

## APLICACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE FLUJO SUBTERRÁNEO EQUIVALENTE PARA MEDIOS HETEROGÉNEOS

Andrea A. Gómez<sup>a,b</sup>, Pablo A. Cello<sup>a</sup>, Leticia B. Rodríguez<sup>a</sup>, Jesús Carrera<sup>c</sup>, Luis Vives<sup>d</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Estudios Hidroambientales, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, CC 217, 3000. Santa Fe, Argentina. Email: [aagomez@fich1.unl.edu.ar](mailto:aagomez@fich1.unl.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.*

<sup>c</sup>*Instituto de Diagnóstico Ambiental y Estudios del Agua, Consejo Superior de Investigaciones Científicas (IDAEA-CSIC), España.*

<sup>d</sup>*Instituto de Hidrología de Llanuras "Dr. Eduardo Usunoff", Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Azul, Buenos Aires, Argentina.*

**Palabras claves:** heterogeneidad, drenaje diferido, transferencia de masa a tasa múltiple.

**Resumen.** Las ecuaciones clásicas de flujo y transporte en medios porosos saturados asumen equilibrio local en un volumen elemental de análisis. Sin embargo, a menudo se observa un fenómeno de no equilibrio que se manifiesta como un drenaje diferido o una transferencia de masa retrasada desde zonas menos conductivas a zonas más transmisivas del medio poroso/fracturado. En este trabajo se evaluó numéricamente la aplicabilidad de un modelo matemático de flujo equivalente en medios saturados, que presenta una formulación de no equilibrio mediante un término adicional de transferencia de masa a tasa múltiple (Multiple Rate Mass Transfer, MRMT). Como hipótesis de trabajo se asumió que el efecto del drenaje diferido en la respuesta de un acuífero bajo estrés se debe solamente a la influencia de la heterogeneidad del campo de transmisividades. La metodología consistió en la generación de campos heterogéneos de transmisividad a partir de modelos geoestadísticos estacionarios y no estacionarios utilizando simulación secuencial bajo el entorno de la librería geoestadística GSLib. En los campos de transmisividad obtenidos se llevó adelante la simulación numérica de ensayos de bombeo resolviendo la ecuación de flujo clásica en régimen transitorio mediante el modelo en diferencias finitas MODFLOW 2000. Los descensos resultantes de los ensayos fueron considerados la respuesta "observada" para cada modelo geoestadístico representando la heterogeneidad espacial. Seguidamente, se resolvió la ecuación de flujo radial equivalente mediante un código escrito en Fortran 90 donde el término de transferencia de masa considera una única zona inmóvil asociada a cada celda del dominio de cálculo. La transmisividad del medio móvil, la tasa de transferencia de masa de primer orden y el coeficiente de almacenamiento de la zona móvil/inmóvil fueron los parámetros de calibración a los fines de capturar el no equilibrio "observado". Ajustes preliminares del modelo equivalente demuestran que la formulación de no equilibrio podría constituir una buena alternativa para representar el drenaje diferido asociado a la heterogeneidad espacial.

## 1 INTRODUCCION

La implementación de modelos numéricos para resolver problemas de flujo subterráneo no sólo permite comprender el funcionamiento de sistemas reales sino que también ayuda a predecir los cambios que éstos pueden experimentar ante diferentes escenarios hidrológicos o ante la implementación de diferentes decisiones de manejo del recurso. Su utilización se ha convertido hoy en una práctica común para analizar diversos problemas en una gran variedad de ambientes y escenarios naturales.

A partir de la aplicación de modelos a casos reales surge una enorme gama de desafíos asociados a la conceptualización de sistemas de alta complejidad, a la representación matemática de los procesos físicos involucrados, a la estimación de los parámetros representativos, y a la escala espacial y temporal de trabajo, entre otros.

Uno de los principales inconvenientes de la modelación es la selección de los valores de los parámetros asociados al fenómeno modelado y la caracterización de su variabilidad espacial (y temporal si se aplica), acorde a la escala de modelación. En la mayoría de los casos estos parámetros son obtenidos en forma indirecta a través de la realización de ensayos de campo cuyas observaciones son interpretadas luego mediante el ajuste con modelos teóricos que arrojan resultados puntuales.

Los ensayos hidráulicos en pozos son utilizados por los hidrogeólogos para estimar los parámetros característicos del movimiento del agua, es decir transmisividad hidráulica (T) y coeficiente de almacenamiento (S). En dichos ensayos los descensos de niveles debidos al bombeo se interpretan ajustando un modelo de flujo teórico, con el cual se obtienen las propiedades hidráulicas del acuífero que son luego utilizadas en el análisis y el manejo posterior del recurso subterráneo. La interpretación de los resultados se realiza más comúnmente mediante el modelo de Theis (1935), o la aproximación lineal de Cooper-Jacob (Cooper y Jacob, 1946), que asume flujo radial, medio confinado, homogéneo e isotrópico, estrato horizontal, pozos totalmente penetrantes y dominio infinito. Sin embargo las hipótesis sobre las que se basa la solución de Theis rara vez se satisfacen en la práctica. La presencia de acuitardos en contacto con el acuífero tanto en su base como en su techo; la interferencia de conos de abatimiento; la presencia de bordes hidrogeológicos tales como ríos/lagos y bordes impermeables, entre otros, producen una respuesta en los ensayos que difiere del comportamiento teórico de Theis.

Las ecuaciones clásicas de flujo y transporte en medios porosos saturados que resuelven estos modelos asumen equilibrio local en un volumen elemental de análisis. Sin embargo, a menudo se observa un fenómeno de no equilibrio que se manifiesta como un drenaje diferido o una transferencia de masa retrasada desde zonas menos conductivas a zonas más transmisivas del medio poroso/fracturado.

En este trabajo se evaluó numéricamente la aplicabilidad de un modelo matemático de flujo equivalente en medios saturados, que presenta una formulación de no equilibrio mediante un término adicional de transferencia de masa a tasa múltiple (Multiple Rate Mass Transfer, MRMT) que permite capturar el efecto del drenaje diferido.

## 2 HIPOTESIS Y OBJETIVO

Todo el análisis supone que la respuesta observada del flujo mostrando un drenaje diferido en respuesta al bombeo se debe sólo a la influencia de un tipo particular de la heterogeneidad del medio que posee correlación espacial a lo largo de un amplio espectro de escalas espaciales.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional <http://www.amcaonline.org.ar>

Sobre esta hipótesis se plantea modificar la ecuación clásica de flujo en medios porosos saturados (Freeze y Cherry, 1979), adoptando una formulación no local en el tiempo del tipo

de transferencia de masa a tasa múltiple (MRMT), de aquí en adelante denominada en forma simplificada como función de memoria (FM), y analizar su aplicabilidad en casos prácticos para capturar los efectos del drenaje diferido. La ecuación resultante es una ecuación de flujo equivalente en el sentido que el término adicional de transferencia de primer orden “equivale” al efecto que la heterogeneidad produciría en el comportamiento del flujo subterráneo a diferentes escalas, que se manifestaría como un drenaje diferido.

### 3 METODOLOGIA

La metodología consistió en la generación de campos heterogéneos de transmisividad a partir de modelos geoestadísticos estacionarios y no estacionarios utilizando simulación secuencial bajo el entorno de la librería geoestadística GSLib.

En los campos de transmisividad obtenidos se llevó adelante la simulación numérica de ensayos de bombeo resolviendo la ecuación de flujo clásica en régimen transitorio mediante el modelo en diferencias finitas MODFLOW 2000 (Harbaugh et al., 2000). Los descensos resultantes de los ensayos fueron considerados la respuesta “observada” para cada modelo geoestadístico representando la heterogeneidad espacial. Seguidamente, se resolvió la ecuación de flujo radial equivalente mediante un código escrito en Fortran 90 donde el término de transferencia de masa o Función de Memoria considera una única zona inmóvil asociada a cada celda del dominio de cálculo.

La transmisividad del medio móvil, la tasa de transferencia de masa de primer orden y el coeficiente de almacenamiento de la zona móvil/inmóvil fueron los parámetros de calibración a los fines de capturar el no equilibrio “observado”.

