

COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE LA RED DE FLUJO EN PRESAS DE TIERRA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS.

Pablo A. Beneyto^a, Guillermo J. Gutierrez^a, Javier L. Mroginski^a, Héctor A. Di Rado^a y Armando M. Awruch^b

^a*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste.
Av. Las Heras 727, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina.
pbeneyto@ing.unne.edu.ar, <http://ing.unne.edu.ar/mecap>*

^b*Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Applied and Computational Mechanical Center (CEMACOM).
Av Osvaldo Aranha 99, 3er Andar, Porto Alegre (RS), Brazil*

Palabras Clave: Elementos finitos, flujo en medios porosos, optimización, presas de tierra, filtración

Resumen.

El flujo de agua a régimen permanente a través de presas de tierra está gobernado por la ecuación de Laplace y es un problema de gran importancia en la ingeniería práctica. La solución de éste es el conjunto de curvas que forman la red de flujo dentro del medio poroso.

Una condición de contorno de este problema es la superficie libre, cuya ubicación es desconocida en el caso de flujo inconfinado. Sobre esta superficie la presión de poros es igual a la atmosférica. Por lo que es considerada la primera línea de corriente, y por ello debe ser intersectada en forma normal por las líneas equipotenciales.

Existen métodos empíricos para su obtención, desarrollados originalmente para resolver filtraciones a régimen permanente a través de suelos saturados, homogéneos e isótropos. Sin embargo, cuando se analizan sistemas de suelos heterogéneos y/o anisótropos, se vuelven complejos y difíciles de utilizar. Para resolver casos complejos, se recurre a métodos más sofisticados y a técnicas iterativas para poder obtener la superficie libre. En este trabajo se empleó el método de los elementos finitos (MEF) como herramienta para conocer la ubicación de la misma. Para lograr este objetivo se utilizan dos planteos distintos, el primero consiste en emplear una malla deformable que contiene sólo a la zona saturada, y que es deformada a medida que varía la posición de la superficie libre y el segundo es un método de optimización heurística utilizando algoritmos genéticos. Finalmente se comparan ambos métodos y se evalúan las ventajas relativas de cada procedimiento.

1. INTRODUCCIÓN

El problema del flujo en medios porosos tiene gran importancia en diversos campos de la ingeniería. El flujo de agua que ocurre en el drenaje de terrenos o en infiltraciones bajo presas pueden, bajo ciertas condiciones, ser descriptos por la ecuación de Laplace (ecuación 1).

$$k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

donde los valores de k_x y k_y representan los coeficientes de conductividad hidráulica en las direcciones x e y , y φ es el potencial total en la masa de suelo.

El objeto del estudio del fenómeno de percolación en estructuras de tierra tiene como objetivo determinar la superficie que delimita una región completamente saturada de otra no saturada, denominada superficie libre, así como el campo de presiones que se desarrolla dentro de la presa (Beneyto et al., 2005; Maslia, 1980). Durante mucho tiempo estos problemas fueron resueltos gráfica, analítica o numéricamente considerando solo la zona saturada.

Si bien existe la posibilidad de resolver analíticamente casos sencillos, en la mayoría de los casos la distribución heterogénea de los distintos tipos de suelo y la geometría variable no permiten obtener una solución exacta.

La localización de la superficie libre no es conocida a priori, necesitándose un proceso iterativo para poder determinarla. Esta iteración puede hacerse de diversas maneras, por ejemplo, puede usarse una malla fija y separar los nodos en *activos* e *inactivos* dependiendo del fluido existente en el punto considerado (Bathe y Khoshgoftaar, 1979; Li y Desai, 1983).

Una estrategia alternativa es la de considerar que la malla se deforma, de tal manera que la superficie superior coincida con la superficie libre. La deformación de la malla es una función que surge de la diferencia entre el potencial y la coordenada del punto en estudio. Si la superficie libre no coincide, la malla es deformada hasta hacerla coincidir y nuevamente se calculan los potenciales.

En este trabajo se plantea la combinación de la malla deformada con un algoritmo de búsqueda heurística basado en el método de los algoritmos genéticos (AG).

2. OBTENCIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE

El análisis comienza proponiendo una superficie libre, resolviendo el problema a través del método de los elementos finitos y calculando el error a partir de la comparación del potencial hidráulico en los nodos de la superficie libre y los valores de las ordenadas de dichos puntos, que coincidirían en su totalidad, cuando la superficie propuesta se corresponda con la real (Smith y Griffiths, 2004).

La región a modelar es la que se muestra en la figura 1. En ella se pueden observar las condiciones de contorno que rigen el problema. El valor del potencial en los nodos ubicados en la superficie derecha (aguas arriba) es conocido y es igual al valor de la cota superior $h_{sup.}$. Análogamente, los nodos en la superficie izquierda que se encuentran por debajo del nivel del agua, tienen como valor del potencial el de la cota inferior $h_{inf.}$. Éstas constituyen las condiciones de contorno esenciales del problema, que se describen en la ecuación 2, (Zienkiewicz y Taylor, 1989).

$$\begin{aligned} \varphi_{der.} &= \bar{\varphi} = h_{sup.} \\ \varphi_{izq.} &= \bar{\varphi} = h_{inf.} \end{aligned} \quad (2)$$

La superficie inferior es considerada un contorno impermeable, por lo que no se produce flujo en una dirección normal a ésta. Por ello, la primera derivada del potencial respecto a la

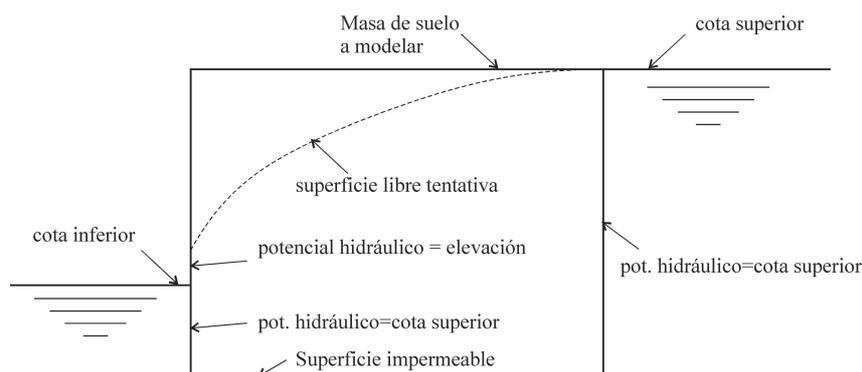


Figura 1: Condiciones de contorno del problema a modelar por el MEF.

normal n de la superficie del contorno es nula a lo largo de ésta, constituyendo una condición de contorno natural del problema (ecuación 3).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

La parte superior de la región es una línea de infiltración (superficie libre), a través de la cual también debe ser nula la variación del flujo. Además, el potencial hidráulico o carga hidráulica debe ser igual a la coordenada y_i (ecuación 4).

$$\varphi_i = y_i \quad (4)$$

Existe una región donde el agua escurre fuera de la masa de suelo. En ésta, si el gradiente hidráulico es superior al gradiente crítico para dicho suelo, se produce el fenómeno de *sifonaje* que puede llevar al colapso de la estructura. Esta zona está conformada por los puntos que se ubican entre el punto de intersección de la superficie libre con el borde aguas abajo, y el nivel del agua en dicho borde. Estos puntos también forman parte de la superficie libre, aunque se produce flujo a través de estos.

A partir de la proposición de la superficie libre, una subrutina realiza el mallado utilizando elementos cuadriláteros lineales, y resuelve el problema integrando en forma analítica las matrices de conductividad del elemento. El factor de error f_s , que es la función costo a optimizar, es definido como la suma de las diferencias entre la presión hidrostática p_i sobre los puntos de la superficie libre, y las coordenadas y_i de dichos puntos. Según la ecuación 5, cada término de la sumatoria es multiplicado por cien y elevado al cuadrado para evitar que tomen valores pequeños y/o negativos.

$$f_s = \sum [(p_i - y_i) \times 100]^2 \quad (5)$$

3. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

3.1. Estrategia de optimización

Las superficies libres tentativas son definidas mediante incrementos sucesivos de ángulos, los cuales son medidos con respecto a la horizontal, y son negativos. Los ángulos son almacenados en un vector que representa a un individuo, este vector tiene la forma que se muestra en la ecuación 6.

