

EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN CON CONDICIONES DE BORDE EN GEOMETRÍAS ARBITRARIAS NO REGULARES

Juan P. Giovacchini^{a,c}, Omar E. Ortiz^{b,c}, Carlos Sacco^a

^a*Dpto. Mec. Aer., Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Av. Fuerza Aérea 6500 (X5010JMX) Córdoba, Argentina.
e-mail: jgiovacchini@iua.edu.ar*

^b*Facultad de Matemática, Astronomía y Física, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria (5000) Córdoba, Argentina*

^c*Instituto de Física Enrique Gaviola, IFEG, CONICET, Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria (5000) Córdoba, Argentina*

Palabras clave: Lattice Boltzmann Method, Boundary Conditions, Curved Boundary Treatment, CFD.

Resumen. El método de Lattice Boltzmann (*LBM*) ha demostrado su eficacia y potencial para tratar problemas con diversos flujos de fluidos, desde flujos laminares a bajos números de Reynolds hasta flujos altamente turbulentos, modelado con condiciones de borde sobre geometrías móviles y otras.

Las primeras aplicaciones del *LBM* se limitaban a problemas sobre geometrías regulares. El tratamiento de las condiciones de borde se limitaba al esquema de bounce-back clásico. Este esquema encontraba serias limitaciones a la hora de abordar problemas con geometrías arbitrarias. El modelado de condiciones de bordes mediante el bounce-back clásico introduce perturbaciones en el fluido debido a la aparición de bordes ficticios no suaves. Consecuentemente, existen en la pared saltos finitos en la velocidad que provocan una degradación en la precisión de los resultados. En suma, se obtienen de esta manera soluciones de primer orden de precisión.

Varias son las propuestas en la literatura para tratar condiciones de contorno aplicables sobre bordes arbitrarios. La mayoría de estas propuestas involucran interpolaciones de la función distribución de velocidades en los bordes, interpretadas en ocasiones como correcciones del esquema de bounce-back clásico. Los esquemas propuestos mejoran notablemente los resultados obtenidos, pudiendo tratarse geometrías con bordes suaves de forma arbitraria y obteniendo soluciones de segundo orden de precisión.

El objetivo principal del presente trabajo es estudiar el método de Lattice Boltzmann aplicado a problemas particulares de mecánica de fluidos que involucren condiciones de borde en geometrías arbitrarias no regulares. Se realiza la implementación del método de condiciones de borde para simular problemas 2D de testeo. Se tratan problemas tales como el flujo a través de un cilindro en un canal a números de Reynolds bajos; el flujo uniforme sobre una columna de cilindros; la determinación de la distribución de presión sobre un arreglo de cilindros; la determinación de esfuerzos sobre un cilindro libre en rotación; la evaluación de fuerzas sobre el perfil aerodinámico NACA0008 a bajos números de Reynolds.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente, el *LBM* evolucionó de los modelos de lattice gas celular automata (*LGCA*), las primeras ecuaciones de lattice Boltzmann (*LBE*) fueron propuestas por (McNamara y Zanetti, 1988) con la intención explícita de solucionar los problemas de ruido estadístico que acarrea su antecesor *LGCA*. La idea básica era reemplazar los números booleanos de ocupación n_i por sus correspondientes promedios en ensamble $f_i = \langle n_i \rangle$. Con posterioridad (He y Luo, 1997b) derivó la ecuación de lattice Boltzmann a partir de la ecuación continua de Boltzmann, discretizando el tiempo y las variables del espacio de fases (coordenadas espaciales y velocidades). Esto demostró que la ecuación de Lattice-Boltzmann, una aproximación en diferencias finitas de la ecuación continua de Boltzmann, es independiente del *LGCA*.

El *LBM* ha sido utilizado ampliamente para simular diferentes problemas de flujos viscosos. Muchas son las aplicaciones encontradas en la literatura que demuestran su eficacia y potencial para tratar problemas con diversos flujos de fluidos, desde flujos laminares a bajos números de Reynolds hasta flujos altamente turbulentos, flujos con condiciones de borde sobre geometrías móviles y flujos multifásicos entre otras.

Uno de los inconvenientes iniciales en la aplicación del *LBM* a problemas generales en mecánica de fluidos fué la imposibilidad de tratar una geometría arbitraria de manera precisa. El origen de este inconveniente residía en la no disponibilidad de métodos analíticos directos que prueben la consistencia con las condiciones macroscópicas impuestas en problemas de Navier-Stokes (*NS*). Disponer de un método para probar dicha consistencia es fundamental para analizar y mejorar una implementación particular de condiciones de borde. La aplicación de condiciones macroscópicas en el *LBM* es un procedimiento sutil ya que deben imponerse restricciones adecuadas sobre las variables mesoscópicas de modo que en el límite macroscópico se recuperen las condiciones correctas. Típicamente, el número requerido de condiciones cinéticas excede las condiciones disponibles en el problema de *NS*, con lo cual las demás condiciones deben fijarse de manera tal que se satisfaga el problema de *NS* que desea analizarse. Un método sistemático pero no directo para probar que las condiciones específicas impuestas sobre el *LBM* conducen a las condiciones de borde deseadas en el problema de *NS* es propuesto en (Junk y Yang, 2005).

La consistencia del *LBM* con las ecuaciones de *NS* puede demostrarse utilizando el método de Chapman-Enskog, Grad-Hilbert (Sone, 2002) o el de expansión multiescala (Wolf-Gladrow, 2005). En este sentido (Inamuro et al., 1997) presentó una demostración de la precisión del *LBM* y su consistencia con *NS* basada en la “expansión *S*” propuesta por (Sone, 2002), donde a diferencia de los otros métodos utilizados para demostrar consistencia, en éste se consideran expansiones en todas las variables involucradas.

La condición de contorno de no deslizamiento utilizada de manera trivial y en los inicios de la aplicación del *LBM* para imponer condiciones de borde en geometrías arbitrarias fué la de bounce-back clásico. En éste, la condición de no deslizamiento es impuesta sobre los nodos, dando como resultado geometrías con bordes escalonados, introduciendo perturbaciones en el fluido propias de la discretización resultante que produce bordes ficticios no suaves. En este caso, existen en la pared saltos de velocidad finitos provocando una degradación en la precisión de los resultados debido a la imprecisión de las condiciones de borde (Mei et al., 1999). La imprecisión en la representación geométrica genera inconvenientes adicionales al tratar problemas a elevados números de Reynolds donde la distribución de tensiones es sensible también a la resolución geométrica.

Varias son las propuestas en la literatura para tratar condiciones de no deslizamiento sobre

bordes arbitrarios. Estas propuestas pueden pensarse, en general, como correcciones al método de bounce-back para obtener métodos precisos de segundo orden y con una representación geométrica adecuada del problema. Uno de los trabajos pioneros en este sentido es el presentado por (Filippova y Hänel, 1998), corregido en (Mei et al., 1999) a fin de mejorar los problemas de estabilidad en el proceso de cálculo. En este trabajo utilizamos el método mejorado propuesto en (Mei et al., 1999) para obtener los resultados presentados.

A diferencia de los métodos clásicos utilizados en mecánica de fluidos computacional (*CFD* de su sigla en inglés) para evaluar esfuerzos sobre algún objeto inmerso en un fluido, en el *LBM* existen dos métodos bien diferenciados en cuanto a su implementación y concepción. Uno de ellos es el método de integración de tensiones utilizado también en métodos clásicos de *CFD*, el otro es un método particular, de aplicación exclusiva al *LBM* denominado *momentum exchange* presentado en (Ladd, 1994a; Caiazzo y Junk, 2008; Mei et al., 2002). Este último es el método utilizado para calcular esfuerzos en los resultados presentados en este trabajo.

La organización del trabajo es la siguiente. En la sección 2 presentamos el *LBM* y las ecuaciones básicas del método. En la sección 3 presentamos el método utilizado para el tratamiento de condiciones de borde. En la sección 4 mostramos el método de evaluación de esfuerzos. Finalmente en la sección 5 presentamos los resultados obtenidos para los diferentes casos de testeo propuestos.

2. EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

En el *LBM* se discretiza en el tiempo y en el espacio de las fases la ecuación de Boltzmann, en este trabajo se utiliza el modelo *BGK* (Bhatnagar et al., 1954) como modelo cinético de colisiones con tiempo de relajación τ único:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} (f - g) \quad (1)$$

donde $f \equiv f(x, \xi, t)$ es la función distribución de velocidad de una partícula, ξ es la velocidad de la partícula, λ es el tiempo de relajación, y g la función distribución de equilibrio de Maxwell-Boltzmann. Las variables macroscópicas ρ , u , y T se obtienen de los momentos de la función distribución f dados por:

$$\rho = \int f d\xi \quad ; \quad \rho u = \int \xi f d\xi \quad (2)$$

Como resultado de la discretización temporal de (1) se obtiene:

$$f(x + \xi \delta_t, \xi, t + \delta_t) - f(x, \xi, t) = -\frac{1}{\tau} (f(x, \xi, t) - g(x, \xi, t)) \quad (3)$$

donde $\tau = \frac{\lambda}{\delta_t}$ es el tiempo de relajación adimensional.

Las cantidades ρ y ρu satisfacen leyes de conservación (conservación de la masa e impulso lineal) que son fundamentales en la descripción macroscópica del flujo. Al describir el flujo mediante la ecuación de Lattice-Boltzmann, estas cantidades macroscópicas se recuperan mediante cuadraturas numéricas. Es por lo tanto esencial que la discretización de las velocidades ξ y la aproximación numérica de las integrales que aparecen en (2) se elijan de manera tal que las leyes de conservación macroscópica se satisfagan exactamente. Utilizando cuadraturas de Gauss-Hermite de 3 puntos para aproximar las integrales se obtiene en $2D$ el esquema de 9 velocidades denominado *D2Q9*. El esquema *D2Q9* es el más simple en dos dimensiones con el que se recupera un tensor de tensiones simétrico y completo y que respeta las leyes de conservación macroscópicas (Wolf-Gladrow, 2005)(He y Luo, 1997b).

Para obtener la ecuación del *LBM* se reemplaza la función distribución de equilibrio g (distribución de Maxwell-Boltzmann) por su expansión de Taylor en la velocidad macroscópica truncada a términos cuadráticos, por lo que la aproximación es válida a bajos números de Mach. La discretización de las coordenadas espaciales está determinada por la discretización de las velocidades ξ y del tiempo t . En otras palabras, elegida una discretización de ξ , la configuración de la lattice queda determinada unívocamente. De estas consideraciones se obtiene una discretización de la ecuación de Boltzmann que resulta en la siguiente ecuación discreta para el *LBM*:

$$f_\alpha(x + \mathbf{e}_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha(x, t) - f_\alpha^{eq}(x, t)) \quad (4)$$

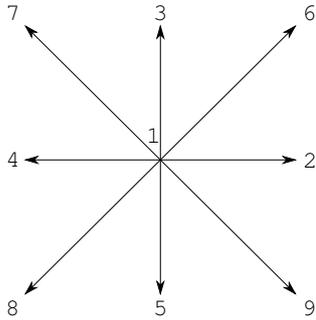
con $f_\alpha = f(x, \xi_\alpha, t)$, y f_α^{eq} la expresión discreta de la distribución de Maxwell-Boltzmann g truncada a bajos números de Mach:

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left[1 + \frac{3(e_\alpha \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_\alpha \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] \quad (5)$$

con:

$$\tau = 3\nu \frac{\delta t}{\delta x^2} + \frac{1}{2} \quad (6)$$

Para la configuración *D2Q9* adoptada en este trabajo y de (5) se obtiene el siguiente cambio indicial elegido por motivos de simplicidad en la representación y para ser coherentes con lo presentado en la literatura.



$$e_\alpha = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 1 \\ (c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c) & \alpha = 2, 3, 4, 5 \\ (c, c), (-c, c), (-c, -c), (c, -c) & \alpha = 6, 7, 8, 9 \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 1 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 2, 3, 4, 5 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 6, 7, 8, 9 \end{cases} \quad (8)$$

Figura 1: Configuración del esquema de velocidades utilizado.

con $c = \delta x / \delta t$ la velocidad de grilla, igual a la velocidad de propagación de las perturbaciones en el fluido, dando un número local de Courant-Friedrichs-Lewy igual a la unidad.

Idealmente la incompresibilidad del fluido puede ser alcanzada manteniendo su densidad constante, siendo esto una limitación en el *LBM* ya que es naturalmente compresible, la presión no es una variable dinámica independiente, se relaciona con la densidad a través de la ecuación de estado. Para tratar problemas de flujo incompresible se adopta un modelo cuasi-incompresible (He y Luo, 1997a) donde las variaciones de densidad son acotadas. Se considera $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, donde ρ_0 es una densidad constante, y $\delta\rho$ variaciones pequeñas de densidad acotadas a orden $\mathcal{O}(Ma^2)$ en el límite $Ma \rightarrow 0$ (Luo, 1993), donde Ma es el número de Mach. Con estas consideraciones sobre la densidad se obtiene la función distribución de equilibrio para flujo cuasi-incompresible.

$$f_\alpha^{eqi} = \omega_\alpha \left[\rho + \rho_0 \left(\frac{3(e_\alpha \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_\alpha \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right) \right] \quad (9)$$

Todos los términos de la ecuación (9) son de orden $\mathcal{O}(Ma^2)$ o de menor orden. Luego, de la expresión discreta (2), teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y despreciando términos de orden $\mathcal{O}(Ma^3)$ resulta

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \quad ; \quad \rho_0 u = \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha} \quad (10)$$

Es frecuente encontrar en la literatura la ecuación (4) escrita, de manera conveniente, en dos pasos denominados paso de *colisiones* y de *streaming*, definidos respectivamente como

$$\tilde{f}_{\alpha}(x, t) = f_{\alpha}(x, t) - \frac{1}{\tau} (f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(x, t)) \quad (11)$$

$$f_{\alpha}(x + \mathbf{e}_{\alpha} \delta_t, \xi, t + \delta_t) = \tilde{f}_{\alpha}(x, t) \quad (12)$$

donde f_{α} y \tilde{f}_{α} denotan el estado pre y post colisión de la función distribución de velocidades. Se puede observar que el paso de colisiones es local (involucra a un solo nodo o punto de la lattice), mientras que el paso de streaming involucra a nodos vecinos y requiere algo más de esfuerzo computacional en su implementación.

3. CONDICIONES DE BORDE SOBRE GEOMETRÍAS NO REGULARES

La condición de no deslizamiento impuesta sobre un borde sólido se satisface a nivel macroscópico al resolver la ecuación de *NS*, sin embargo, no hay una correspondencia directa para las condiciones de borde de no deslizamiento sobre las f_{α} a nivel mesoscópico. Para presentar el problema se considera la figura 2 donde se presenta un caso general de borde con geometría arbitraria inmerso en un dominio fluido. De la figura 2 se distingue dos dominios Ω_b en una tonalidad más oscura perteneciente al interior del cuerpo, y Ω_f el dominio fluido. Ambos están separados por el borde o superficie del cuerpo Γ_b .

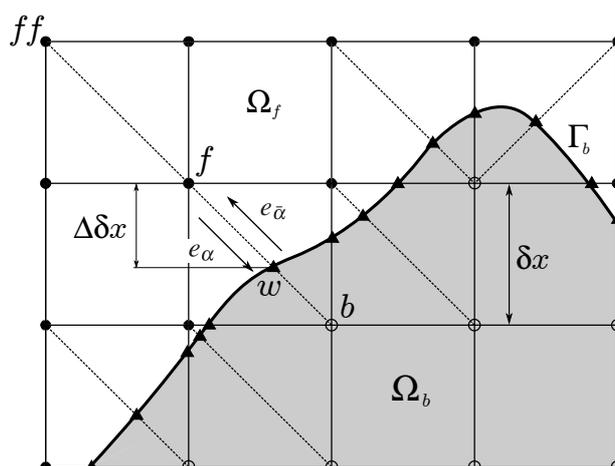


Figura 2: Esquema de un caso general de borde con geometría arbitraria. Se distingue el dominio fluido con Ω_f y el interior del cuerpo Ω_b en una tonalidad más oscura. Con círculos ● se representan los nodos lattice en el fluido, con círculos ○ los nodos lattice interiores, y con triángulos △ los puntos de corte entre la superficie o borde del cuerpo y una dirección lattice particular.

El problema en bordes de geometría arbitraria radica en la necesidad, al realizar el paso de streaming en los nodos con primeros vecinos fuera del dominio fluido Ω_f , de conocer el valor adecuado de la función densidad que asegure la condición de velocidad impuesta en el borde

\mathbf{x}_w ; donde \mathbf{x}_w son puntos particulares del borde Γ_b . De la figura 2, se observa que para un nodo ubicado en Ω_f en la posición \mathbf{x}_f (nodo de Ω_f con primer vecino en Ω_b), el proceso de streaming (12) requiere información de \tilde{f}_α (de (11)) en la posición \mathbf{x}_b dentro del dominio Ω_b . Esta particularidad es el problema principal a resolver, determinar el valor adecuado de \tilde{f}_α que es transferido desde un nodo en el cuerpo \mathbf{x}_b hacia el nodo en el fluido \mathbf{x}_f que asegure la precisión y condición deseada en la posición particular \mathbf{x}_w donde se ubica el borde. En este trabajo se utiliza el modelo propuesto por (Filippova y Hänel, 1998) con las correcciones propuestas en (Mei et al., 1999), obteniendo un método preciso de orden 2 espacialmente.