#### 3.1 Generación de campos heterogéneos

Para generar los campos se utilizó el algoritmo de Simulación Secuencial Gaussiana SGSIM de la librería GSLib (Deutsch y Journel, 1992) bajo la interface SGeMS. Este algoritmo asume que la variable simulada  $Z(x)$  se distribuye como una variable normal estandarizada en el espacio, por lo que los datos utilizados para condicionar la simulación deben ser transformados a una distribución normal estandarizada. El algoritmo define un camino aleatorio para visitar cada nodo de simulación por única vez donde se construye una función de distribución acumulada (fda) multigaussiana de la variable condicionada  $Z(x)$  para un nivel creciente de información correspondiente a los datos condicionantes más los simulados en nodos visitados previamente (Deutsch y Journel, 1992). La estimación de los parámetros de la distribución multigaussiana en cada nodo es llevada a cabo mediante Krigeado Simple (KS), con el semivariograma estandarizado representando la continuidad espacial de  $Z(x)$ . El krigeado simple lleva adelante la estimación mediante regresión lineal en cada punto del dominio y optimiza dicha estimación por el método de mínimos cuadrados, es decir, minimiza la varianza del error  $\sigma_e^2$  bajo la condición de estimador insesgado (Samper y Carrera, 1990).

En síntesis, la Simulación Secuencial Gaussiana (SSG) se lleva a cabo mediante los siguientes pasos:

- Se define un camino aleatorio para visitar cada nodo de la grilla del dominio de cálculo sólo una vez.
- En cada nodo se determinan los parámetros (media y varianza) de la fda Gaussiana usando KS con el modelo de semivariograma ajustado a los datos condicionantes.
- Se simula el valor de  $Z(x)$  correspondiente al nodo de la grilla donde se está situado y se añade al conjunto de datos condicionantes.
- Se avanza hacia el siguiente nodo a través del camino aleatorio y se repiten los dos

pasos anteriores hasta que todos los nodos de la grilla han sido simulados.

El proceso se repite por  $n$  realizaciones de la variable regionalizada  $Z(x)$ , sin embargo en este trabajo se utilizó solo una de dichas realizaciones ya que lo que interesa es analizar su comportamiento en cuanto a la aparición o no de un drenaje diferido y no el comportamiento del drenaje en el ensamble de las realizaciones.

De acuerdo con Meier et al. (1998); Walker et al. (2006); entre otros autores, se asume que el logaritmo natural de la transmisividad hidráulica,  $Y(x) = \ln T(x)$ , es una variable aleatoria que presenta una distribución normal caracterizada por una media  $Y_m$  y una varianza  $\sigma_y^2$ . Luego de la generación del campo heterogéneo mediante SSG, se lleva a cabo la transformación inversa de la variable estandarizada  $Z(x)$  a la variable no estandarizada  $Y(x)$  mediante la ecuación:

$$Y(x) = Z(x)\sigma_y + Y_m, \text{ para } Y_m = \ln T_g \quad (1)$$

donde  $Y_m$  es la media de la variable transformada;  $T_g$  es la media geométrica representativa del campo de transmisividades ensayado, y  $\sigma_y$  es la desviación estándar del  $\ln T(x)$ .

Por último, se lleva a cabo la transformada de esta última a la variable original  $T(x)$ :

$$T(x) = e^{Y(x)} \quad (2)$$

El primer tipo de campos generados fue el Gaussiano Multivariado (GMV) que es el modelo paramétrico más ampliamente utilizado. El mismo fue implementado con un semivariograma exponencial de la forma:

$$\gamma(h) = \left(1 - e^{-\left(3h/a\right)}\right) \quad (3)$$

donde  $h$  es la distancia, y “ $a$ ” es el rango o la distancia a partir de la cual la correlación entre dos puntos es nula, o sea que los valores de la variable son independientes entre sí. El valor del variograma para  $h > a$  es igual a la varianza.

El segundo tipo de campos ensayados fue el obtenido a partir del Modelo de Movimiento Fraccional Browniano, que es un modelo geostadístico no estacionario (la distribución de probabilidad y la covarianza dependen de la localización o traslación). Se caracteriza por representar al medio heterogéneo con una correlación “infinita” a lo largo de varias escalas de la heterogeneidad espacial. El proceso fraccional browniano representa la correlación espacial a través de un semivariograma de potencia, conocido como Semivariograma Universal (Neuman, 1995) expresado de la forma:

$$\gamma(h) = C_0 h^{2H} \quad (4)$$

donde  $C_0$  es un factor de escala y  $H$  es el coeficiente de Hurst. Este tipo de semivariograma confiere características fractales (similaridad de la estructura de la variabilidad espacial a lo largo de varias escalas desde un punto de vista geostadístico). Dada su condición de no estacionariedad, no posee varianza y media definidas. La varianza crecerá con la distancia acorde con el semivariograma potencial (que no es acotado) a una tasa que dependerá del coeficiente de Hurst y en una magnitud que dependerá del coeficiente  $C_0$ .

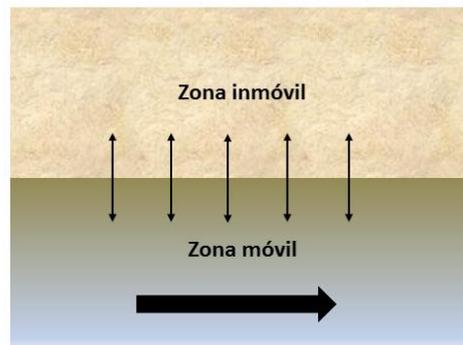
En este trabajo, la metodología para generarlo es similar a la aplicada por Meier et al. (1998) y Walker et al. (2006), donde el campo de  $Z(x)$  es simulado mediante un proceso Fraccional Browniano utilizando una versión modificada del SGSIM (GSLIB, Deutsch y

Journal, 1992), es decir un algoritmo de Simulación Secuencial a la que se le impone un semivariograma de potencia igual a la expresión (4).

### 3.2 Modelo conceptual y matemático.

Existe una amplia gama de trabajos que representan la condición de no equilibrio basándose en aproximaciones no locales en el tiempo, esto es que la movilización o transferencia de agua almacenada en el acuífero no depende solamente de los niveles actuales, sino también de la variación de los niveles en tiempos precedentes. En la práctica estas formulaciones involucran la adición de un término fuente-sumidero (Carrera et al., 1998) o un término de almacenamiento adicional (Haggerty y Gorelik, 1995) a la ecuación clásica de flujo de agua subterránea.

Generalmente estos términos de almacenamiento simulan un proceso de transferencia de masa en donde el sistema acuífero se representa conceptualmente por un conjunto de regiones móviles e inmóviles acopladas que intercambian masa (solutos y solventes) entre sí, como se esquematiza en la Figura 1. La zona móvil tiene alta capacidad de conducir agua mientras que la zona inmóvil solo tiene capacidad para transmitir el agua en ella almacenada. Para simular este intercambio, por lo general se utilizan aproximaciones de primer orden respecto de la variable de estado, esto es niveles o concentraciones, ya sea que se trate de ecuaciones de flujo o transporte, respectivamente.



**Figura 1.** Conceptualización de dos medios continuos acoplados  
(Modificado de Carrera et al., 1998)

Siguiendo la formulación de Silva et al. (2009), se plantea un modelo matemático para simular el flujo de agua subterránea afectado por el drenaje diferido que pudiera ocasionar la heterogeneidad del medio poroso, reemplazando el medio continuo convencional por una región continua móvil y una inmóvil que intercambian masa linealmente entre sí. Para ello se incorporan funciones de transferencia de masa lineales (FM) a la ecuación clásica de flujo subterráneo.

A partir de la clásica ecuación que modela el flujo en medios porosos saturados (Freeze y Cherry, 1979):

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + W' \quad (5)$$

donde  $S$  [adim.] es el coeficiente de almacenamiento,  $h$  [L] es el nivel piezométrico,  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \nabla h$  [ $L^2 t^{-1}$ ] es el flujo estimado mediante la Ley de Darcy, con  $\mathbf{T}$  [ $L^2 t^{-1}$ ] la transmisividad hidráulica, y  $W'$  [ $L t^{-1}$ ] es el término fuente/sumidero distribuido superficialmente (recarga/extracción).

Si se considera que el medio poroso se compone de zonas móviles e inmóviles entre las

cuales existe transferencia de masa, la ecuación de flujo puede modificarse de manera de simular tal transferencia mediante un término adicional de almacenamiento de la forma:

$$S_m \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^N S_{im,j} \frac{\partial h_{im,j}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + W' \quad (6)$$

donde el sufijo  $m$  se refiere a la zona móvil, y el sufijo  $im$  a las zonas inmóviles,  $N$  es el número de zonas inmóviles,  $S_{im,j}$  es el coeficiente de almacenamiento para la  $j$ -ésima zona inmóvil y  $h_{im,j}$  es el nivel piezométrico de la  $j$ -ésima zona inmóvil. De ahora en adelante el coeficiente de almacenamiento  $S$  de la zona móvil se denota como  $S_m$ , por coherencia de notación con la conceptualización elegida. Se aclara que se usa indistintamente  $h$  para el nivel piezométrico en la ecuación clásica y para el nivel en la zona móvil en la ecuación equivalente.