$$ind = [\Delta\alpha_1 \cdots \Delta\alpha_i \cdots \Delta\alpha_{(n-1)}] \quad (6)$$

La construcción de la superficie libre es modelada de la siguiente manera: se traza una línea desde el punto inicial aguas arriba, con un ángulo con respecto a la horizontal igual al primer

incremento, hasta intersectar la línea de la malla. Los siguientes puntos se obtienen repitiendo el paso anterior, pero sumando el incremento siguiente de ángulo. El número de incrementos necesarios está dado por la cantidad de puntos de la superficie, como esta cantidad está definida por el número de verticales de la malla, n será igual a esta última. La separación entre los puntos está definida por la separación entre las verticales que conforman la malla de elementos finitos.

Se opta por optimizar ángulos en vez de puntos definidos por sus coordenadas, de este modo se evita la obtención de superficies irreales que presentan fuertes variaciones de pendiente entre verticales sucesivas. Esta estrategia ya ha sido empleada con éxito en la obtención de la superficie de falla de un talud de suelo por [Kahatadeniya et al. \(2009\)](#) y [Zolfaghari et al. \(2005\)](#)

3.2. Selección

La probabilidad P_i de un individuo de ser seleccionado está dada por la ecuación 7. Sin embargo, este método no es efectivo en poblaciones con fuertes diferencias en el valor de la función costo, hecho factible en una población generada aleatoriamente.

$$P_i = \frac{f s_i}{\sum_{j=1}^{n_{pop}} f s_j} \quad (7)$$

Con el objeto de preservar la diversidad en la población, garantizando una exploración mayor del espacio de búsqueda, se emplea un escalado de la función costo de cada individuo ([Belegundu y Chandrupatla, 1999](#)). Para esto, los valores máximo y mínimo son extraídos del conjunto de valores de la función costo. Luego, a cada valor se le resta la cantidad C y se divide por D , según la ecuación 8. De este modo se obtienen los valores escalados $f s'_i$ que están comprendidos entre 0 y 1, valores próximos a 0 para el peor individuo y cercanos a 1 para el mejor.

$$\begin{aligned} C &= 0,1 f s_{\min} - 1,1 f s_{\max} \\ D &= \min(f s_i - C) \\ f s'_i &= \frac{f s_i - C}{D} \end{aligned} \quad (8)$$

La selección de los individuos es realizada mediante tiros aleatorios entre 0 y 1; que son comparados con los valores acumulados de probabilidad. A los individuos seleccionados se les aplican los procesos posteriores de cruzamiento y mutación.

3.3. Cruzamiento

El cruzamiento es el proceso mediante el cual se construyen los nuevos individuos a partir de los seleccionados. El número máximo de parejas a cruzar es de un cuarto de la población. En este trabajo se adopta un cruzamiento de tipo Single Point con dos puntos de corte ([Belegundu y Chandrupatla, 1999](#)). Se eligen aleatoriamente dos puntos en el vector que conforma el individuo, de ese modo el vector queda dividido en tres partes. Luego se intercalan las partes de vectores, formándose dos individuos nuevos, como se esquematiza en la figura 2.

3.4. Mutación

El objetivo del proceso de mutación es evitar que el algoritmo quede atrapado en óptimos locales. Esto se logra modificando alguna característica de un individuo afectado a la mutación. El valor de probabilidad de mutación de los individuos debe ser seleccionado con cuidado, un

