

CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA EFECTIVA DE MEDIOS POROSOS HETEROGÉNEOS 2D Y 3D

Leonardo B. Monachesi y Luis Guarracino

CONICET, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata, Paseo del Bosque s/n, 1900 La Plata, Argentina, lmonachesi@fcaglp.unlp.edu.ar, luisg@fcaglp.unlp.edu.ar

Palabras Clave: conductividad hidráulica, upscaling, medios porosos heterogéneos.

Resumen. La conductividad hidráulica de la mayoría de los acuíferos suele presentar heterogeneidades a escalas espaciales menores al tamaño de las mallas utilizadas para resolver las ecuaciones de flujo. Para tener en cuenta estas heterogeneidades sin incrementar el costo computacional, se suelen utilizar valores efectivos de los parámetros hidráulicos. En este trabajo se presenta una técnica de upscaling que permite estimar la conductividad hidráulica efectiva en medios porosos heterogéneos. La técnica se basa en un experimento numérico que simula los ensayos de laboratorio realizados para estimar este parámetro en forma experimental. Para ello se consideran muestras de rocas sintéticas 2D y 3D con campos heterogéneos de conductividad hidráulica generados mediante un algoritmo de tipo “turning bands”. Este algoritmo permite obtener en forma relativamente sencilla realizaciones de campos aleatorios con cierto grado de correlación espacial. Las muestras de rocas así generadas se someten a un gradiente externo de presión mediante condiciones de borde de tipo Dirichlet. Luego, a partir del flujo de agua neto calculado a través de la roca se estima la conductividad hidráulica efectiva correspondiente a un medio poroso homogéneo equivalente. La ecuación de flujo de agua se aproxima mediante métodos mixtos de elementos finitos que conservan localmente la masa y permiten considerar grandes variaciones en las propiedades hidráulicas. Por cuestiones de índole práctica y costo computacional, las propiedades efectivas se obtienen generalmente bajo la hipótesis de que el medio poroso es bidimensional. En este trabajo se analizará y discutirá la validez de esta hipótesis mediante la comparación de los resultados obtenidos para campos de conductividades hidráulicas 2D y 3D.

1. INTRODUCCIÓN

El modelado numérico del flujo de agua en medios porosos es de interés en áreas de investigación tales como la hidrología de aguas subterráneas, las ciencias del suelo y la ingeniería ambiental, entre otras. Uno de los rasgos de mayor complejidad en el estudio de este proceso lo constituye la presencia de heterogeneidades, ya sea en medios porosos granulares como en medios fracturados. De todos los parámetros que caracterizan el comportamiento hidráulico de los acuíferos, la conductividad hidráulica es el que suele registrar mayores variaciones, tanto en la micro como en la macroescala. Es por ello que para lograr una caracterización hidráulica satisfactoria, las heterogeneidades de la conductividad hidráulica deben considerarse en forma explícita. Cuando los modelos numéricos son utilizados para simular procesos de flujo en el subsuelo a escala de campo, aparece el problema del upscaling. Las escalas típicas correspondientes a la resolución espacial de las heterogeneidades en estos modelos son en general mucho mayores que las escalas de medición de los parámetros y procesos físicos involucrados. En el caso de la conductividad hidráulica, la mayoría de las técnicas de medición permiten obtener medidas representativas a escalas pequeñas, del orden de los centímetros (permeameter tests, slug tests, packer tests, entre otros). Sin embargo, los modelos numéricos a escala de campo requieren valores representativos a la escala del tamaño de grilla, el cual suele ser del orden de metros a kilómetros (Rubin y Gomez-Hernandez, 1990; Sarris y Paleologos, 2004). El problema de upscaling consiste entonces en asignar parámetros a la escala de grilla, basándose en valores de parámetros medidos a escalas más pequeñas (Sanchez-Vila et al., 1995; Desbarats, 1998). Un problema estrechamente relacionado con el upscaling es la determinación de propiedades efectivas en medios heterogéneos. Los parámetros efectivos están definidos como valores asociados a un medio homogéneo teórico capaz de reproducir el comportamiento hidráulico del medio considerado.