La variación del almacenamiento en cada zona inmóvil puede modelarse en forma matemáticamente análoga al término comúnmente utilizado para simular el flujo de interacción entre un río y el acuífero adyacente (Prudic, 1989), en este caso proporcional a la diferencia de nivel piezométrico entre la zona móvil e inmóvil y suponiendo que, al igual que  $h_m$ ,  $h_{im}$  es no local en el tiempo. Entonces resulta:

$$\frac{\partial h_{im,j}}{\partial t} = \alpha_j (h - h_{im,j}) \quad (7)$$

donde  $\alpha_j [t^{-1}]$  es un coeficiente de transferencia de masa de primer orden. Reemplazando en la ecuación (2.5) resulta el modelo:

$$S_m \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^N S_{im,j} \alpha_j (h - h_{im,j}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + W' \quad (8)$$

O su forma equivalente:

$$S_m \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^N F_j = -\nabla \cdot \mathbf{q} + W' \quad (9)$$

Siendo  $F = \sum_{j=1}^N F_j$  el flujo total de intercambio entre las regiones móviles e inmóviles.

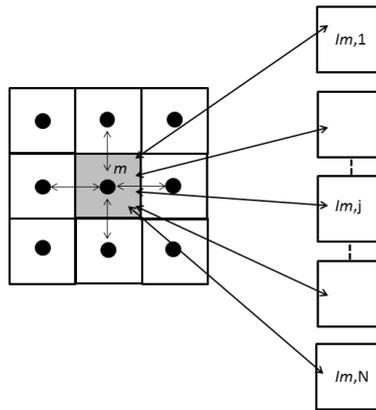
En la ecuación de flujo modificada (8), o su versión simplificada (9), los parámetros  $S_{im,j}$  y  $\alpha_j$  deben calibrarse ajustando los resultados numéricos a modelos teóricos o a datos observados. Existen en la bibliografía algunos métodos para construir la función de transferencia e inferir sus parámetros. La mayoría de ellos se aplica al transporte de contaminantes, donde los coeficientes son estimados a partir de la curva de llegada de soluto (breakthrough curves) tal como lo descrito en la aplicación de Willmann et al. (2008), pero son escasos los antecedentes en problemas de flujo.

Gómez (2012) validó analíticamente la ecuación equivalente bidimensional comparándola con el modelo de Boulton (1955) que es un modelo analítico de flujo radial bajo la influencia de drenaje diferido donde el acuífero es artesiano, con lentes impermeables rodeadas de un medio más permeable, las que inducen un drenaje diferido cuando el acuífero es bombeado. El fenómeno de drenaje diferido es expresado en la solución analítica a partir de una formulación integrodiferencial equivalente a  $N=1$ . Utilizando una equivalencia entre los parámetros de la función de memoria con los parámetros del modelo de Boulton, Gómez (2012) obtuvo un ajuste notable entre la solución numérica y la solución analítica. Ambas soluciones se comportan similares a la respuesta teórica de Theis a tiempos pequeños, indicando una entrega instantánea del almacenamiento. A tiempos intermedios se puede

identificar el período donde el drenaje diferido es evidente, explicado por el hecho de que ciertas porciones del acuífero comienzan a aportar masa desacelerando el incremento de los descensos en el tiempo. A tiempos largos el sistema llega a una nueva situación de equilibrio de entrega instantánea de almacenamiento, que también podría interpretarse mediante la solución de Theis para una situación asintótica pero con un almacenamiento mayor al utilizado en tiempos pequeños, y que se denomina  $S_{TOTAL} = S_m + S_{im}$ .

### 3.3 Discretización numérica

En forma genérica la grilla hipotética se puede representar esquemáticamente como se muestra en la Figura 2, donde a cada celda  $m$  de la zona móvil pueden aportar  $N$  zonas inmóviles, además de los nodos adyacentes de la zona móvil. Geométricamente cada nodo  $im,j$  se superpone con el nodo  $m$ .



**Figura 2.** Conceptualización de celdas móviles/inmóviles (extraído de Silva et al., 2009).

A partir de la ecuación de gobierno en dos dimensiones, y considerando, en este primer análisis, que el número de zonas inmóviles por cada zona móvil es igual a uno, es decir,  $j=1$ :

$$S_m \frac{\partial h}{\partial t} + S_{im} \frac{\partial h_{im}}{\partial t} = T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + W' \quad (10)$$

Silva et al. (2009) proponen la siguiente expresión para la variable  $h_{im}$ , que para el paso de tiempo  $k+1$  se resuelve explícitamente como una función de  $h_{im}$  y  $h$ , una vez que la variable de estado del sistema móvil ha sido calculada.

$$h_{im}^{k+1} = h_{im}^k e^{-\alpha \Delta t} + h^k (1 - e^{-\alpha \Delta t}) + \frac{h^{k+1} - h^k}{\Delta t} \left[ \Delta t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \right] \quad (11)$$

donde  $\alpha$  es la tasa de transferencia cuando se considera una única zona inmóvil por cada zona móvil y  $k$  es el índice del paso de tiempo. A partir de la ecuación (11) es posible deducir la siguiente expresión para el flujo total entre la zona móvil y la inmóvil para cada nodo de la grilla:

$$F^{k+1} = S_{im} \alpha (\tilde{h}^k - \tilde{h}_{im}^k) e^{-\alpha \Delta t} + S_{im} \frac{\Delta h}{\Delta t} (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \quad (12)$$

donde  $\Delta h = \tilde{h}^{k+1} - \tilde{h}^k$  y  $\tilde{h}^k = h^k$ . El tildado significa que la variable es aproximada mediante la solución numérica.

La forma discretizada en 2D de la ecuación (10), para un esquema implícito, resulta:

$$\frac{(\tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \tilde{h}_{i,j}^k)}{\Delta t} + \frac{S_{im}\alpha}{S_m} e^{-\alpha\Delta t} (\tilde{h}_{i,j}^k - \tilde{h}_{im,j}^k) + \left( \frac{(\tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \tilde{h}_{i,j}^k)}{\Delta t} \right) \frac{S_{im}}{S_m} (1 - e^{-\alpha\Delta t}) = D_x L_{xx} + D_y L_{yy} - \frac{W'}{S_m} \quad (13)$$

donde  $(i,j)$  son los subíndices de cada nodo de la grilla,  $D_x = \frac{T_x}{S_m}$ ,  $D_y = \frac{T_y}{S_m}$ ,  
 $L_{xx} \approx \frac{\tilde{h}_{i-1,j} - 2\tilde{h}_{i,j} + \tilde{h}_{i+1,j}}{\Delta x^2}$  y  $L_{yy} \approx \frac{\tilde{h}_{i,j-1} - 2\tilde{h}_{i,j} + \tilde{h}_{i,j+1}}{\Delta y^2}$ .

Reordenando términos queda:

$$\begin{aligned} & \tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \tilde{h}_{i,j}^k + \Delta t \frac{S_{im}}{S_m} \alpha \tilde{h}_{i,j}^k e^{-\alpha\Delta t} + \Delta t \frac{S_{im}}{S_m} \alpha \tilde{h}_{im,j}^k e^{-\alpha\Delta t} + \tilde{h}_{i,j}^{k+1} \frac{S_{im}}{S_m} (1 - e^{-\alpha\Delta t}) \\ & - \tilde{h}_{i,j}^k \frac{S_{im}}{S_m} (1 - e^{-\alpha\Delta t}) - \mathcal{D}_x \tilde{h}_{i-1,j}^{k+1} + 2\mathcal{D}_x \tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \mathcal{D}_x \tilde{h}_{i+1,j}^{k+1} - \mathcal{D}_y \tilde{h}_{i,j-1}^{k+1} \\ & + 2\mathcal{D}_y \tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \mathcal{D}_y \tilde{h}_{i,j+1}^{k+1} - W'_{i,j} \frac{\Delta t}{S_m} \end{aligned} \quad (14)$$

Con  $\mathcal{D}_x = D_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  y  $\mathcal{D}_y = D_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ .

Utilizando los parámetros,  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{F}$ , definidos como:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta t S_{im} \alpha}{S} e^{-\alpha\Delta t} \quad (15)$$

$$\mathcal{F} = \frac{S_{im}}{S_m} (1 - e^{-\alpha\Delta t}) \quad (16)$$

La ecuación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\mathcal{D}_x}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{i-1,j}^{k+1} + \left[ \frac{(1 + \mathcal{F} + 2\mathcal{D}_x + 2\mathcal{D}_y)}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{i,j}^{k+1} - \left[ \frac{\mathcal{D}_x}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{i+1,j}^{k+1} \\ & - \left[ \frac{\mathcal{D}_y}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{i,j-1}^{k+1} - \left[ \frac{\mathcal{D}_y}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{i,j+1}^{k+1} \\ & = \tilde{h}_{i,j}^k + \left[ \frac{\mathcal{E}}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \right] \tilde{h}_{im,j}^k - \frac{W'_{i,j} \Delta t}{S_m (1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \end{aligned} \quad (17)$$

Y por último, definiendo los parámetros:

$$\mathcal{P} = \frac{1 + \mathcal{F} + 2\mathcal{D}_x + 2\mathcal{D}_y}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \quad (18)$$

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{E}}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \quad (19)$$

$$\mathcal{G} = \frac{-\mathcal{D}_x}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \quad (20)$$

$$\mathcal{H} = \frac{-\mathcal{D}_y}{(1 - \mathcal{E} + \mathcal{F})} \quad (21)$$

$$\mathcal{G}\tilde{h}_{i-1,j}^{k+1} + \mathcal{P}\tilde{h}_{i,j}^{k+1} + \mathcal{G}\tilde{h}_{i+1,j}^{k+1} + \mathcal{H}\tilde{h}_{i,j-1}^{k+1} + \mathcal{H}\tilde{h}_{i,j+1}^{k+1} = \tilde{h}_{i,j}^k + \mathcal{U}\tilde{h}_{im,j}^k - \frac{W_{i,j}^k \Delta t}{S_m(1-\varepsilon+F)} \quad (22)$$

### 3.4 Simulaciones numéricas

Una vez generados los campos, sobre ellos se realizaron simulaciones de un ensayo de bombeo en un dominio de 503x503 celdas, de 1 m x 1 m de tamaño, en cuya celda central se ubica un pozo de bombeo que extrae agua a una tasa de  $2.28 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Las condiciones de borde fueron de nivel constante e igual a 0 m, lo mismo que la condición inicial para todo el dominio, por lo que los resultados fueron directamente los descensos en cada celda de cálculo.

La discretización temporal fue telescópica, donde el primer paso de tiempo  $\Delta t_1$  se calcula de la forma:

$$\Delta t_1 = t_{\text{sim}} \left[ \frac{\text{mult}-1}{\text{mult}^{\text{NT}-1}} \right] \quad (24)$$

donde  $t_{\text{sim}}$  es el tiempo de simulación, mult es un multiplicador para definir el tamaño de cada paso de tiempo sucesivo y NT es el número de pasos de tiempo. Con el fin de capturar adecuadamente el fenómeno simulado, y prevenir los efectos de borde, se realizaron pruebas preliminares con diferentes discretizaciones temporales. Como resultado, se estableció un tiempo total de simulación de 121000 s, NT=39 y mult= 1.3.

Las simulaciones se llevaron a cabo con MODFLOW (Harbaugh et al., 2000) bajo la interface GMS (GMS v.8, 2011), para visualizar la respuesta al bombeo.

Seguidamente, se resolvió la ecuación de flujo radial equivalente mediante un código escrito en Fortran 90 donde el término de FM fue para  $N = 1$ , donde N es el número de zonas inmóviles asociadas a cada celda del dominio de cálculo.

El sistema de ecuaciones resultante de la ecuación nodal (22) da lugar a una matriz pentadiagonal, motivo por el cual se recurrió a un resolutor disponible en la librería computacional de uso libre LAPACK (Linear Algebra PACKage), también escrita en lenguaje Fortran 90. LAPACK es un paquete computacional provisto por la Universidad de Tennessee, la Universidad de California de Berkeley, la Universidad de Colorado at Denver y NAG Ltd. bajo el financiamiento de National Science Foundation (NSF) y el Departamento de Energía de Estados Unidos (Anderson et al., 1999). La rutina utilizada en este caso fue la denominada DPBSV de la versión 3.4 de LAPACK.

El código 2D se compiló bajo el entorno Linux, que permitió agregar las librerías necesarias para su implementación. Las simulaciones se llevaron a cabo en una computadora de escritorio con un procesador AMD Phenom(tm) II X4 965 Processor de estructura de 64 bits. La memoria RAM de la PC es de 8GB, con una frecuencia de acceso de 1800MHz (0N6ns). El tiempo de simulación para cada uno de los ejemplos citados en este trabajo fue de aproximadamente 2 horas.

### 3.5 Aplicación de la formulación equivalente

La transmisividad del medio móvil, la tasa de transferencia de masa de primer orden y el coeficiente de almacenamiento de la zona móvil/inmóvil fueron los parámetros de calibración en la formulación o modelo equivalente a los fines de capturar el no equilibrio “observado”.

A los fines de reducir los grados de libertad del proceso de calibración, esto es, el número de parámetros a determinar, y contar con una estimación previa de los parámetros, se recurre al análisis del comportamiento asintótico de Cooper-Jacob (1946). Así, la transmisividad aparente de la zona móvil  $T_{ap}$  y el almacenamiento total  $S_{TOTAL}$  alcanzado en la situación de equilibrio final pueden obtenerse a partir de las ecuaciones

$$T_{ap} = \frac{2.3 Q}{4\pi\Delta h} \quad (25)$$

$$S_{TOTAL} = \frac{2.25 T t_0}{r^2} \quad (26)$$

donde  $r$  es la distancia del pozo de observación al pozo de bombeo,  $\Delta h$  es la variación del nivel en un ciclo logarítmico,  $t_0$  es el tiempo correspondiente al punto de intercepción de la asíntota con el eje de los tiempos, y las demás variables fueron definidas anteriormente. A partir de la asíntota correspondiente al caso homogéneo equivalente, podría obtenerse el coeficiente de almacenamiento de la zona móvil  $S_m$ .

Dado que, en la mayoría de los casos, los descensos observados en el sistema heterogéneo “real” son menores que los observados en el sistema homogéneo equivalente, el almacenamiento del sistema “real” es  $S_{TOTAL} = S_{im} + S_m$ , de allí se despeja el valor de  $S_{im}$ , conociendo  $S_m$ .

## 4 RESULTADOS

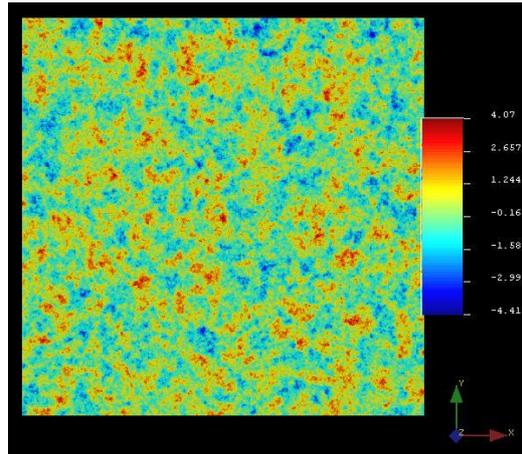
### 4.1 Campos Gaussianos Multivariados (GMV)

Se generó un campo GMV mediante SSG con sólo un punto condicionante en la localización del pozo de bombeo con el objetivo de obtener una zona de alta transmisividad en dicho punto y su entorno, el valor de  $Z$  en el mismo punto fue 3 y el rango utilizado para el semivariograma exponencial fue 20 m. El campo se muestra en la Figura 3.

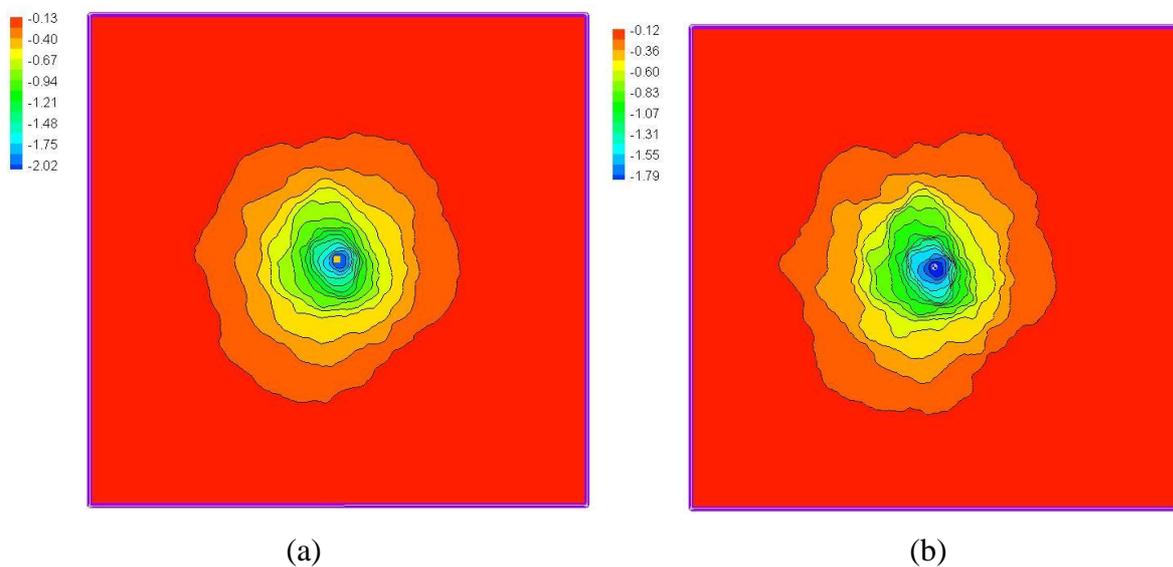
Al campo se le aplicó una transformada normal inversa mediante la ecuación (1). El valor de  $Y_m = \ln T(x)$  utilizado fue -9.965 que corresponde a una transmisividad media de  $4.7 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s y dos valores de varianza,  $\sigma^2 = 1$  para el caso GMVa y  $\sigma^2 = 2$  para el caso GMVb.