Siguiendo la nomenclatura de la figura 2, se denota a \mathbf{x}_w como el punto de intersección entre el borde y la recta que une los nodos \mathbf{x}_b con \mathbf{x}_f ; la velocidad en este punto es impuesta y se denota por $u_w \equiv u(\mathbf{x}_w, t)$. La distancia vertical y horizontal entre \mathbf{x}_w y \mathbf{x}_f está dada por $\Delta \cdot \delta x$, donde Δ se define como:

$$\Delta = \frac{|x_f - x_w|}{|x_f - x_b|} \quad (13)$$

Por claridad se denota con $f_{\bar{\alpha}}$ la función distribución (post-colisión) desde el nodo en el cuerpo en \mathbf{x}_b hacia el nodo fluido en \mathbf{x}_f , y con $e_{\bar{\alpha}}$ la dirección de velocidad correspondiente. Luego, el paso streaming en el nodo fluido \mathbf{x}_f para la dirección $e_{\bar{\alpha}}$ es:

$$f_{\bar{\alpha}}(x_f = x_b + e_{\bar{\alpha}}\delta t, t + \delta t) = \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t) \quad (14)$$

Se construye $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t)$ basado en información de los nodos cercanos, (Filippova y Hänel, 1998) proponen utilizar la interpolación lineal siguiente:

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t) = (1 - \chi) \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_f, t) + \chi \check{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t) + 2\omega_\alpha \rho \frac{3}{c^2} e_{\bar{\alpha}} \cdot u_w \quad (15)$$

donde χ es un factor de ponderación a ser determinado. $\check{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t)$ es una función distribución de equilibrio ficticia:

$$\check{f}_{\bar{\alpha}}(x_b, t) = \omega_\alpha \rho (x_f, t) \left[1 + \frac{3}{c^2} e_\alpha \cdot u_{bf} + \frac{9}{2c^4} (e_\alpha \cdot u_f)^2 - \frac{3}{2c^2} u_f \cdot u_f \right] \quad (16)$$

con u_{bf} una velocidad a determinar cerca de la pared (χ depende del valor elegido de u_{bf}), su elección no es única, se puede tomar $u_{bf} = u_f$ o una extrapolación lineal utilizando $u_{bf} = (\Delta - 1) \frac{u_f}{\Delta} + \frac{u_w}{\Delta}$.

Una propuesta que complementa lo realizado en (Filippova y Hänel, 1998), es la variante introducida en (Mei et al., 1999) que modifica el valor de u_{bf} para el caso $\Delta < \frac{1}{2}$ con el objeto de solucionar problemas de inestabilidad encontrados en el método original (Filippova y Hänel, 1998). El tratamiento modificado se resume en

$$u_{bf} = u_{ff} = u_f(\mathbf{x}_f + \mathbf{e}_{\bar{\alpha}}\delta t, t) \quad ; \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 2} \quad \text{si } \Delta < \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$u_{bf} = \frac{\Delta - 1}{\Delta} u_f + \frac{u_w}{\Delta} + \frac{1 - \Delta}{\Delta(1 + \Delta)} (u_w - (1 + \Delta)u_f + \Delta u_{ff}) \quad ; \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau} \quad \text{si } \Delta \geq \frac{1}{2} \quad (18)$$

Para implementar estas condiciones de borde es necesario determinar Δ , para lo cual se deben conocer los nodos internos (pertenecientes a Ω_b) de la lattice con primeros vecinos en el dominio fluido Ω_f (ver figura 2), luego de esto se determina el punto de intersección \mathbf{x}_w que define el par de nodos f y b . Conocidas estas variables es posible implementar (17) y (18).

4. EVALUACIÓN DE FUERZAS

En el *LBM* se utilizan típicamente dos métodos diferentes para evaluar las fuerzas actuantes sobre un cuerpo inmerso en un medio fluido. El método clásico de integración de tensiones sobre una superficie brinda una estimación adecuada de los esfuerzos actuantes. La mayor desventaja de este método es su complejidad y el costo computacional de su implementación. El inconveniente principal se presenta a la hora de determinar las tensiones sobre la superficie del cuerpo de interés. Dada la naturaleza discreta del *LBM*, la utilización de grillas cartesianas, y el tratamiento particular de las condiciones de contorno en bordes no regulares, solo se conocen valores de tensiones en los nodos de la lattice cercanos a la superficie, y no sobre la misma. La necesidad de conocer las tensiones sobre la superficie, implica extrapolarlas de manera adecuada desde el dominio fluido hacia la superficie donde se quieren determinar los esfuerzos actuantes. Una alternativa a la extrapolación de tensiones, es obtener el gradiente de velocidades en la dirección normal a la superficie para evaluar luego las tensiones de corte actuantes. Este procedimiento encuentra el mismo problema que la determinación de tensiones sobre la superficie, la necesidad de realizar extrapolaciones o interpolaciones sobre algunos puntos particulares del fluido con motivo de encontrar el gradiente buscado sobre la superficie del cuerpo. Luego, obtenidas las tensiones sobre la superficie de manera adecuada (extrapolando tensiones o velocidades), las fuerzas actuantes se obtienen de su integración sobre la superficie del cuerpo. Esta metodología utilizada ampliamente, encontrando críticas debido a la necesidad de gran cantidad de evaluaciones intermedias para encontrar los esfuerzos actuantes sobre el cuerpo.

Otro método utilizado ampliamente para la determinación de fuerzas, conocido en la literatura como *momentum exchange*, consiste en la evaluación del cambio temporal de cantidad de movimiento sobre una región determinada del dominio fluido Ω_f . Este método se caracteriza por su simplicidad en la implementación obteniendo resultados aceptables comparado con resultados experimentales y el método de integración de tensiones. A diferencia del primero, con éste se obtiene una evaluación directa de la fuerza actuante en determinada superficie Γ_b . Las primeras implementaciones de este método fueron realizadas en (Ladd, 1994a,b) utilizando el método de *bounce-back clásico* como condiciones de borde (imponiendo velocidad cero a mitad de camino entre dos nodos involucrados, por ejemplo entre f y b de la figura 2) para modelar los esfuerzos de interacción de partículas inmersas en un fluido. Luego se realizaron diferentes implementaciones, utilizando en general otros métodos de condiciones de borde para tratar geometrías no regulares (Mei et al., 2002; Caiazzo y Junk, 2008).

La fuerza total actuante sobre una región Ω_b se determina evaluando el cambio temporal de cantidad de momento en cada nodo interior a Ω_b que interactúa con nodos de Ω_f . Las fuerzas actuantes se determinan de la mediante la siguiente ecuación:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha}^{n_j} \mathbf{e}_{\alpha} (\tilde{f}_{\alpha}(\mathbf{x}_{f,j}, t) + \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_{b,j}, t)) \frac{(\delta x)^2}{\delta t} \quad (19)$$

En (19) la primer sumatoria se realiza sobre los N nodos pertenecientes a Ω_b que interactúan con nodos de Ω_f , la segunda sumatoria recorre, para cada uno de estos N nodos de Ω_b , los nodos primeros vecinos de Ω_f con los que interactúa, y $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_{b,j}, t)$ es la función distribución (15) en el nodo \mathbf{x}_b de Ω_b . En la literatura el factor $\frac{(\delta x)^2}{\delta t}$ no aparece ya que en general $\delta x = \delta t = 1$.

5. RESULTADOS

En esta sección se presentan diferentes casos de testeo realizados con motivo de comparar los resultados encontrados con otros métodos de *CFD* y *LBM*.

5.1. Test Columna de Cilindros

Se analiza el caso de una columna de cilindros separados una distancia entre centros de $20r$, donde r es el radio de los cilindros. El problema se modela considerando un dominio rectangular $2D$ con un cilindro posicionado según se muestra en la figura 3, donde las dimensiones del dominio son de $30r$ de longitud y $20r$ de altura. Se analiza el problema a dos número de Reynolds $Re = 10$ y $Re = 40$, y se evalúa la distribución de velocidad u_x a lo largo de las rectas $(x,y) = (10r,r);(10r,10r)$ y $(x,y) = (0,0);(30r,0)$, recta vertical y horizontal sobre el centro del cilindro respectivamente. Se comparan los resultados encontrados con los publicados en (Mei et al., 1999) y (Bou et al., 2008) obtenidos utilizando otros esquemas de *LBM* y condiciones de borde diferentes, también se comparan con resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos (*FEM*) (Sacco, 1997).