En este trabajo se presenta una técnica de upscaling numérico que permite estimar la conductividad hidráulica efectiva en medios porosos heterogéneos. La técnica está basada en un experimento numérico que simula un ensayo de laboratorio para la obtención experimental de la conductividad hidráulica en muestras de rocas (Liu y Bodvarsson, 2001). Los medios porosos heterogéneos son generados en forma sintética utilizando una distribución lognormal, la cual suele ser adecuada para representar las heterogeneidades presentes en la conductividad hidráulica (Dagan, 1989). El algoritmo utilizado para generar los campos heterogéneos es de tipo turning bands (Journel y Huijbregts, 1978; Mantoglou y Wilson, 1982), y será empleado para generar muestras tridimensionales con diferentes grados de correlación espacial. El experimento consiste en someter a las muestras de roca a un gradiente hidráulico, que se establece mediante condiciones de borde tipo Dirichlet para la altura de presión del agua en las caras superior e inferior de la muestra. Con estas condiciones de borde se resuelve la ecuación de flujo saturado estacionario utilizando un método mixto de elementos finitos, que conserva localmente la masa y permite considerar grandes variaciones en la conductividad hidráulica. Este experimento se lleva a cabo para un número de realizaciones diferentes de muestras 3D, con el propósito de extraer el comportamiento estadístico de la conductividad hidráulica efectiva. Los valores obtenidos se comparan con los valores equivalentes dados por la media aritmética, la media geométrica y la media armónica. Finalmente, con el propósito de estudiar el efecto de la dimensión espacial, se realiza un estudio comparativo entre los valores efectivos obtenidos para cada muestra 3D y para muestras 2D correspondientes a cortes verticales de las muestras originales.

2. GENERACIÓN DE LA MUESTRA DE ROCA

En esta sección se describe brevemente el procedimiento computacional para generar muestras sintéticas de roca con distribuciones lognormal de conductividad hidráulica utilizando un algoritmo de tipo turning bands. Para mayor detalle sobre los fundamentos de esta técnica y su implementación se refiere a [Journel y Huijbregts \(1978\)](#) [Mantoglou y Wilson \(1982\)](#).

Supondremos que la muestra de roca es un dominio cúbico Ω de lado L , donde el campo de conductividad hidráulica $K(\mathbf{x})$ es de tipo lognormal. Luego, el campo $Y(\mathbf{x}) = \ln(K(\mathbf{x}))$ es de tipo gaussiano, y se asume estacionario y ergódico ([Desbarats, 1998](#)). Con estas hipótesis, el campo gaussiano queda definido por sus momentos de primer y segundo orden:

$$E[Y(\mathbf{x})] = \alpha, \quad (1)$$

$$Cov[Y(\mathbf{x}), Y(\mathbf{x} + \mathbf{r})] = \sigma(|\mathbf{r}|), \quad (2)$$

$$Var[Y(\mathbf{x})] = \sigma^2, \quad (3)$$

donde α , $\sigma(|\mathbf{r}|)$ y σ^2 son, respectivamente, la media, la covarianza y la varianza del campo gaussiano. La función de covarianza se asume de tipo exponencial simple:

$$\sigma(r) = \sigma^2 e^{-br}, \quad (4)$$

siendo b el inverso de la distancia de correlación y $r = |\mathbf{r}|$ la distancia entre dos puntos arbitrarios de la muestra.

Para implementar el algoritmo turning bands es necesario definir un número N_L de semirrectas en R^3 , cuyo origen común sea un punto arbitrario y cuya orientación en el espacio esté uniformemente distribuida. Llamaremos \mathbf{u}_i al versor directriz de la i -ésima semirrecta. A lo largo de la dirección dada por \mathbf{u}_i se define una partición regular en bandas transversales de un ancho prefijado (en 3D estas bandas son prismas rectangulares) y se genera un proceso estacionario de segundo orden y discreto, con media cero y con covarianza $C_1(\xi)$ dada por:

$$C_1(\xi) = \frac{d}{d\xi}[\xi C(\xi)] = \sigma^2(1 - b\xi)e^{-b\xi}. \quad (5)$$