La Figura 4a muestra la configuración del cono de descensos en el último paso de tiempo simulado (121000 s) para el caso GMVa. La irregularidad de las líneas de igual descenso denotan el efecto de la heterogeneidad del medio; sin embargo, un cono con cierta asimetría respecto al caso ideal homogéneo no indicaría necesariamente que el flujo hacia el pozo de bombeo estaría afectado por un drenaje diferido inducido por la heterogeneidad.

La Figura 4b muestra la configuración del cono de descensos para el caso GMVb donde el incremento de la varianza del campo de transmisividades se evidencia en curvas piezométricas menos “suavizadas” respecto al caso anterior. En la figura se observan zonas de flujo preferencial dada la asimetría del cono de descensos pero ello no es suficiente a los fines de generar un efecto de drenaje diferido clásico entre zonas menos permeables y zonas más permeables.



**Figura 3.** Distribución de la variable normal  $Z(x)$  para el campo GMV.



**Figura 4.** Configuración del cono de descensos a  $t = 121000$  s para el caso a) GMVa y b) GMVb.

Para cada medio heterogéneo se calculó la transmisividad equivalente  $T_{eq}$  mediante una simulación de flujo regional en estado estacionario, estimando la  $T_{eq}$  a través de la ley de Darcy. Las curvas del medio homogéneo se obtuvieron utilizando un campo con dicha  $T_{eq}$  y aplicando el mismo ensayo de bombeo. La  $T_{eq}$  del campo GMVa resultó ser  $4.59217 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

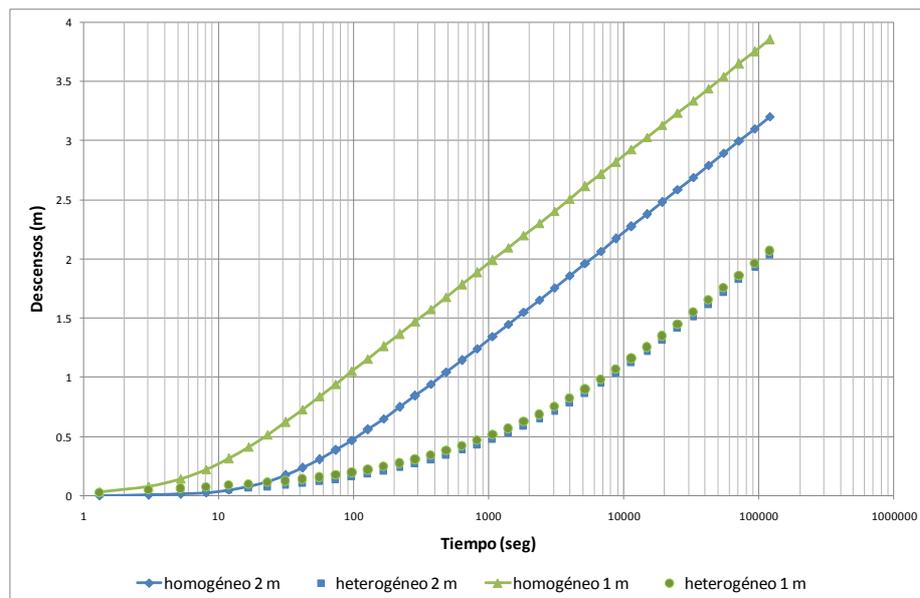
La diferencia resultante entre la  $T_{eq}$  y la  $T_g$  utilizada para la denormalización fue de 2.9%, y se halla en el rango observado por Meier et al. (1998) y Walker et al. (2006) para el caso de modelos estacionarios de varianza moderada.

La Figura 5 muestra los descensos obtenidos de la simulación del ensayo de bombeo mediante MODFLOW 2000 en dos pozos de observación ubicados a 1 m y 2 m del pozo de bombeo. La Figura incluye los resultados del ensayo realizado en el campo GMVa y en el campo homogéneo equivalente correspondiente. Los descensos en el medio heterogéneo están atenuados respecto a los obtenidos para el caso homogéneo equivalente. Efectivamente, a una distancia de 1 m del pozo de bombeo y para el último paso de tiempo, el descenso es aproximadamente la mitad de lo que se observa en el medio homogéneo equivalente. En el medio heterogéneo no se observan diferencias significativas para uno y otro radio, esto puede deberse a la ubicación particular de los pozos de observación, que pueden estar asociados a

una zona de similar transmisividad hidráulica resultante de la generación del campo y dada la cercanía al dato condicionante. De todas formas la evidencia de un drenaje diferido clásico como lo observado en Boulton (1955) no es tan clara. No obstante se evidencia un retraso en el tiempo de la respuesta al bombeo que podría estar vinculado a otro tipo particular de drenaje diferido.

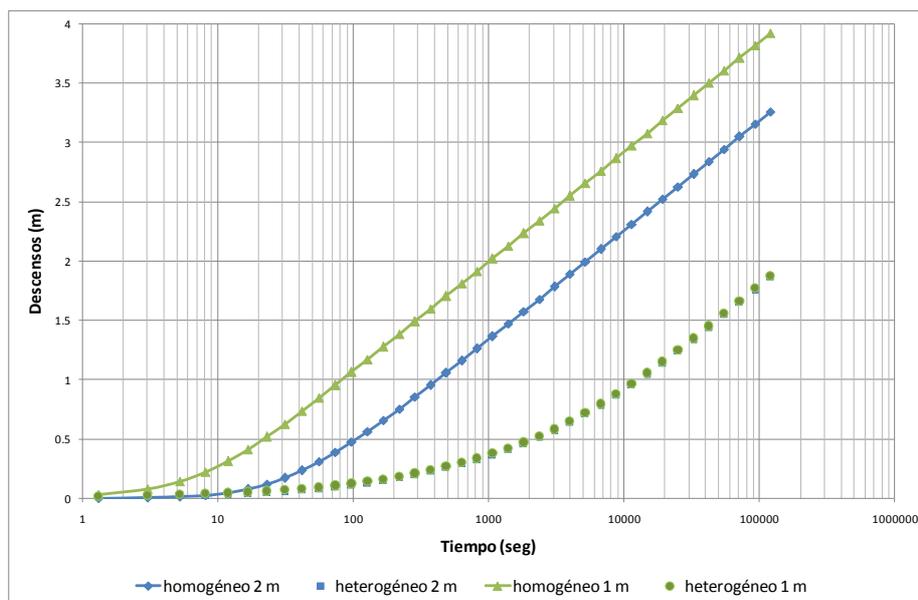
El campo GMVb se denormalizó con una varianza igual a 2, es decir que la meseta del variograma tiene un valor que duplica al valor de la meseta correspondiente al campo GMVa. Los resultados de sendos ensayos de bombeo se muestran en la Figura 6, tanto para el medio heterogéneo como para el homogéneo equivalente.

Las curvas son muy similares a las del campo GMVa, aunque los descensos al final de la simulación son menores (2.03 m para GMVa y 1.86 m para GMVb). En este caso ambas curvas, para un radio de 1 m y 2 m, se superponen aún más, contrariamente a lo esperado por poseer una mayor variabilidad espacial. Esto podría deberse a que se analizó una sola realización en particular, y se escogieron dos puntos de observación cercanos al pozo de bombeo con el dato condicionante. Para comprender mejor a qué se debería ese comportamiento, habría que analizar el promedio de un ensamble de realizaciones, y/o la observación de los descensos en un punto más alejado del pozo de bombeo, que no es el objetivo que se persigue en este trabajo.