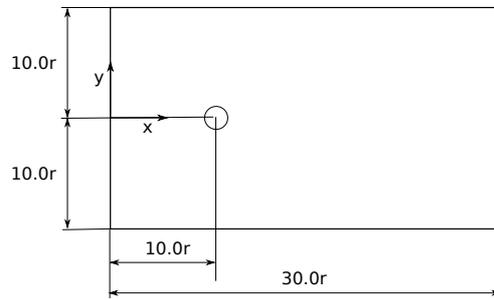


Figura 3: Geometría de la configuración analizada. Columna de cilindros separados una distancia $20r$.

Las condiciones de borde sobre las paredes rectas se imponen utilizando el modelo de Zou-He (Zou y He, 1997), donde sobre las paredes horizontales se fijan condiciones de simetría, sobre el extremo vertical izquierdo se impone velocidad uniforme U_0 , y sobre el extremo derecho una presión uniforme P_0 .

Los resultados presentados se obtienen utilizando una discretización de $N_x \times N_y = 106 \times 71$ para los dos problemas, idéntica a la utilizada en (Mei et al., 1999) y (Bou et al., 2008). Con esta discretización se tienen aproximadamente 14 nodos en el diámetro del cilindro y 24 nodos del dominio Ω_b con primeros vecinos en Ω_f . La distribución de nodos sobre la geometría, junto con los puntos de corte en los bordes de la misma se presentan en la figura 4.

En la figura 5 se presenta la distribución de velocidad sobre la línea $(x,y) = (10r,r);(10r,10r)$ para $Re = 10$ y $Re = 40$. En (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) no se presentan resultados a $Re = 40$ sobre esta sección del dominio.¹

En la figura 6 y 7 se presenta la distribución de velocidad u_x sobre la línea $(x,y) = (0,0);(9r,0)$ y $(x,y) = (11r,0);(30r,0)$, esto corresponde a la distribución de velocidad sobre una línea horizontal por delante y detrás del cilindro respectivamente.

En las figuras 5 y 6 se observa una correlación aceptable entre los valores obtenidos con *LBM* comparados con los presentados en (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) y los obtenidos con *FEM* (Sacco, 1997). En la figura 7 se observa una diferencia apreciable con la distribución de velocidades obtenida utilizando *FEM* (Sacco, 1997). Esta desviación se atribuye a la discretización gruesa del problema resuelto con *LBM* en una región del dominio donde se producen gradientes de velocidad considerables. Utilizando una discretización más refinada

¹Los datos fueron extraídos de (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) graficados con Gnuplot e interpolados para obtener una curva continua.

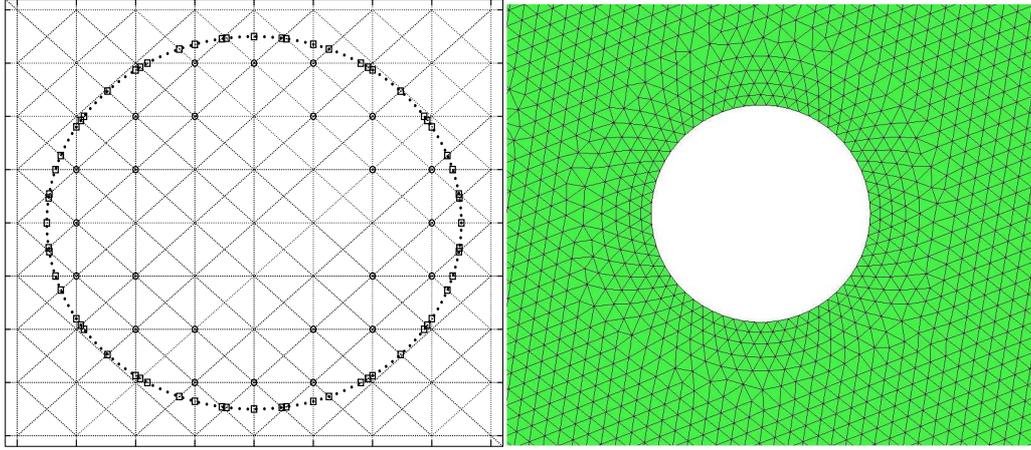


Figura 4: A izquierda se muestra la distribución de nodos sobre la geometría del cilindro del problema analizado, discretización $N_x \times N_y = 106 \times 71$. En círculos \circ se muestran los nodos internos con primeros vecinos en el dominio Ω_f . En puntos \bullet se presenta el borde Γ_b del cilindro, en cuadros \square los puntos de corte entre la superficie Γ_b del cilindro y la dirección de velocidad que comparten nodos internos Ω_b y externo Ω_f . A derecha se muestra un detalle de la malla de *FEM* con la que se obtienen los resultados utilizados para comparar con los obtenidos en el *LBM*.

($N_x \times N_y = 301 \times 201$) se obtienen los resultados presentados en la figura 8, donde se puede observar una correlación adecuada entre los resultados obtenidos utilizando *LBM* y *FEM*.

El valor del tiempo de relajación utilizado para obtener los resultados presentados es $\tau = 0,545$, mientras que en (Mei et al., 1999) se utiliza un rango de valores entre $\tau = 0,505 - 0,7$, sin presentar diferencias apreciables en los resultados.

5.2. Test Cilindro desplazado dentro de un canal

Se analiza el caso 2D de un cilindro dentro de un canal recto desplazado levemente de la posición central. Se analiza el problema a número de Reynolds $Re = 100$ y se determinan los coeficientes de resistencia C_D , sustentación C_L , presión $C_{\bar{p}}$ y el número de Strouhal (St) para diferentes discretizaciones del dominio de análisis.

La geometría del problema a analizar se presenta en la figura 9. En el extremo vertical izquierdo se impone un perfil de velocidad parabólico (con velocidad media \bar{U}), en el extremo derecho se fija una presión uniforme P_0 . Sobre las paredes horizontales se impone condición de no deslizamiento, todas las condiciones impuestas en los bordes rectos se realizan utilizando el modelo de Zou-He (Zou y He, 1997).

La configuración adoptada produce una asimetría en el dominio de análisis disminuyendo el tiempo de cálculo para el cual se encuentra la inestabilidad característica del problema. Este caso de testeo es ampliamente analizado en la literatura, utilizando como referencia en este trabajo los resultados presentados en (Mei et al., 2002; Verschaeve y Müller, 2010; Schäfer y Turek, 1996).

Obtenidos los esfuerzos sobre el cilindro, utilizando el método de *momentum exchange*, se determinan los coeficientes de sustentación C_L y de resistencia C_D , utilizando la distribución en el tiempo de estos coeficientes se obtiene el número de Strouhal St . De la distribución de densidad y la ecuación de estado se obtiene la distribución de presiones, determinando de ésta el coeficiente $C_{\bar{p}}$. Los coeficientes buscados se obtienen de las siguientes expresiones:

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho_0\bar{U}^2d} \quad ; \quad C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho_0\bar{U}^2d} \quad ; \quad C_{\bar{p}} = \frac{\Delta p}{\rho_0\bar{U}^2} \quad ; \quad St = \frac{fd}{\bar{U}} \quad (20)$$

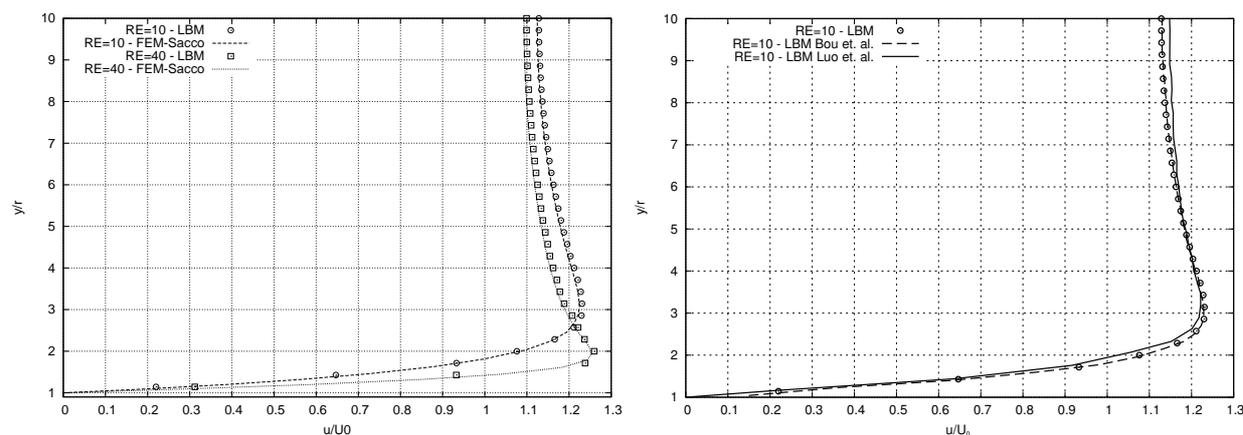


Figura 5: Distribución de velocidad en u_x sobre la línea $(x,y) = (10r, r); (10r, 10r)$ para $Re = 10$ y $Re = 40$. Comparación de resultados con los datos presentados en (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) y los obtenidos utilizando FEM (Sacco, 1997).