Particionando el dominio de la muestra en elementos cúbicos de dimensión $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, el proceso estacionario unidimensional permite definir en cada elemento Ω_N de la grilla, N_L valores $z_i(\xi_{N_i}) = z_i(\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{u}_i)$, con $i = 1, \dots, N_L$, siendo ξ_{N_i} la distancia entre el origen común de las semirrectas y la proyección del punto \mathbf{x}_N sobre la semirecta de directriz \mathbf{u}_i . Finalmente, se asigna al elemento Ω_N el valor:

$$z_s(\mathbf{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N_L}} \sum_{i=1}^{N_L} z_i(\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{u}_i). \quad (6)$$

De esta manera, el campo z_s resultante es estacionario de segundo orden, isótropo, cuya media es cero y su función de covarianza espacial es exponencial simple ([Mantoglou y Wilson, 1982](#)). El paso siguiente es definir a $Y(\mathbf{x}_N)$ en términos de $z_s(\mathbf{x}_N)$ como:

$$Y(\mathbf{x}_N) = \alpha + z_s(\mathbf{x}_N). \quad (7)$$

Dado que Y es el logaritmo natural de K , las estadísticas de K pueden escribirse del siguiente modo:

$$E[K(\mathbf{x})] = e^{\alpha + \sigma^2/2}, \quad (8)$$

$$Var[K(\mathbf{x})] = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\alpha + \sigma^2}. \quad (9)$$

En la Fig. 1 se ilustra una realización 3D obtenida con el algoritmo descrito. Para este ejemplo se ha considerado una muestra de 10 cm de lado discretizada mediante una malla de $50 \times 50 \times 50$ elementos, y se utilizaron 10^4 semirrectas uniformemente distribuidas, centradas en el origen de coordenadas. Las estadísticas del campo $Y(\mathbf{x})$ son $\alpha = 0$ y $\sigma^2 = 1$, y el ancho de las bandas del algoritmo turning bands es de 0.4 cm. En la gráfica de la izquierda puede visualizarse la distribución de magnitudes de Y en las 3 caras de la muestra. La gráfica de la derecha muestra, en línea continua, la función de covarianza teórica unidimensional dada por la Ec 5, junto con los valores numéricos que se obtienen al calcular dicha covarianza en la dirección de uno de los ejes coordenados. Como puede observarse, el algoritmo implementado puede generar con buena aproximación un campo gaussiano con una dada función de covarianza. El campo de conductividad hidráulica $K(\mathbf{x})$ se obtiene a partir de $Y(\mathbf{x})$ mediante:

$$K(\mathbf{x}) = e^{Y(\mathbf{x})}. \quad (10)$$

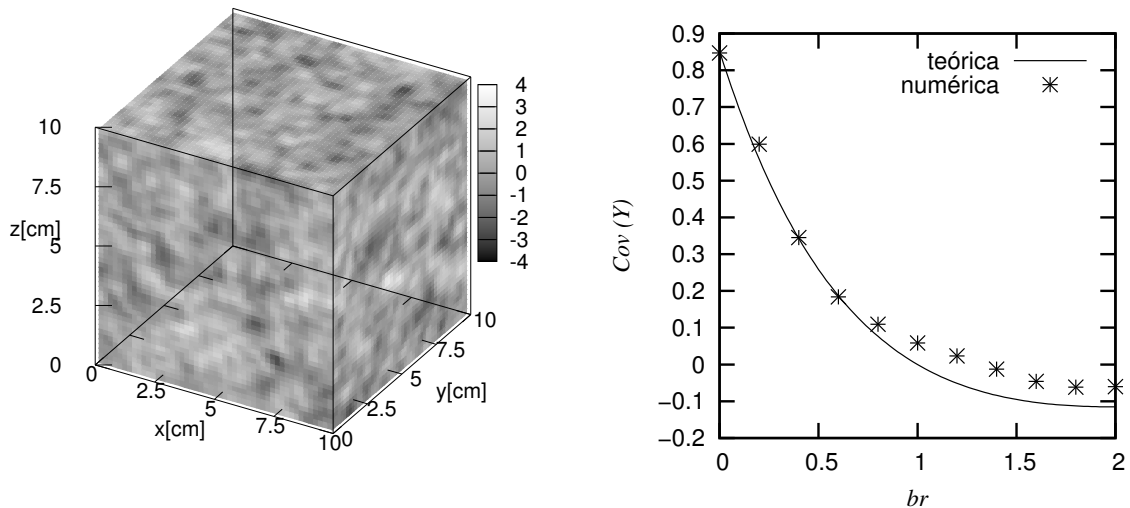


Figura 1: Realización 3D (izquierda) y gráfico de covarianza (derecha) para un campo $Y(\mathbf{x})$ generado utilizando el algoritmo turning bands

En la sección siguiente se presentará el método numérico para simular el test hidráulico que permite obtener un valor efectivo para la conductividad hidráulica de una muestra 3D.