**Figura 5.** Descensos en función del tiempo observados a 1 m y 2 m del pozo de extracción para el campo GMVa.

Ambos casos de modelos gaussianos multivariados ensayados no inducen un drenaje diferido clásico como el evidenciado por Boulton (1955), esto puede deberse a la estacionariedad propia que le confiere este tipo de modelos al campo simulado, donde la varianza se encuentra acotada. Otra característica particular que tiene este tipo de modelos es que la conexión se da entre los valores medios de la misma, quedando zonas con valores extremos mínimos o máximos desconectados. Dichos valores extremos son los que provocarían el drenaje diferido esperado en concordancia a lo establecido por Boulton (1955) para  $N=1$ . De los resultados obtenidos en modelos multigaussianos se infiere que el drenaje diferido estaría vinculado a la conectividad, no de valores medios, sino de valores altos de la transmisividad y al contraste entre los valores extremos. Esta situación motiva la aplicación de un modelo no estacionario como el abordado a continuación.



**Figura 6.** Descensos en función del tiempo observados a 1 m y 2 m del pozo de extracción para el campo GMVb.

#### 4.2 Campos de Movimiento Fraccional Browniano (MFB)

Se generaron 3 campos de MFB condicionados con 39 puntos que forzaron la existencia de una zona conductiva caracterizada por altos valores de  $T(x)$ . Los campos se escalonaron para un valor de  $\ln Tg = -11$ , que equivale a una transmisividad de  $1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

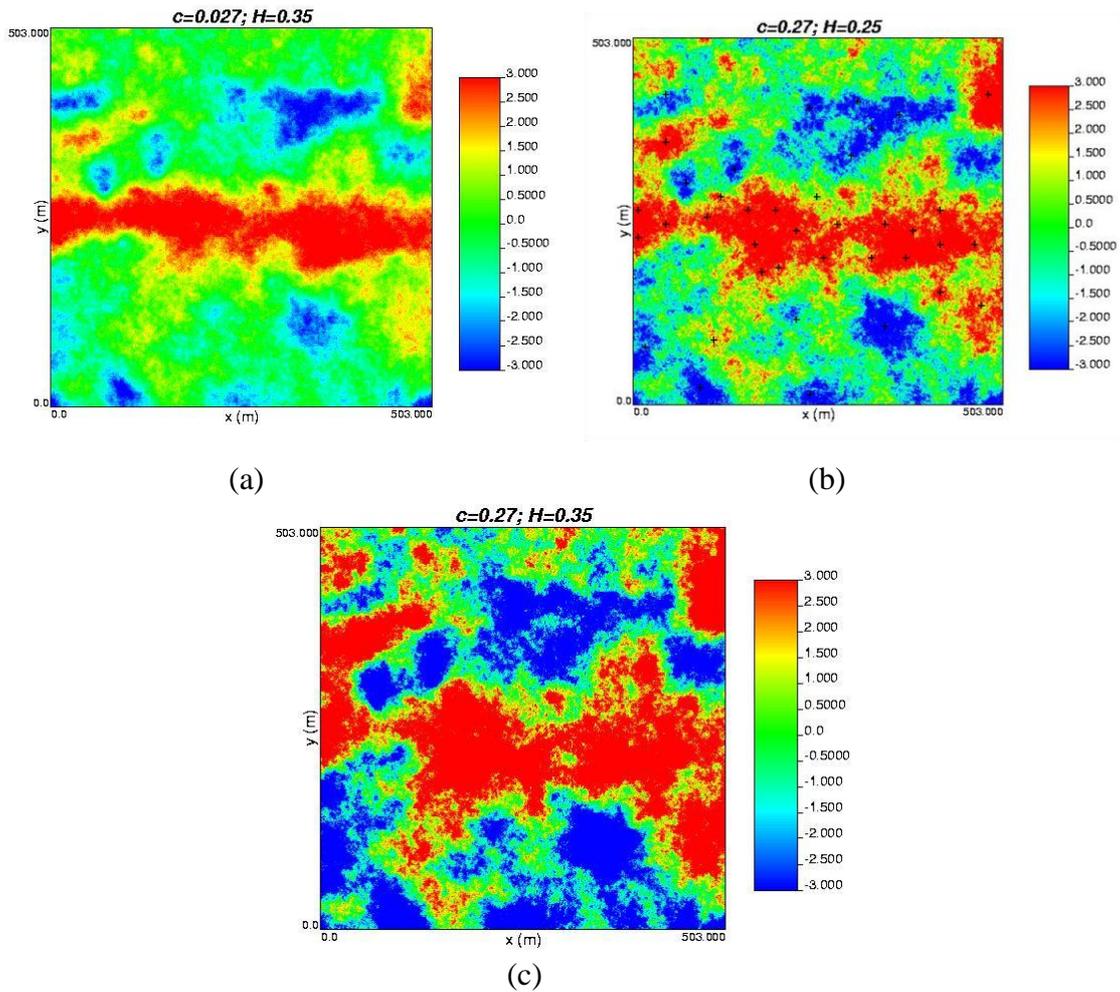
Los parámetros de la ley de potencias se obtuvieron de campos previamente generados por Walker et al. (2006) y corresponden a datos empíricos de una dolomita de Nueva México, EEUU. La Tabla 1 muestra los parámetros utilizados en cada uno de los modelos de semivariograma para los 3 casos.

Caso	$C_0$	H	Varianza Total
MFBA	0.027	0.35	2.09
MFBb	0.27	0.25	6.04
MFBc	0.27	0.35	20.92

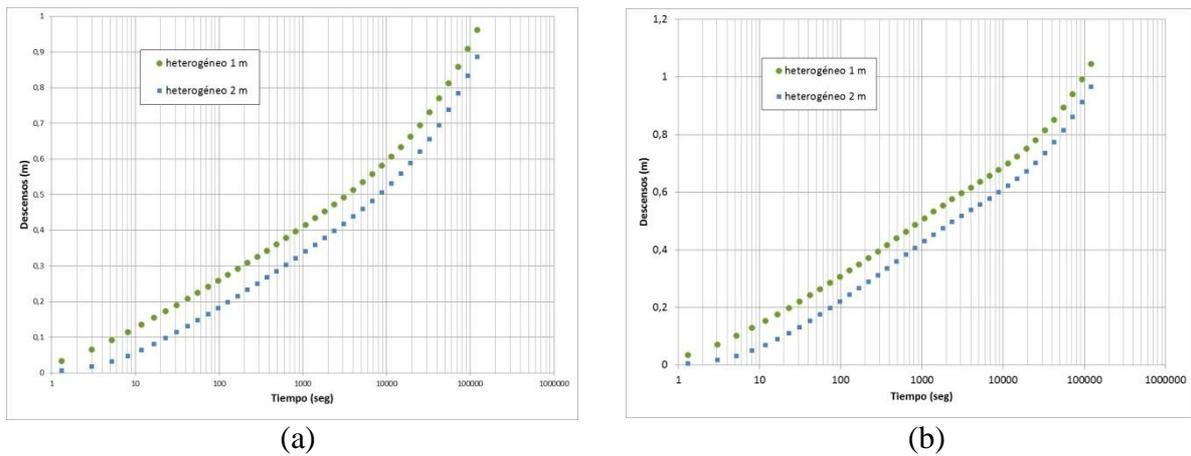
**Tabla 1.** Parámetros utilizados en el semivariograma potencial de los campos MFB.

El parámetro H indica la pendiente del semivariograma, o sea la tasa de incremento de la varianza y, por ende, de la transmisividad  $T(x)$ , en función del vector h. El caso pivote fue MFBc donde los parámetros del semivariograma fueron  $C_0 = 0.27$  y  $H = 0.35$ . El Caso MFBA consistió en reducir el coeficiente de Hurst, mientras que en el Caso MFBb se disminuyó el  $C_0$ . La varianza total fue mayor para el caso pivote disminuyendo para los casos MFBb y MFBA, entendiéndose como varianza total al valor del semivariograma a una distancia de 503 m que es la distancia máxima que trunca la ley de potencias utilizada. El campo MFBc presenta la mayor varianza total debido a la combinación de ambos parámetros,  $C_0$  y H.