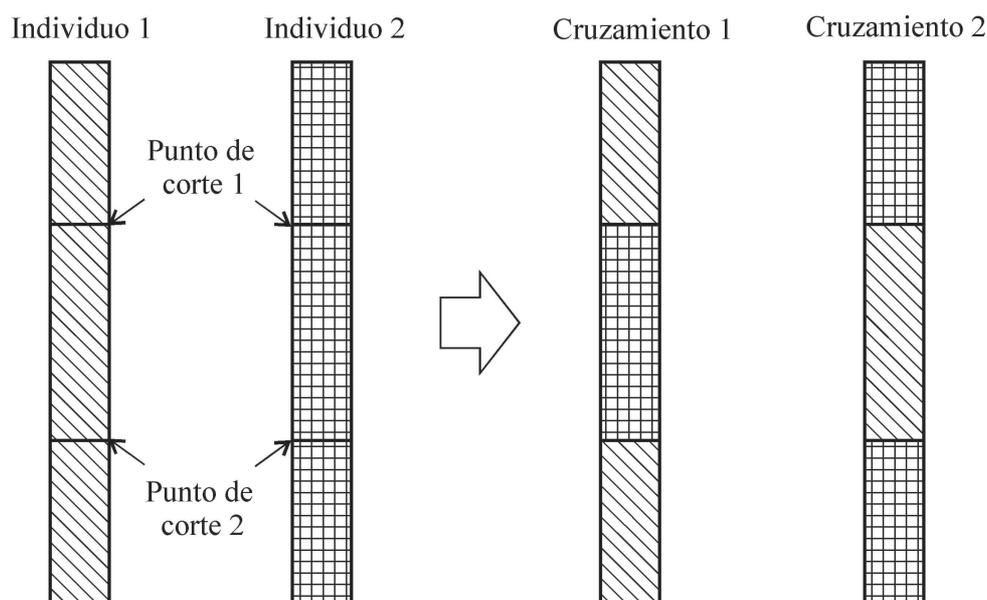


Figura 2: Esquema explicativo del mecanismo de cruzamiento de los individuos .

valor elevado, superior a 0,05, puede transformar al algoritmo en una búsqueda aleatoria (Zhang et al., 2008). El valor de probabilidad adoptado es 0,02.

En las primeras iteraciones el espacio de búsqueda es explorado intensamente, ya que la población tiende a conservar parte de características iniciales. Sin embargo, luego de un cierto número de generaciones se produce un rápido estancamiento, ya que la población es copada por copias de los mejores individuos. Por ello se adopta una función de probabilidad de mutación, según la ecuación 9, que incrementa el valor de la probabilidad de mutación a lo largo de la corrida (Mroginski et al., 2009). Cuando el algoritmo alcanza la iteración $maxmut$, la probabilidad de mutación toma su valor total $probmut$.

$$pmut_{igen} = \left[0,1 + 0,9 \times \sin \left(\frac{\pi \times igen}{2 \times maxmut} \right) \right] \times probmut \quad (9)$$

El tipo de mutación adoptado es de Step Mutation. Se selecciona un elemento del individuo que es modificado hasta un 50% de su valor, ya sea disminuído o incrementado.

4. RESULTADOS

Con el fin de efectuar una comparación con datos de la bibliografía (Smith y Griffiths, 2004), se modeló el talud de tierra analizado y se compararon resultados. En la tabla 1 se muestran los datos del ejemplo corrido.

Longitud del talud [m]	8,00
Nivel aguas arriba[m]	7,00
Nivel aguas abajo [m]	2,00
Permeabilidad [m/s]	0,001

Tabla 1: Valores del ejemplo corrido.

En la figura 3 se observan los individuos para distintas corridas del programa de AG y la solución obtenida por Smith y Griffiths (2004).