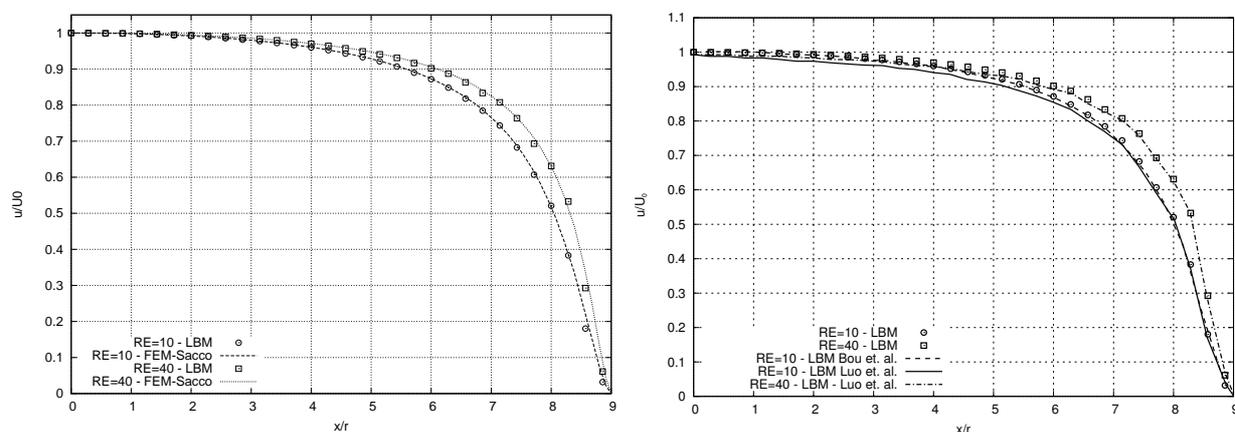


Figura 6: Distribución de velocidad en u_x sobre la línea $(x,y) = (0,0); (10r,0)$ para $Re = 10$ y $Re = 40$. Comparación de resultados con los datos presentados en (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) y los obtenidos utilizando FEM (Sacco, 1997).

con F_x y F_y las fuerzas en la dirección x e y respectivamente, d el diámetro del cilindro, $\Delta p = p_{front} - p_{back}$ la diferencia de presiones por delante y detrás del cilindro respectivamente, f es la frecuencia de los máximos o mínimos del coeficiente de sustentación C_L . Esta frecuencia está relacionada directamente con la frecuencia a la cual se desprenden los vórtices por detrás del cilindro.

Los resultados obtenidos para diferentes discretizaciones se presentan en la tabla 1, donde se comparan con resultados presentados en la literatura obtenidos con LBM y otros métodos de CFD. Se presentan resultados para tres discretizaciones denominados Test 1, 2 y 3, la distinción de método se refiere al método de evaluación de esfuerzos utilizado, donde momentum es el método de *momentum exchange*, y stress es el método de integración de tensiones sobre la superficie. Los valores presentados en la última fila de la tabla 1 son obtenidos de (Mei et al., 2002; Schäfer y Turek, 1996) y representan un rango de valores obtenidos utilizando otros métodos de CFD.

Se puede observar de los datos presentados en la tabla 1, que las estimaciones obtenidas utilizando el método presentado son aceptables comparadas con los valores de referencia. En la figura 10 se presenta en función del tiempo los resultados encontrados de coeficiente de

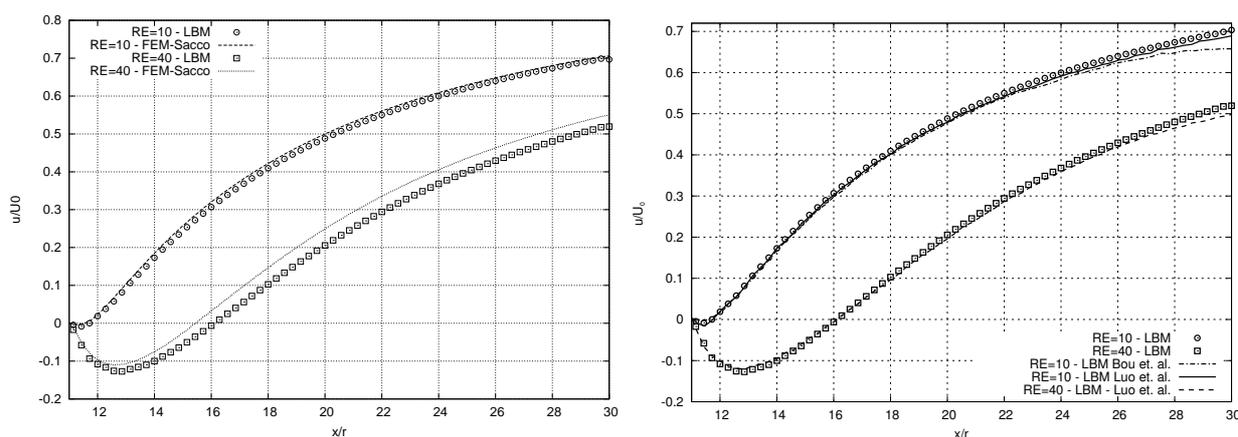


Figura 7: Distribución de velocidad en u_x sobre la línea $(x,y) = (11r,0);(30r,0)$ para $Re = 10$ y $Re = 40$. Comparación de resultados con los datos presentados en (Bou et al., 2008; Mei et al., 1999) y los obtenidos utilizando FEM (Sacco, 1997).

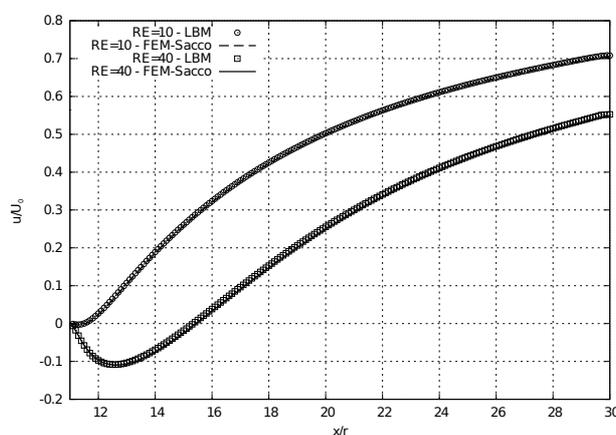


Figura 8: Distribución de velocidad en u_x sobre la línea $(x,y) = (11r,0);(30r,0)$ para $Re = 10$ y $Re = 40$ con una discretización $N_x \times N_y = 301 \times 201$. Comparación de resultados con los obtenidos utilizando FEM (Sacco, 1997).

sustentación C_L , de resistencia C_D , y de presiones $C_{\bar{p}}$ para la discretización test 1 - $N_x \times N_y = 205 \times 1095$.

La discretización utilizada con el método propuesto, comparada con la utilizada en (Mei et al., 2002) es aproximadamente el doble, 205×1095 frente a 105×564 . Para discretizaciones menores que la presentada se obtienen inestabilidades en el proceso de cálculo. Los problemas de inestabilidad se encuentran para valores de $\tau < 0,588$. El hecho de no poder disminuir el valor de τ por debajo de éste límite, y debido al vínculo entre la velocidad de análisis U_0 y la discretización δx para satisfacer Re deseado, se obtienen limitaciones en los valores máximos de δx . Es posible aumentar la velocidad U_0 para poder incrementar el tamaño δx de la discretización, esto trae aparejado un incremento en el número de Mach de análisis, y por lo tanto el error de compresibilidad toma relevancia en los resultados. Para la discretización utilizada en el test 1 se obtiene un número de $Ma = 0,265$.