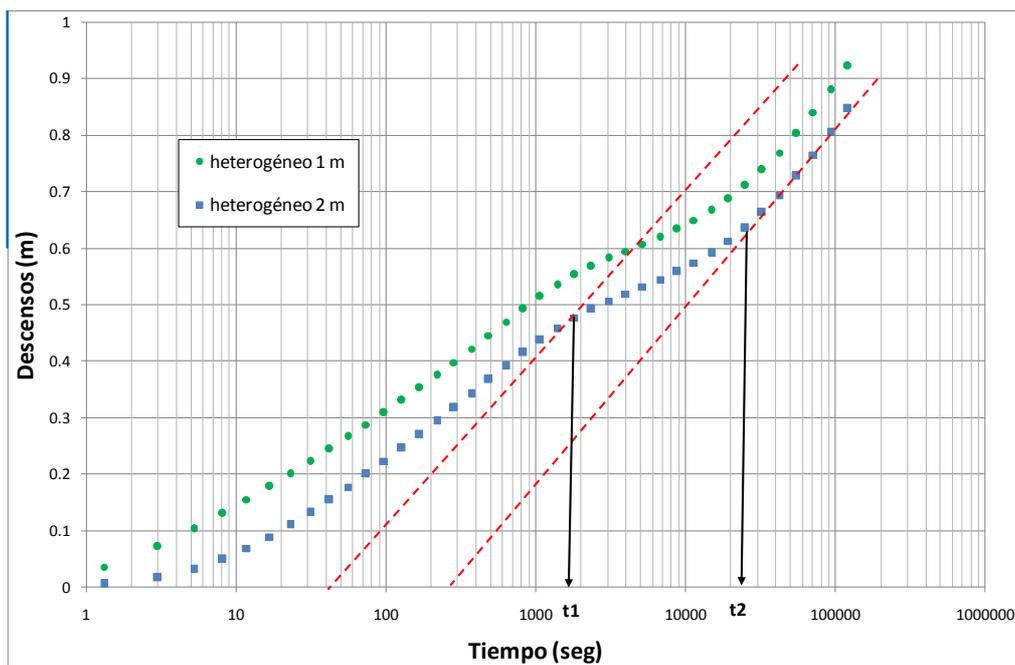
La Figura 7 muestra los campos resultantes, MFBA, MFBb, y MFBc. Además, la Figura 7b muestra la ubicación de los puntos condicionantes utilizados. En la Figura 8 se pueden observar las curvas de respuestas en los descensos para los campos MFBA y MFBb, mientras que la Figura 9 muestra los descensos en función del tiempo para el campo MFBc.



**Figura 7.** Distribución de la variable normal  $Z(x)$  para los campos a) MFbA  $\gamma(h) = 0.027h^{0.7}$ - Varianza total = 2.09. b) MFbB  $\gamma(h) = 0.27h^{0.5}$ - Varianza total=6.037 junto con los puntos condicionantes utilizados, c) MFbC  $\gamma(h) = 0.27h^{0.7}$  y varianza total = 20.9239.



**Figura 8.** Descensos en función del tiempo observados a 1 m y 2 m del pozo de extracción para a) el campo MFbA y b) el campo MFbB.



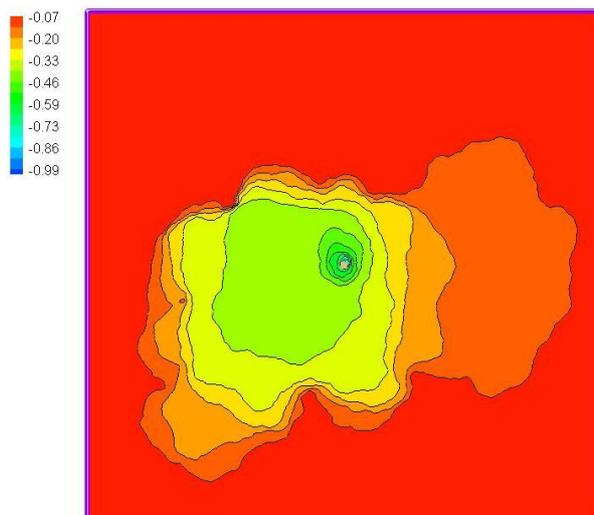
**Figura 9.** Descensos en función del tiempo observados a 1 m y 2 m del pozo de extracción para el campo MFBC. Las líneas a trazos indican el comportamiento asintótico de una condición de equilibrio inicial y final. Las líneas negras verticales señalan los tiempos inicial ( $t_1$ ) y final ( $t_2$ ) que demarcan el período con drenaje diferido para el caso del radio 2 m.

En el último campo ensayado (MFBC) se aprecia el efecto buscado de drenaje diferido clásico por lo que a continuación se focalizará en este caso en particular. Los descensos máximos alcanzados, a  $t=121000$  s, para un radio de  $r = 1$  m fueron de 1.04 m para el campo MFBA, de 0.96 m para MFBb y de 0.92 m para MFBC. De la misma forma, a un radio de 2 m los descensos máximos fueron 0.97 m, 0.89 m y 0.85 m, en los campos MFBA, MFBb y MFBC respectivamente. A ambos radios, los menores descensos se observan en el campo MFBC debido justamente al efecto del drenaje diferido.

En la Figura 9 puede observarse la respuesta del ensayo de bombeo en el campo MFBC, que se asemejaría a la respuesta de drenaje diferido clásico para  $N=1$ , donde hasta aproximadamente los 1000 s el sistema se comportaría como en un estado de equilibrio inicial, dominado por las propiedades de la zona móvil, para luego comenzar una etapa de transición o de drenaje diferido que depende de la tasa de transferencia entre zona móvil e inmóvil. Finalmente el sistema alcanza un nuevo estado de equilibrio, donde el almacenamiento total del sistema es entregado en forma instantánea. Para el pozo de observación ubicado a 1 m del pozo de bombeo el tiempo de inicio del drenaje diferido es  $t_1 = 1071$  s y el tiempo para el cual se alcanza el nuevo equilibrio es  $t_2 = 19279$  s; para el pozo de observación ubicado a 2 m el tiempo de inicio del drenaje diferido es  $t_1 = 1394.5$  s debido a que se encuentra más alejado del pozo de bombeo, mientras que el tiempo para el cual el sistema alcanza la nueva situación de equilibrio es  $t_2 = 25064$  s.

De los campos ensayados se hace evidente que el drenaje diferido en concordancia a lo interpretado por Boulton (1955) para  $N=1$  sería una característica propia de los campos que presentan alto contraste entre valores altos y bajos de transmisividad (varianza grande) y una relativa conectividad entre dichos valores extremos.

La Figura 10 muestra lo crítico del comportamiento de las curvas piezométricas, altamente influenciadas por la distribución de la heterogeneidad para el caso MFBC.



**Figura 10.** Configuración del cono de descensos para el caso MFBC a  $t = 121000$  s.

### 4.3 Aplicación de la formulación equivalente

Dado que, como se explicó, los resultados obtenidos en el campo MFBC son los que más se asemejan a la respuesta esperada de un drenaje diferido clásico, la aplicación del modelo equivalente para  $N=1$  y análisis subsiguientes se llevarán adelante sobre este caso en particular.

Siguiendo la metodología explicada en la sección 3.5, en primer lugar se calcula la transmisividad aparente de la zona móvil ( $T_{ap}$ ) y el coeficiente de almacenamiento total ( $S_{TOTAL}$ ) a partir de la curva de descensos para el pozo de observación ubicado a 2 m. Para ello, se utilizaron las ecuaciones 25 y 26 a partir del comportamiento asintótico al que arriba el sistema en tiempos largos del ensayo de bombeo. La  $T_{ap}$  resultante fue de  $1.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  y sería el parámetro que rige la pendiente del comportamiento asintótico en los últimos tiempos. Para ambos pozos de observación, la pendiente a tiempos largos es igual, y por lo tanto la  $T_{ap}$  calculada es la misma. El  $S_{TOTAL}$  fue 0.021 para el radio de 2 m. Además se determinó el coeficiente de almacenamiento de la zona móvil  $S_m$  mediante la misma metodología de Cooper-Jacob para un comportamiento asintótico ideal que se esperaría para la situación de equilibrio inicial, esto es cuando el drenaje diferido es despreciable dado el corto plazo al momento de iniciarse el ensayo y sólo el almacenamiento de la zona móvil se encuentra disponible. Dicho comportamiento asintótico se infirió mediante una recta con pendiente igual a la observada en el medio heterogéneo pero desplazada un  $\Delta t = t_2 - t_1$ , aproximado. El valor resultante de  $S_m$  fue de  $4.69 \times 10^{-3}$  (ver Figura 9).

Los valores de  $T_{ap}$ ,  $S_{TOTAL}$  y  $S_m$  obtenidos para la curva de descensos correspondiente al radio de 2 m constituyeron un primer conjunto de parámetros que se utilizó para simular los descensos mediante la ecuación de flujo equivalente. Los coeficientes de transferencia  $\alpha$  y los almacenamientos en las zonas móvil e inmóvil fueron modificados, bajo la restricción de mantener constante el  $S_{TOTAL}$  en un proceso de calibración de prueba y error a los fines de obtener el mejor ajuste posible a los valores “observados”, tomándose como tales a la respuesta obtenida mediante MODFLOW en el campo heterogéneo MFBC.