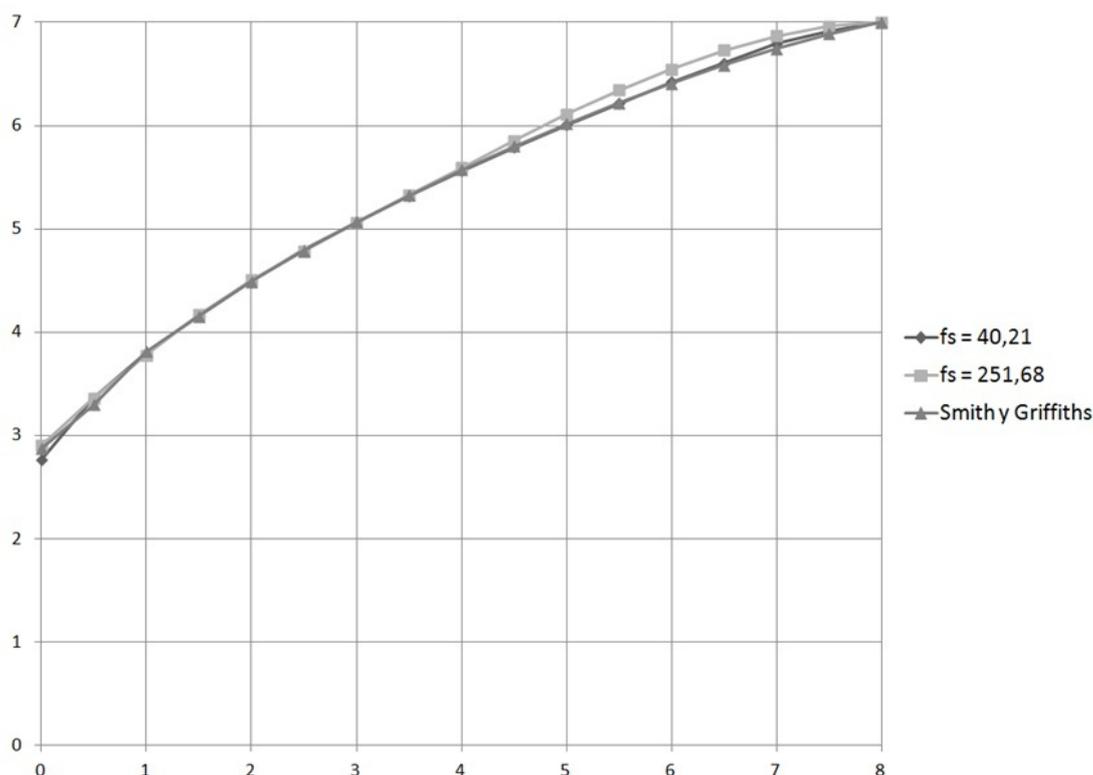


Figura 3: Solución para 100 iteraciones ($f_s = 251,68$), 1000 iteraciones ($f_s = 40,21$) y valor obtenido de la bibliografía ($f_s = 22,57$)(Smith y Griffiths, 2004)

En la figura 4 se observa la evolución de los valores de la función de costo a lo largo de la corrida. La línea continua representa el valor del mejor individuo, y las cruces la evolución de la media de la población. Se evaluó el ejemplo para un gran número de generaciones (1000), a pesar de ello se observa que el algoritmo converge dentro de las 100 iteraciones.

En la figura 4 se utilizó una probabilidad de mutación de 0,02. En la figura 5 se observa la evolución de los valores para una probabilidad de mutación de 0,05. Se destaca cómo la mutación aumenta la dispersión de los valores de la media. Se observa en ambas figuras la rápida convergencia del método, por lo que no es necesario aumentar la probabilidad de mutación.

En la figura 6 se grafica la malla de elementos finitos, y en la figura 7, las líneas equipotenciales para esa superficie libre que es el individuo obtenido luego de 1000 iteraciones.

5. CONCLUSIONES

Se desarrolló un método para obtener la superficie libre para filtración en taludes de suelo, para ello se utilizó el método de los elementos finitos y un proceso de optimización heurística basado en el método de los algoritmos genéticos, pudiendo modelarse estructuras de suelo rectangulares o inclinadas y considerar además la misma compuesta por diferentes tipos de suelo, como puede observarse en el modelo general de la figura 8.

Para el método de los elementos finitos se desarrolló un programa en lenguaje Fortran, el cual utiliza elementos cuadriláteros lineales de cuatro nodos para modelar la estructura de suelo y para resolver la ecuación de Laplace que gobierna el problema, además, como se ingresan diferentes superficies libres, se incorpora un generador de malla estructurada.