Existe una diferencia entre el método de condiciones de borde utilizado por (Mei et al., 1999) para obtener los resultados presentados en la tabla 1, y el método utilizado en este trabajo. En (Mei et al., 1999) se utiliza sin distinción el método de condiciones de borde para todos los bordes del problema, en éste trabajo, sobre los bordes curvos se utiliza el método propuesto en (Mei et al., 1999), mientras que por cuestiones de simplicidad sobre los bordes rectos del

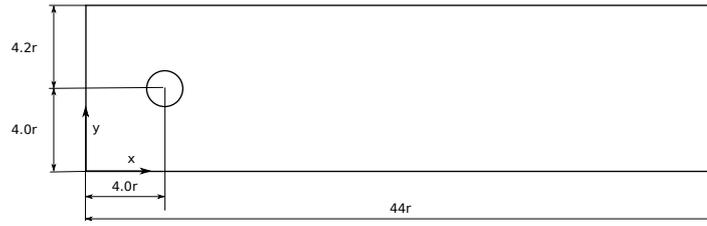


Figura 9: Geometría de la configuración analizada. Cilindro desplazado en un canal recto.

Test	Método	$N_x \times N_y$	$C_D^{max/min}$	$C_L^{max/min}$	$C_p^{max/min}$	St	τ
1	momentum	205×1095	3,2460/3,1740	1,0675/-1,039	2,500/2,3941	0,3007	0,588
2	“	251×1342	3,2432/3,1718	1,0346/-1,075	2,495/2,385	0,3015	0,607
3	“	305×1632	3,2429/3,1705	1,0346/-1,070	2,509/2,413	0,3027	0,631
(Mei et al., 2002)	“	105×564	3,2358/3,1771	1,0045/-1,0347	2,4914	0,3033	0,55
“	stress	“	3,2275/3,1708	1,0040/-1,0340	2,4914	0,3033	0,55
(Schäfer y Turek, 1996) (Mei et al., 2002)	CFD	-	3,2400/3,2200	0,9900/1,0100	2,5000/2,4600	0,2950/0,3050	-

Tabla 1: Resultados obtenidos para diferentes discretizaciones y métodos de evaluación de fuerzas utilizando *LBM* y otros métodos de *CFD*. Se comparan resultados con los presentados en (Mei et al., 2002; Schäfer y Turek, 1996)

dominio se utiliza el método de Zou-He (Zou y He, 1997). Si bien ambas condiciones son de segundo orden espacialmente, este puede ser un factor influyente en el problema de inestabilidad encontrado para valores del tiempo de relajación $\tau < 0,588$.

5.3. Test Cilindro en rotación libre

Se analiza un caso *2D* incompresible de flujo alrededor de un cilindro en rotación libre a número de Reynolds $Re = 200$. Para un cilindro de radio r , con una velocidad de rotación angular ω y una velocidad de corriente libre U_0 , se define la relación de rotación como $\gamma = r\omega/U_0$, parámetro que relaciona la velocidad tangencial y la velocidad de corriente libre. Como resultado principal se evalúa el coeficiente de resistencia y sustentación medios C_D y C_L y el número de Strouhal St para dos valores de relación de rotación $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 1$.

Este caso de testeo se realiza con motivo de comparar resultados obtenidos en (Cheng y Luo, 2007) y (Mittal y Kumar, 2003) donde se presentan los esfuerzos sobre un cilindro rotando sin presencia de pared, cilindro en rotación libre. En (Cheng y Luo, 2007) se utiliza un método de *LBM* con tiempo de relajación múltiple (*MRT*) y condiciones de borde de bounce-back clásicas, mientras que en (Mittal y Kumar, 2003) se utiliza el *FEM*.

Se adopta una dimensión de dominio fluido igual a la propuesta en (Cheng y Luo, 2007). Estas son $L_x \times L_y = 60r \times 40r$ con el centro del cilindro posicionado a $20r$ del extremo izquierdo y del borde horizontal inferior, se considera $r = 40\delta_x$, obteniéndose una discretización $N_x \times N_y = 2401 \times 1601$. En (Mittal y Kumar, 2003) se recomienda adoptar un dominio de análisis con relación $L/d > 75$, donde d es el diámetro del cilindro, y L es la distancia a los bordes desde el centro del cilindro, seguir estas recomendaciones nos aseguraría una influencia despreciable de los bordes. Sin embargo, con motivo de conservar la dimensión del problema acotada a límites razonables, debido esto a no tener implementado un esquema de refinamiento, se adoptan las dimensiones presentadas. Esta diferencia en las dimensiones utilizadas respecto a las utilizadas por (Mittal y Kumar, 2003) debe tenerse en cuenta a la hora de hacer conclusiones sobre los resultados encontrados con el método propuesto.

Sobre las paredes horizontales y verticales se imponen condición utilizando el modelo de Zou-He (Zou y He, 1997). En ambas paredes horizontales se fijan condiciones de simetría, en

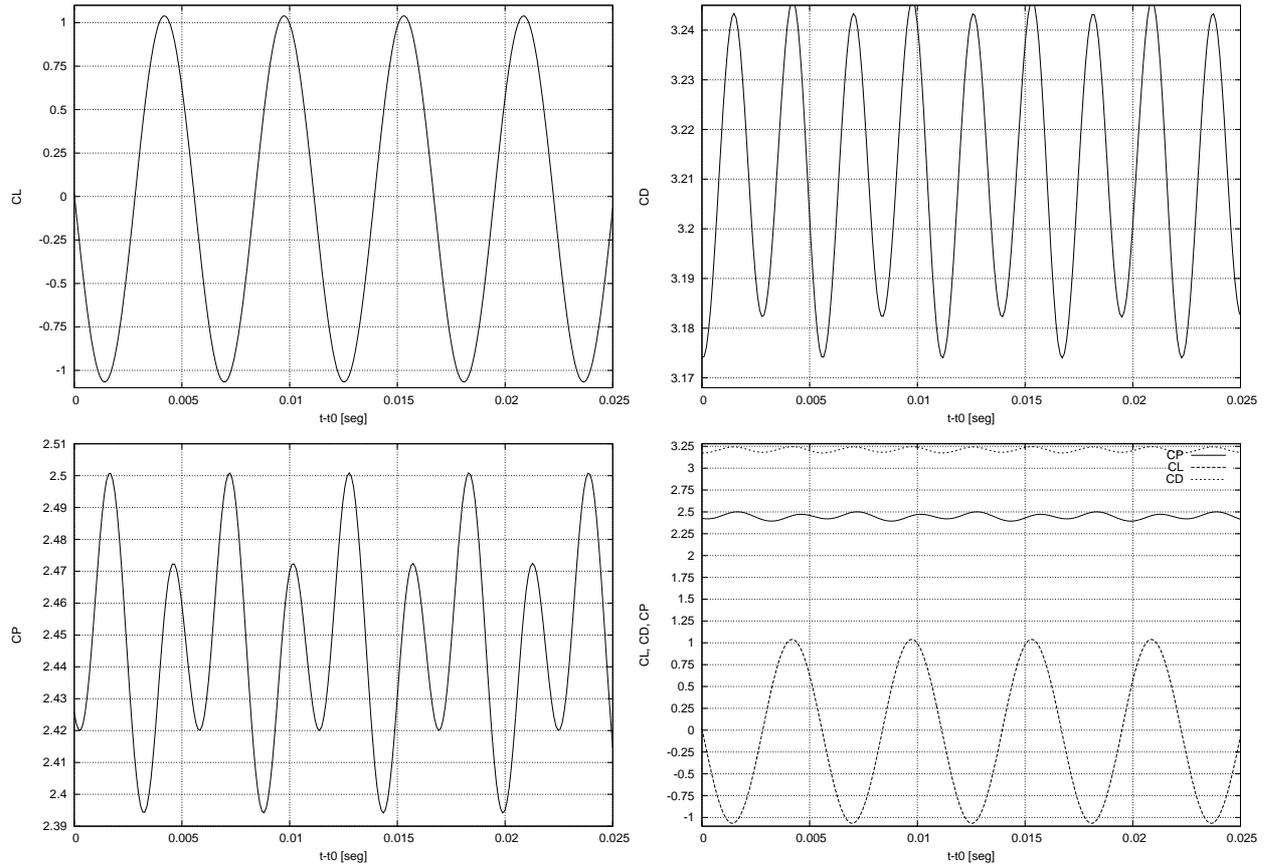


Figura 10: Coeficiente de sustentación C_L , de resistencia C_D y de presión C_p en función del tiempo obtenidos a $Re = 100$; resultados de test 1 - 205×1095 .

el extremo vertical izquierdo se impone una velocidad uniforme U_0 , y en el extremo derecho una presión uniforme P_0 . Como condiciones iniciales se considera el campo de velocidades obtenido de flujo potencial dado por las siguientes ecuaciones:

$$u_0 = \left(1 - \frac{[(x_i - x_0)^2 - (y_i - y_0)^2] r^2}{[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^2} \right) U_0 \quad ; \quad v_0 = - \frac{2(x_i - x_0)(y_i - y_0) r^2}{[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^2} U_0 \quad (21)$$

donde x_0 e y_0 es la posición del centro del cilindro, u_0 y v_0 las velocidades iniciales en x e y respectivamente.

