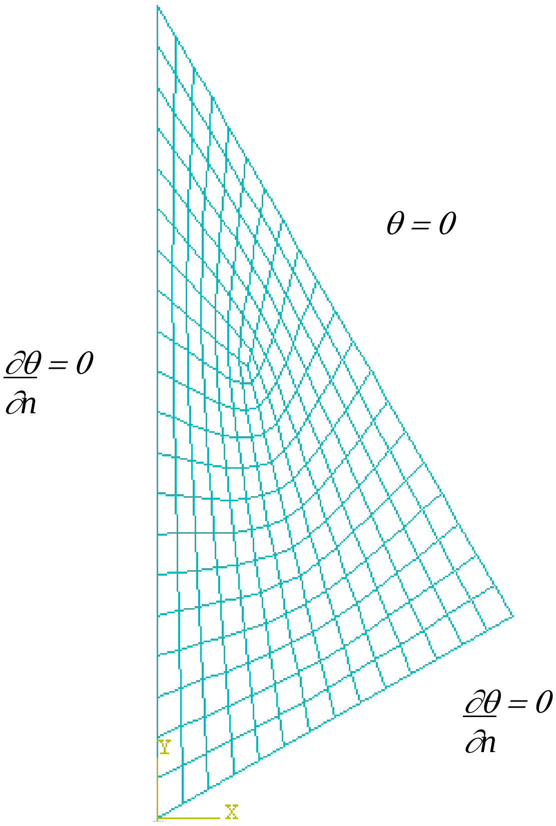

Figura 4. Discretización y condiciones de contorno.

Al interpolar estos resultados puntuales, la situación energética a cada paso del fluido se obtiene un grafico con una curva suavizada, como se observa en la figura 5. Se utilizan estos resultados para obtener el número de Nusselt. En la figura 6 se presentan los valores que asume *Nu*, a lo largo de la cañería.

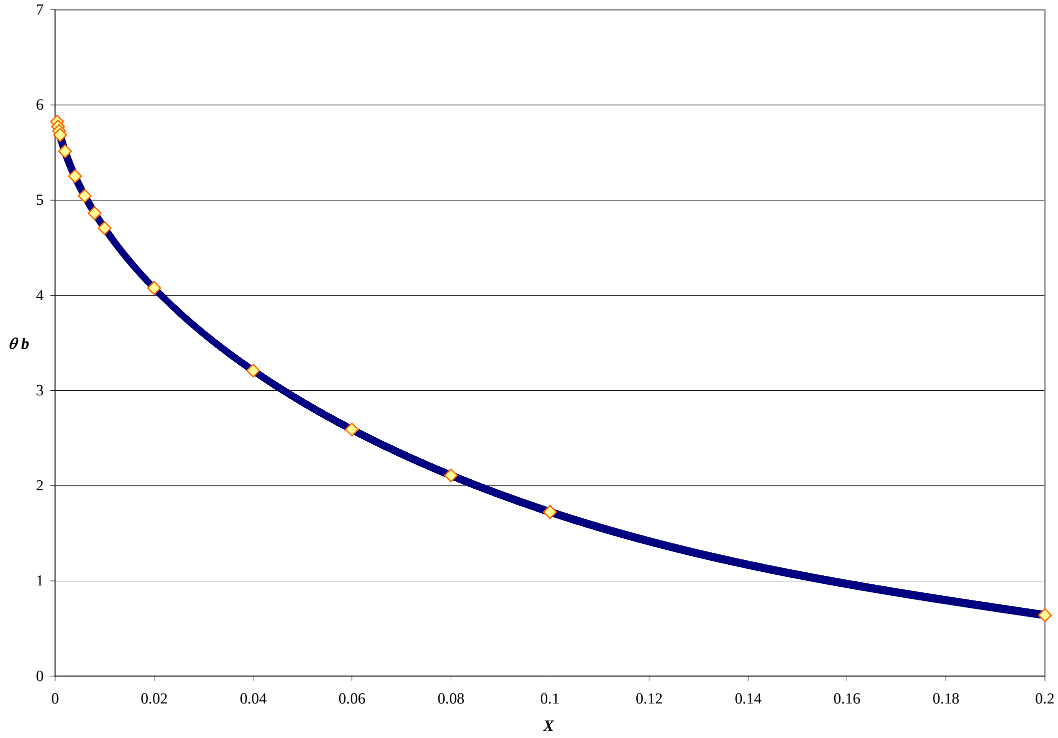

Figura 5. Gráfico de la temperatura adimensional promedio a lo largo de la tubería.