El método de los Algoritmos genéticos fue adaptado para poder ser utilizado con éxito, teniendo en cuenta los diferentes detalles expuestos anteriormente, y siguiendo el pseudocódigo

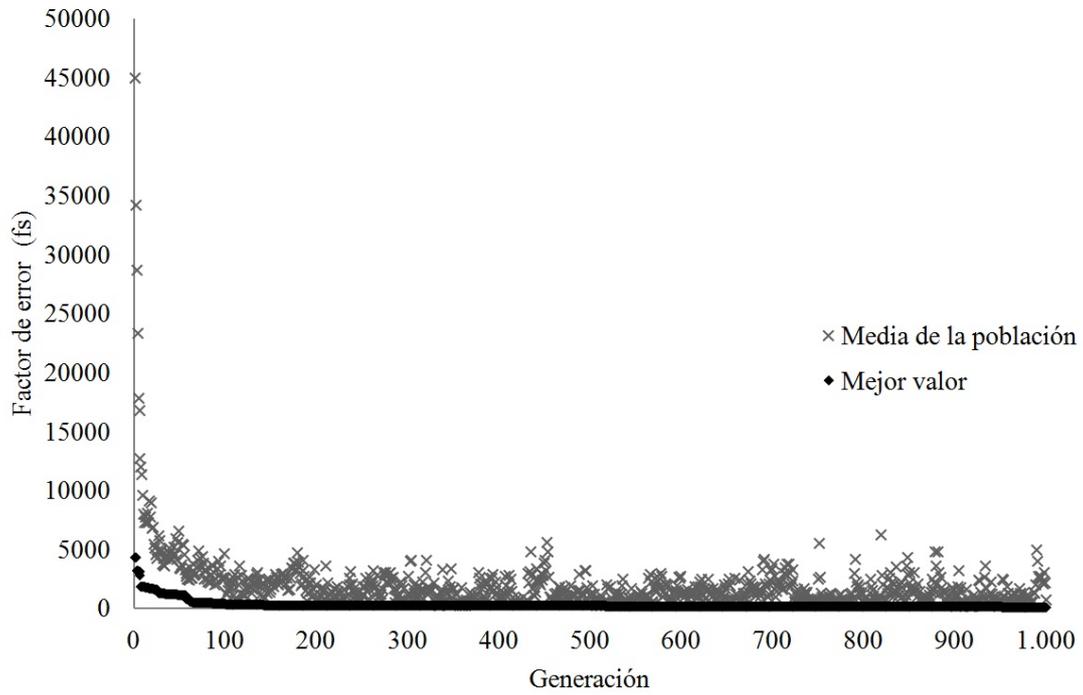


Figura 4: Evolución de la población para una probabilidad de mutación de 0,02.