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 2 donde se muestran resultados comparativos obtenidos con otros métodos de análisis. Se puede apreciar en la tabla 2 que se obtiene una estimación de C_L y C_D aceptable con una diferencia promedio del 4% para $\gamma = 0,5$ y del 2% para $\gamma = 1$. Las estimaciones de St conciden dentro del 1%.

En la figura 11 se presentan los coeficientes C_L y C_D en función del tiempo para los dos casos de relación de rotación $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 1$ analizados. Se puede apreciar de los resultados presentados para C_D en función del tiempo que los mismos no presentan una distribución suave, los resultados presentados en (Cheng y Luo, 2007) también muestran una distribución análoga pero algo más suave.

	$\gamma = 0,5$			$\gamma = 1$		
	C_D	C_L	St	C_D	C_L	St
FD (Chen et al., 1993)	1.28	-1.30	0.197	1.13	-2.30	0.194
FEM (Mittal y Kumar, 2003)	1.27	-1.30	0.196	1.10	-2.20	0.193
LBE(Cheng y Luo, 2007)	1.28	-1.32	0.195	1.12	-2.25	0.193
LBM	1.32	-1.24	0.1984	1.15	-2.27	0.1963

Tabla 2: Valores obtenidos de coeficiente de sustentación C_L , resistencia C_D y número de Strouhal St para $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 1$. Valores comparativos obtenidos de (Cheng y Luo, 2007).

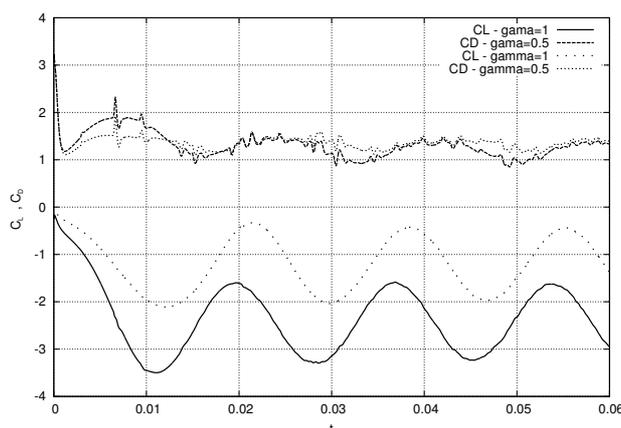


Figura 11: Coeficientes C_L y C_D en función del tiempo para los dos casos de relación de rotación $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 1$.

5.4. Test de Cilindros múltiples

Se analiza el caso de múltiples cilindros en la configuración presentada en la figura 12, donde se evalúa la distribución de presión sobre un eje horizontal ubicado en dos estaciones determinadas del dominio fluido. Se analiza el problema a un número de Reynolds $Re_E = 1$ donde $Re_E = U_0 d / \nu (1 - \varepsilon)$ es el número de Reynolds de Ergun, con $\varepsilon = 0,75$ la porosidad considerada del medio.

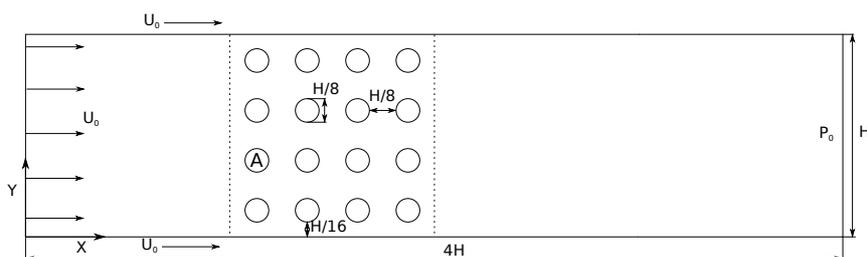


Figura 12: Geometría de la configuración analizada.

La geometría de la configuración presentada en 12 se corresponde a un canal de altura H y longitud $4H$ donde en su interior se considera una distribución de cilindros de diámetro $H/8$ separados una distancia de $H/4$ entre centros. Sobre los bordes exteriores de la geometría se imponen condiciones utilizando el método de Zou-He (Zou y He, 1997), en el extremo vertical izquierdo ($x = 0, y$) se impone velocidad uniforme U_0 , lo mismo sobre los bordes horizontales superior e inferior ($x, y = H$) y ($x, y = 0$). En el extremo derecho, ubicado en ($x = 4H, y$) se impone una presión uniforme P_0 . Conocida la distribución de densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ en el dominio de análisis, la distribución de presión se obtiene de la ecuación de estado.

La distribución del coeficiente de presión C_P para $Re_E = 1$ se presenta en la figura 13 para dos estaciones horizontales ($x, y = 0,5H$) y ($x, y = 0,625H$), donde:

$$C_P = \frac{P - P_0}{\rho_0 U_0^2} \quad (22)$$

De los resultados presentados, comparados con los obtenidos en (Geller et al., 2006), se observa una buena correlación y una correcta distribución de presiones o C_P para las dos estaciones horizontales analizadas. Existe una diferencia entre el C_{Pmax} obtenido y el presentado en (Geller et al., 2006) que es $C_{Pmax} \approx 450$, se atribuye esta diferencia al tamaño de grilla utilizado. Sin duda para efectuar corridas más precisas será necesario implementar algún método de refinamiento de grilla. En (Geller et al., 2006) se presenta una fuerte dependencia de estos coeficientes con el tamaño de grilla, resultado esperado ya que es necesario poder representar de manera adecuada la región de fluido adyacente a los cilindros.

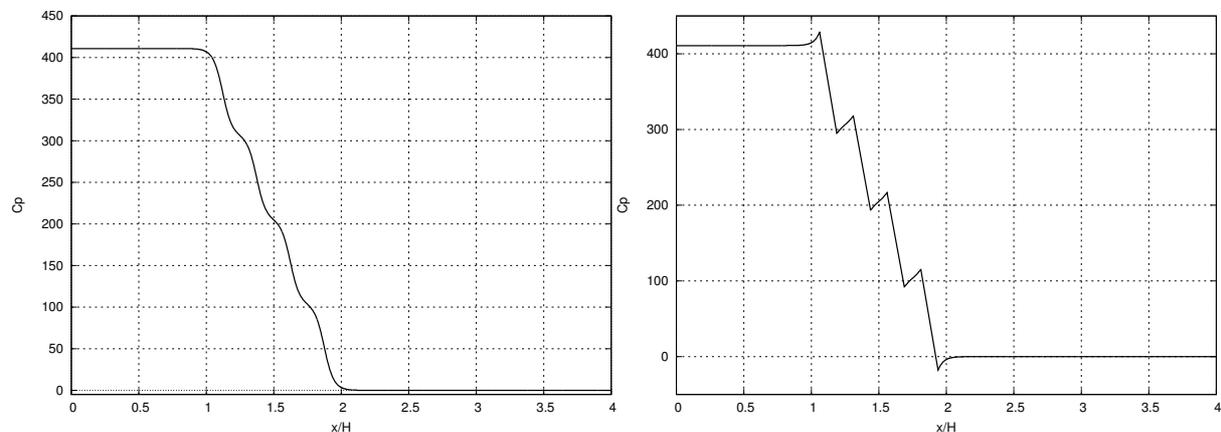


Figura 13: Distribución del coeficiente de presión C_P en dos estaciones horizontales ($x, y = 0,5H$) y ($x, y = 0,625H$) para $Re_E = 1$.

5.5. Test Perfil NACA0008

Se analizan las características aerodinámicas de un perfil NACA – 0008 a bajo número de Reynolds, $Re = 2000$. Para determinar las características aerodinámicas del perfil de interés se encuentran los coeficientes de sustentación C_L y de resistencia C_D para diferentes ángulos de ataque α respecto la dirección de la velocidad U_0 de corriente libre.