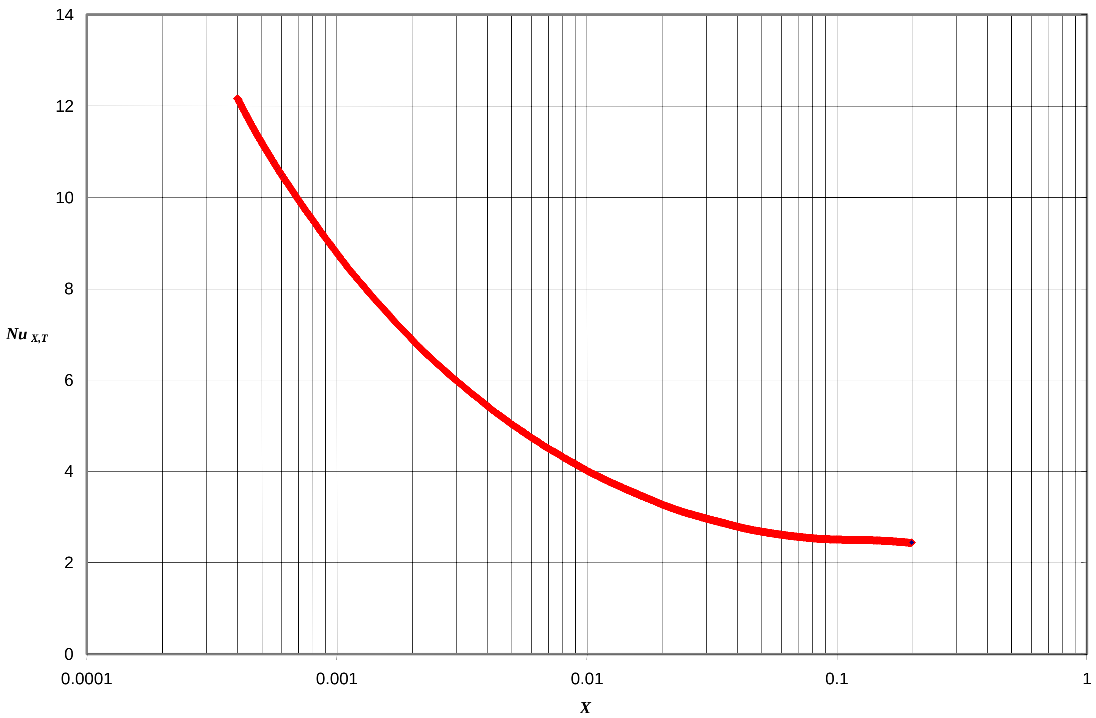

Figura 6. Valores de *Nu* a lo largo de la tubería.

Por último se contrasta la curva obtenida con la bibliografía disponible.

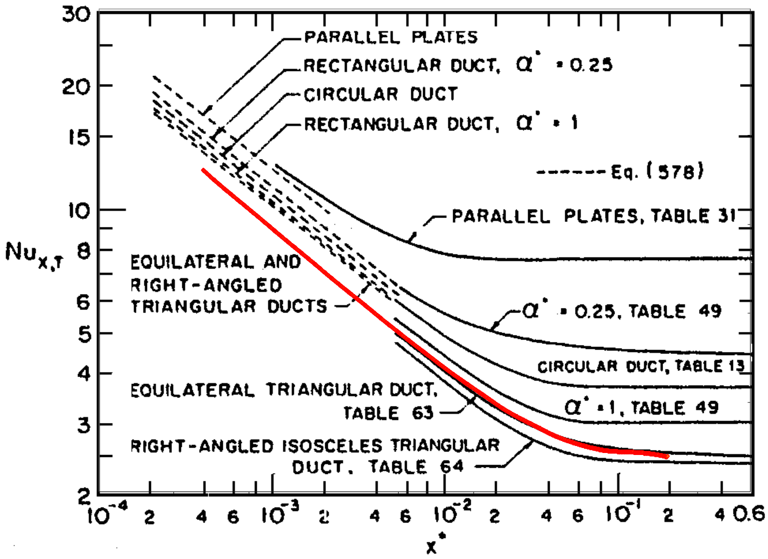

Figura 7. Comparación de la curva obtenida con curvas de referencia.

5 CONCLUSIONES

El proceso que se llevó a cabo fue el de buscar la expresión genérica de la transmisión de calor en cañerías. Luego, se transformó la ecuación diferencial que rige el fenómeno físico para conseguir que el ABAQUS la procese y resuelva. También se tuvo que expresar al número Nu de Nusselt en función de las variables transformadas para obtener resultados coherentes.

En forma numérica se desarrolló el caso particular de una tubería de sección triangular equilátera. Al superponerse la curva obtenida a las presentadas por el libro de Shah y London[3] se observa que empalma perfectamente y puede ser usada para salvar el salto que se presenta en la transición entre tuberías largas y cortas.

Como se desarrolló de manera genérica, este procedimiento es válido para cualquier tipo de sección transversal con flujo laminar, bastando conocer el campo de velocidades.

6 REFERENCIAS

[1] J.P. Holman, *Transferencia de calor*, McGraw Hill, (1998).
[2] D.Q. Kern, *Procesos de transferencia de calor*, Cia. Editora Continental S.A. (1988).
[3] R.K. Shah y A.L. London, *Convection in ducts*, Academic Press, 1978.
[4] ABAQUS User manual, v6.2. ABAQUS, Inc.