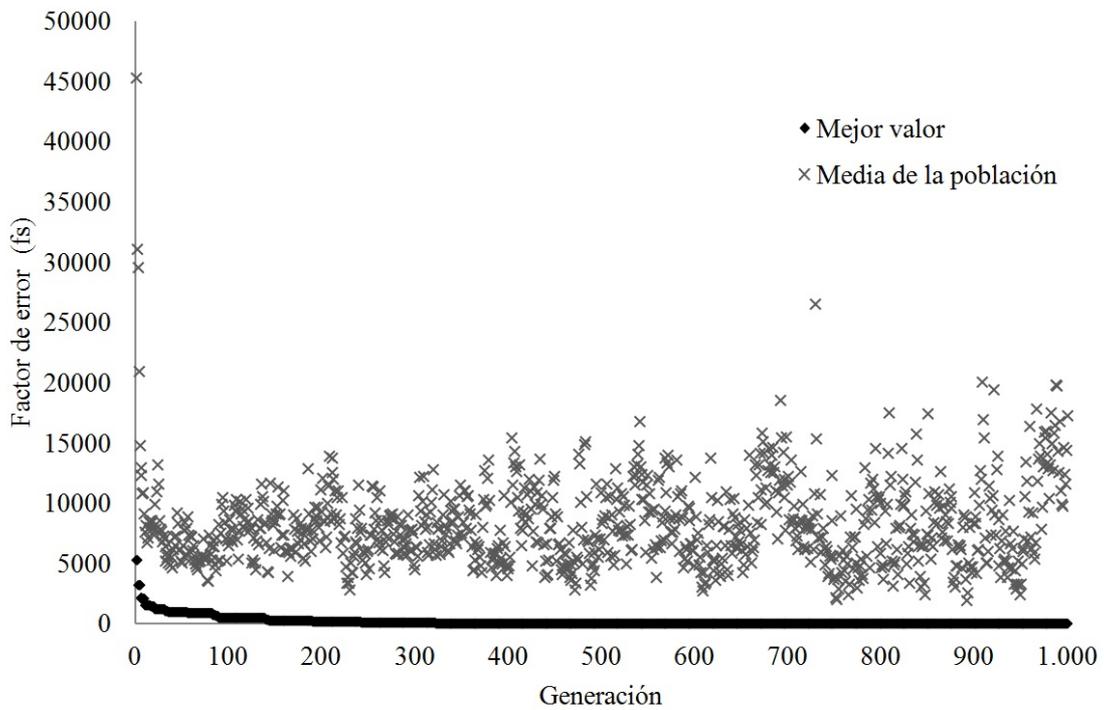


Figura 5: Evolución de la población para una probabilidad de mutación de 0,05.

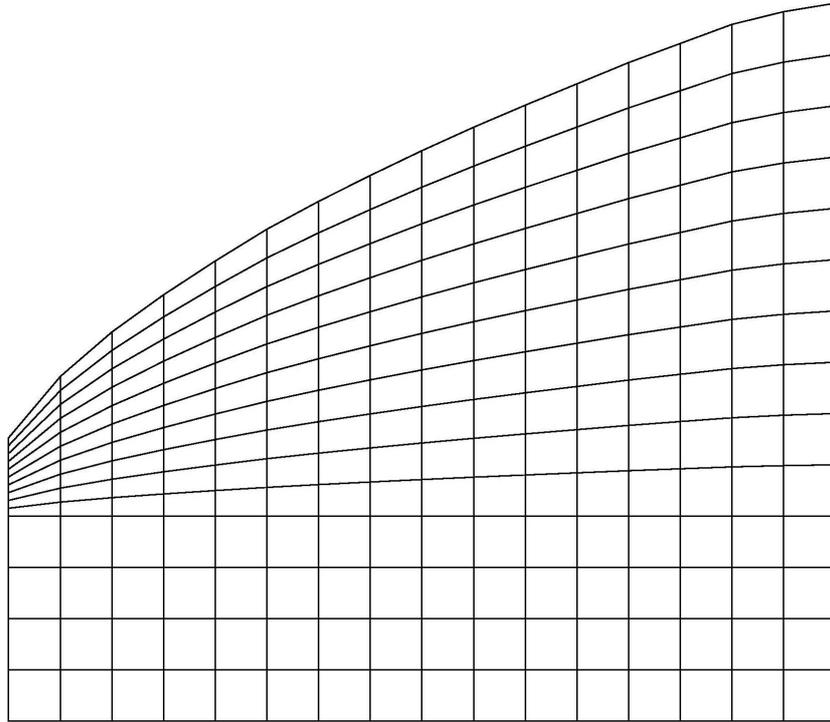


Figura 6: Malla de elementos finitos del mejor individuo de la población (1000 generaciones)

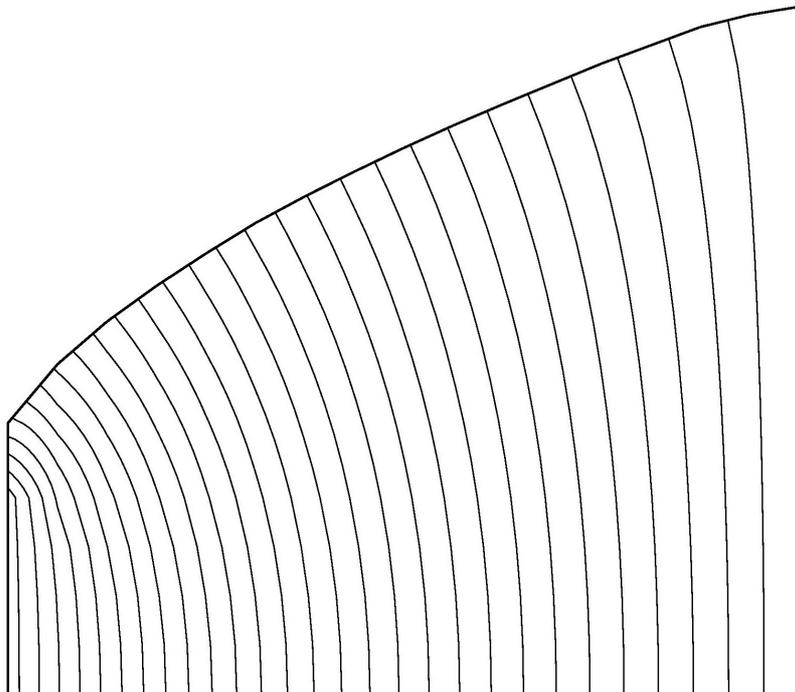


Figura 7: Líneas equipotenciales obtenidas con la malla de elementos finitos (1000 generaciones)