En este caso de testeo se desea comparar los resultados obtenidos con el método propuesto con los presentados en (Kunz, 2003) donde se analizan diferentes perfiles a números de Reynolds ultra bajos utilizando el método de diferencias finitas. Al no tener implementado métodos de refinamiento, el dominio de análisis es elegido como una solución de compromiso para mantener acotada la dimensión del problema. En los resultados obtenidos se debe tener en cuenta la influencia de considerar un dominio no lo suficientemente extenso tal que la influencia de los bordes sea despreciable. La dimensión adoptada del dominio fluido es de 6×4 cuerdas \tilde{c} del perfil, donde éste se posiciona $1,5\tilde{c}$ del extremo izquierdo sobre la línea media del dominio. Sobre los bordes del dominio fluido se impone una velocidad U_0 en el extremo vertical izquierdo (de la figura 14), y una presión uniforme P_0 sobre el extremo vertical derecho. En los bordes horizontales se imponen velocidad normal nula, utilizando el método de borde de Zou-He (Zou y He, 1997).

Debido a las limitaciones en la dimensión del dominio de análisis, se evalúan las características del perfil a bajos ángulos de ataque, encontrando resultados para $\alpha = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ$. En la tabla 3 se muestran los valores obtenidos comparados con los presentados en (Kunz, 2003).

α°	LBM		(Kunz, 2003)	
	C_L	C_D	C_L	C_D
0	$3,5 \times 10^{-13}$	0,078	0,0	0,0758
1	0,0745	0,079	0,073	0,0762
2	0,147	0,0799	0,144	0,0769

Tabla 3: Valores comparativos de resultados obtenidos comparados con los presentados en (Kunz, 2003) para el perfil NACA – 0008 a $Re = 2000$.

Se puede observar de los resultados presentados una coincidencia aceptable para los ángulos de ataque analizados; la diferencia máxima hallada con los valores referenciados es del 3%. En la figura 14 se presenta la geometría analizada con el campo de velocidades en el dominio fluido. El número de Mach del análisis es de $Ma = 0,23$, valor en el límite superior aceptable por errores de compresibilidad. Los valores elevados de número de Mach se alcanzan debido a las limitaciones impuestas en el tamaño del problema y la necesidad de alcanzar el número de Reynolds deseado.

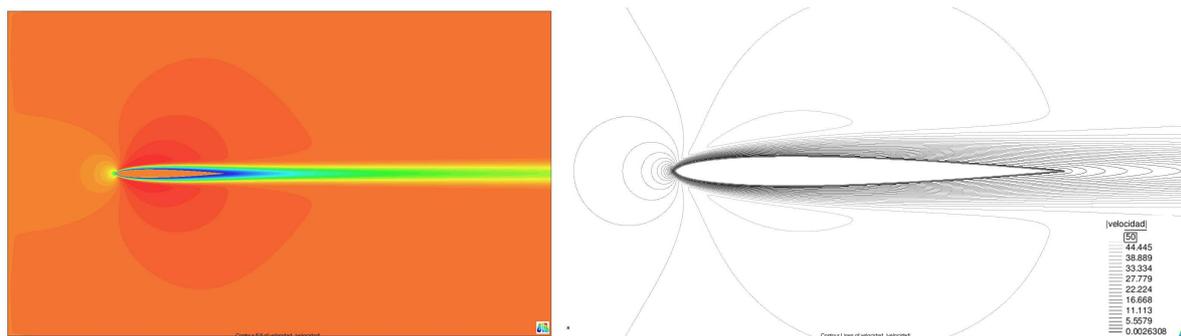


Figura 14: Geometría del problema analizado junto al campo de velocidades encontrado en el dominio fluido para el caso $\alpha = 0^\circ$.

6. CONCLUSIONES

Utilizando el método propuesto se obtuvieron en general resultados aceptables para todos los casos de testeo analizados. En algunos casos particulares se encuentran inestabilidades de cálculo para valores de tiempo de relajación $\tau \gtrsim 0,5$ (con $\tau = 0,5$ el límite por viscosidad positiva) no reportados en las referencias con las que se compararon resultados. Una limitación de la implementación propuesta, que se evidencia en algunos de los problemas tratados, es la no implementación de métodos de refinamiento de grilla. El refinamiento se hace necesario en problemas tales como el del perfil NACA – 0008 para capturar los detalles cerca de la superficie del perfil y en los cuales, al mismo tiempo, es necesario mantener un dominio computacional grande para minimizar efectos de borde ya que se pretende simular el flujo en un dominio infinito. En la simulación realizada la minimización de los efectos de borde lleva a considerar ángulos de ataque pequeños. Sin duda la implementación de un método de refinamiento será una de las tareas siguientes en el desarrollo de esta implementación.

En cuanto al método de fuerzas utilizado, este presenta ventajas considerables de implementación respecto al método de integración de tensiones, obteniéndose resultados aceptables comparados con los obtenidos utilizando otros métodos.

Una particularidad de la implementación realizada en este trabajo es que se utilizaron dos métodos distintos para imponer condiciones de borde, a saber, el método de Zou-He sobre los bordes rectos exteriores al dominio y el método presentado en (Mei et al., 1999) sobre los bordes curvos internos. Hacia el futuro es un tema de interés estudiar si esta implementación “híbrida” tiene alguna relación con la inestabilidad que se produce en problema del cilindro desplazado dentro de un canal.

REFERENCIAS

- Bhatnagar P.L., Gross E.P., y Krook M. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 94:511–525, 1954. doi:10.1103/PhysRev.94.511.
- Bou J., Yuan P., y Schaefer L. A mass conserving boundary condition for the lattice boltzmann equation method. *Journal of Computational Physics*, 227:8472–8487, 2008. doi:10.1016/j.jcp.2008.06.003.
- Caiazzo A. y Junk M. Boundary force in lattice boltzmann: Analysis of momentum exchange algorithm. *Computers and Mathematics with Applications*, 55:1415–1423, 2008.
- Chen Y.M., Ou Y.R., y Pearlstein A.J. Development of the wake behind a circular cylinder impulsively started into rotatory and rectilinear motion. *Journal of Fluid Mechanics*, 253:449–484, 1993.
- Cheng M. y Luo L.S. Characteristics of two-dimensional flow around a rotating circular cylinder near a plane wall. *Physics of Fluids*, 19:063601, 2007. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.2738608.
- Filippova O. y Hänel D. Grid refinement for lattice-bgk models. *Journal of Computational Physics*, 147(219), 1998.
- Geller S., Krafczyk M., Tölke J., Turek S., y Hron J. Benchmark computations based on lattice-boltzmann, finite element and finitevolumen methods for laminar flows. *Computer & Fluids*, 35:888–897, 2006. doi:10.1016/j.compfluid.2005.08.009.
- He X. y Luo L.S. Lattice boltzmann model for the incompressible navier-stokes equation. *JSP*, 88(3/4):927–944, 1997a.
- He X. y Luo L.S. Theory of the lattice boltzmann method: From the boltzmann equation to the lattice boltzmann equation. *PRE*, 56(6):6811–6817, 1997b.
- Inamuro T., Yoshino M., y Ogino F. Accuracy of the lattice boltzmann method for small knudsen number with finite reynolds number. *Phys. Fluids*, 9(11):3535–3542, 1997.
- Junk M. y Yang Z. Asymptotic analysis of lattice boltzmann boundary conditions. *Journal of Statistical Physics*, 121, 2005.
- Kunz P.J. *Aerodynamics and Design for Ultra-Low Reynolds Number Flight*. Tesis de Doctorado, Stanford Univerity, 2003.
- Ladd A.J. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *JFM*, 271:285–309, 1994a.
- Ladd A.J. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 2. numerical results. *JFM*, 271:311–339, 1994b.
- Luo L.S. *Lattice-Gas Automata and Lattice Boltzmann Equations for two-dimensional hydrodynamics*. Tesis de Doctorado, Georgia Institute of Technology, 1993.
- McNamara G. y Zanetti G. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical Review Letters*, 61(20):2332–2335, 1988.
- Mei R., Luo L.S., y Shyy W. An accurate curved boundary treatment in the lattice boltzmann method. *Journal of Statistical Physics*, 155:307–330, 1999.
- Mei R., Yu D., Shyy W., y Luo L.S. Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry. *PRE*, 65(041203), 2002.
- Mittal S. y Kumar B. Flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 476:303–334, 2003. doi:http://dx.doi.org/10.1017/S0022112002002938.
- Sacco C. Solver ns2dv1.0 - fem navier-stokes 2d. 1997.
- Schäfer M. y Turek S. *Flow Simulation with High-Performance Computers II*. Friedrich

Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1996.

Sone Y. *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*. Birkhäuser Boston, 2002.

Verschaeve J.C. y Müller B. A curved no-slip boundary condition for the lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, 229:6781–6803, 2010.

Wolf-Gladrow D.A. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*. Springer, 2005.

Zou Q. y He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Phys. Fluids E*, 9(6):1591–1598, 1997.