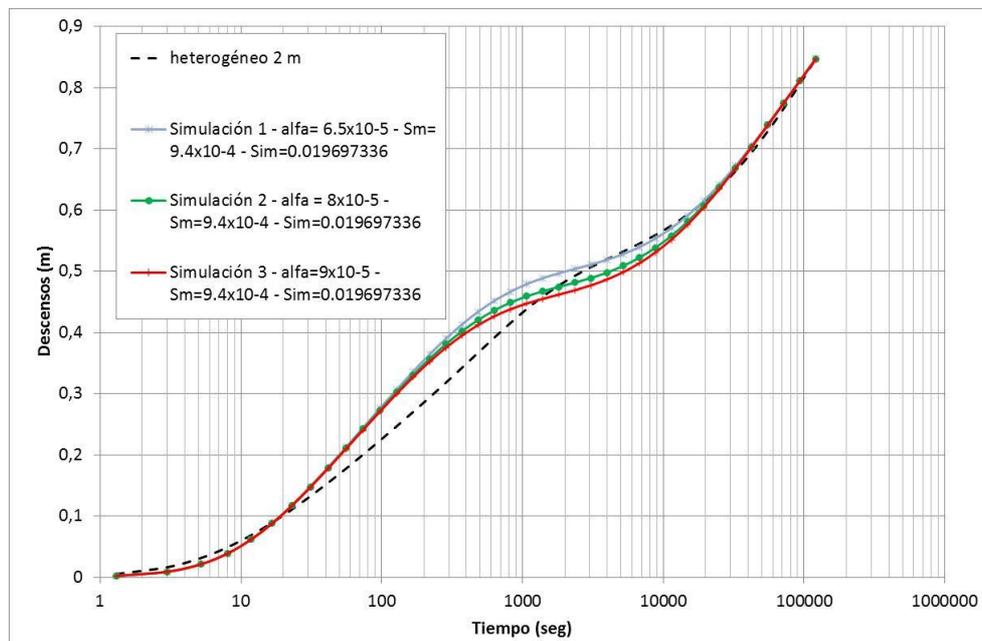
La Figura 11 muestra la curva de descensos “observada” para 2 m en el medio heterogéneo sintético (campo MFBC, línea punteada) y los resultados de 3 simulaciones, cuyos parámetros  $\alpha$ ,  $S_m$  y  $S_{im}$  están especificados en la leyenda.

El modelo equivalente captura la curvatura en la zona de drenaje diferido en la Simulación 1, no obstante sobreestimarse los descensos en tiempos anteriores. Aumentando el parámetro

$\alpha$  pudo corregirse esa sobreestimación en detrimento del ajuste en la zona del drenaje diferido.

No obstante los resultados alentadores de la simulación 3 que muestran un buen ajuste para tiempos cortos y largos, el ajuste para tiempos intermedios muestra un apartamiento entre los descensos “observados” y calculados.

En el futuro deberán abordarse técnicas de calibración alternativas que aceleren la búsqueda de parámetros, que en definitiva conduzca a una mejora en la calibración. Eventualmente, la ecuación de flujo equivalente deberá ser modificada a los fines de considerar más de una zona inmóvil por nodo de la grilla del modelo numérico. Ello permitirá una mayor flexibilidad a los fines de la calibración a la vez que analizar el drenaje diferido de modelos geoestadísticos que inducen a un comportamiento de drenaje diferido atípico como el caso de los modelos multigaussianos.



**Figura 11.** Descensos obtenidos en las simulaciones versus el caso heterogéneo sintético del campo MFBc (valores de  $\alpha$  expresados en  $s^{-1}$ )

## 5 CONCLUSIONES

Bajo la perspectiva del esquema del modelo de flujo equivalente consistente en una zona inmóvil por cada nodo de simulación o celda de zona móvil, tal como lo descrito por Boulton (1955), se puede concluir que el drenaje diferido clásico podría ser una característica propia de los campos de transmisividades que presentan alto contraste entre valores grandes y pequeños (varianza grande) y una relativa conectividad entre valores grandes de transmisividad. Los casos de Modelos Gaussianos Multivariados ensayados no evidenciaron un drenaje diferido esperado, esto puede deberse a la estacionariedad propia que le confiere este tipo de modelos al campo simulado. Lo mismo ocurrió con los campos que siguen el Modelo Fraccional Browniano, excepto en el caso donde la varianza es grande.

Ajustes preliminares del modelo equivalente demuestran que la formulación de no equilibrio podría constituir una buena alternativa para representar el drenaje diferido asociado a ciertas estructuras de la heterogeneidad espacial.

La metodología de prueba y error adoptada en la calibración preliminar permite analizar más de cerca la física del proceso simulado. Sin embargo, ha sido tediosa y

computacionalmente costosa. A los fines de alcanzar el ajuste apropiado de los parámetros en forma más eficiente se podría implementar alguna rutina automática que optimice la calibración.

Por otro lado, resta analizar la eficiencia y aplicabilidad de la formulación equivalente para el caso donde  $N$  sea mayor a 1, es decir más de una zona inmóvil asociada a cada zona móvil. Ello podría ser útil para representar el drenaje diferido de modelos geoestadísticos que inducen a un comportamiento de drenaje diferido atípico como el caso de los modelos multigaussianos.

Se debe resaltar que las simulaciones abordadas intentan reproducir una situación real con campos de transmisividad de relativa complejidad y ensayos de bombeo con tasa de extracción y duración suficientes para “testear” un amplio espectro de escalas espaciales de la heterogeneidad de los campos generados. Por ende, el análisis del drenaje diferido, a partir del ajuste del modelo equivalente a los descensos “observados” constituye un desafío que ha tenido pocos precedentes en la literatura especializada y resulta promisorio tanto para investigaciones futuras como para aplicaciones de la práctica ingenieril.

## 6 REFERENCIAS

- Anderson, E.; Bai, Z.; Bischof, C.; Blackford, S.; Demmel, J.; Dongarra, J.; Du Croz, J.; Greenbaum, A.; Hammarling, S.; McKenney, A.; Sorensen, D. (1999) LAPACK Users' Guide (Third ed.). Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0898714478.
- Boulton, N.S., (1955) Unsteady radial flow to a pumped well allowing for delayed yield from storage, *International Association of Scientific Hydrology*, pub.37.
- Carrera, J., X. Sánchez-Vila, I. Benet, A. Medina, G. Galarza, J. Guimera (1998) On matrix diffusion: formulations, solution methods and qualitative effects, *Hydrogeology Journal*, 6(1), 178-190.
- Cooper, H., Jacob C. (1946) A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well-field history. *Eos Trans., AGU*, 27(4), 526-534.
- Deutsch, C., Journel, A. (1992) GSLIB. Geostatistical Software Library. Oxford University Press, New York.
- Freeze A., Cherry, J. (1979) Groundwater. Prentice Hall. 604 pp.
- GMS V 8.0 (2011) Brigham Young University. Aquaveo Inc., USA.
- Gómez, A. (2012) Ecuación de flujo equivalente para medios porosos saturados heterogéneos. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Litoral.
- Haggerty, R., Gorelick, S.M. (1995) Multiple-rate mass transfer for modelling diffusion and surface reactions in media with pore-scale heterogeneity. *Water Resources Research* 31(10), 2383-2400.
- Harbaugh, A.W., E.R., Banta, M. Hill y M. Mc Donald (2000) MODFLOW 2000-The U.S. Geological Survey Modular Ground-Water Model-User Guide to Modularization Concepts and The Ground-Water Flow Process. U.S. Geological Survey, open-file report 00-92.
- Meier M., Carrera J., Sánchez-Vila X. (1998). An evaluation of Jacob's method for the interpretation of pumping tests in heterogeneous formations. *Water Resources Research*, 34 (5), 1011-1025.
- Neuman, S.P. (1995). On advective transport in fractal permeability and velocity fields. *Water Resources Research* 31(6):1455-1460.
- Prudic D.E. (1989) Documentation of a computer program to simulate stream-aquifer relations using a modular, finite difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey Open-File Report 88-729, 113 p.
- Samper, F.J., J. Carrera (1990) Geostatística. Aplicaciones a la Hidrogeología Subterránea.

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona.

Silva, O.; Carrera, J.; Dentz, M.; Kumar, S.; Alcolea, A.; Willmann, M. (2009) A general real time formulation for multi-rate mass transfer problems. *Hydrology and Earth System Sciences*, 13: 1 - 13.

Theis, C. (1935) The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. *Trans. American Geophysical Union*, 2: 519 – 524.

Walker, D., P. Cello, A. Valocchi, B. Loftis (2006) Flow dimensions corresponding to stochastic models of heterogeneous aquifers. *Geophys. Res. Lett.* 33:L07407, doi:10.1029/2006GL025695.

Willmann, M., Carrera, J., Sánchez-Vila, X., (2008) Transport upscaling in heterogeneous aquifers: what physical parameters control memory functions? *Water Resources Research*, 44, doi: 10.1029/ 2007WR006531.