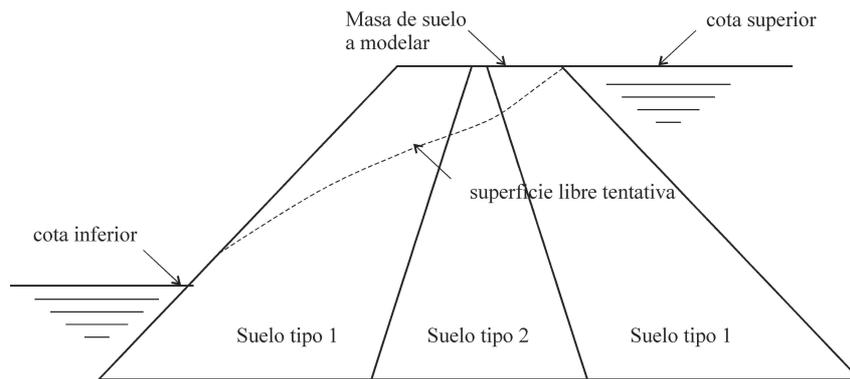


Figura 8: Esquema general de filtración en presas de tierra

elemental (Tabla 2).

```

BEGIN Inicialización de variables
Generación de la población inicial
FOR Bucle sobre generaciones
  Evalúa la función objetivo
  Guardar Élite
  Selección
  IF Generación impar
    Cruzamiento Intercalado
  ELSE
    Cruzamiento Single Point
  END IF
  Mutación
  Nueva Población = Pob.Cruzada + Élite
END FOR
END

```

Tabla 2: Pseudocódigo elemental del AG implementado

Finalmente se compararon resultados obtenidos con ejemplos existentes en la Bibliografía, obteniendo una importante mejora, tanto en resultados como en posibilidad de modelar ejemplos más complejos.

REFERENCIAS

- Bathe K.J. y Khoshgoftaar M.R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *International Journal for numerical method in Geomechanics*, 3:13–22, 1979.
- Belegundu A. y Chandrupatla T. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Prentice Hall, 1999.
- Beneyto P., Di Rado H., Mroginski J., y Awruch A. A model for the analysis of consolidation in unsaturated soils based in state combinations (in spanish). *Mecánica Computacional*, 24:515–527, 2005.
- Kahatadeniya K., Nanakorn P., y Neaupane K. Determination of the critical failure surface for slope stability analysis using ant colony optimization. 108:133–141, 2009.

- Li G.G. y Desai C.S. Stress and seepage analysis of earth dams. *Journal of Geotechnical Engineering Div. (ASCE)*, 109:946–960, 1983.
- Maslia M.L. *Numerical modeling analysis of saturated-unsaturated fluid flow through porous media*. M. sc. thesis, Georgia Inst. of Technology, 1980.
- Mroginski J., Gutierrez G., Beneyto P., y Di Rado H.A. Optimización topológica de sistemas estructurales bidimensionales discretos mediante algoritmos genéticos. *Mecánica Computacional*, páginas 2657–2674, 2009.
- Smith I.M. y Griffiths D.V. *Programing the Finite Element Method*. John Wiley & Sons, 2004.
- Zhang Y., Sakamoto M., y Furutani H. Effects of population size and mutation rate on results of genetic algorithm. En *Proceedings - 4th International Conference on Natural Computation, ICNC*, páginas 70–75. 2008.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method*, volumen I. McGraw Hill, 1989.
- Zolfaghari A., Heath A., y McCombie P. Simple genetic algorithm search for critical non circular failure surface in slope stability analysis. *Computers and Geotechnics*, 32:139,152, 2005.