3. MÉTODO NUMÉRICO

3.1. Problema diferencial

El empleo de simulaciones numéricas para determinar propiedades hidráulicas efectivas en medios porosos heterogéneos ha sido propuesto por varios autores (Desbarats, 1998; Liu y Bodvarsson, 2001; Monachesi y Guarracino, 2011). En este trabajo la muestra de roca se supone completamente saturada, y se establece un gradiente hidráulico externo a partir de imponer valores diferentes de altura de presión de agua en dos caras opuestas de la muestra. Las cuatro caras restantes se suponen impermeabilizadas (flujo nulo), lo que permite establecer un flujo medio en la dirección del gradiente externo. Con estas condiciones, el problema diferencial que describe el flujo estacionario en el dominio de simulación de la Fig. 2 puede plantearse del siguiente modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{q} = -K\nabla(h + z), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (12)$$

$$h(\mathbf{x}) = h_D, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^D \quad (13)$$

$$h(\mathbf{x}) = h_U, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^U \quad (14)$$

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{lat} = \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^F \cup \Gamma^B \quad (15)$$

donde \mathbf{q} es el flujo de agua, Γ^D , Γ^U y Γ^{lat} son las caras inferior, superior y laterales, respectivamente, h_D y h_U las alturas de presión en las caras Γ^D y Γ^U , respectivamente y $\boldsymbol{\nu}$ el versor normal a Γ^{lat} . Notar que la Ec.11 es la ecuación de conservación de la masa de agua y la Ec.12 es la Ley de Darcy.

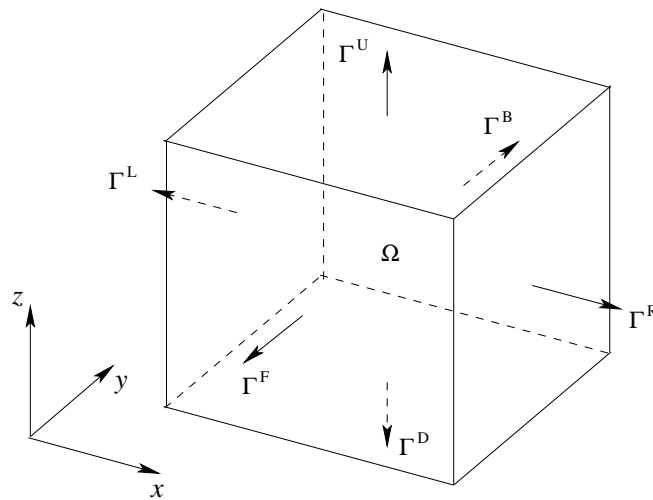


Figura 2: Dominio de simulación 3D

3.2. Resolución numérica

El problema diferencial dado por las Ecs.11-15 se resuelve utilizando un método híbrido mixto de elementos finitos, el cual permite obtener en forma simultánea aproximaciones para la altura de presión h y el flujo \mathbf{q} (Guarracino, 2001). El empleo de un método mixto de elementos finitos resulta especialmente apropiado para este tipo de problemas por dos razones: permite conservar la masa localmente y puede manejar grandes discontinuidades en la conductividad hidráulica. El método fue implementado para un espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden cero (Raviart y Thomas, 1977; Nedelec, 1980) empleando una malla regular de elementos cúbicos. Los correspondientes grados de libertad son los valores de altura de presión en el centro del elemento y los valores de la componente normal del flujo en el centro de cada cara del cubo elemental. El sistema algebraico lineal resultante se resuelve utilizando un método iterativo de sobrerrelajación (SOR) (Peaceman, 1977).

3.3. Conductividad hidráulica efectiva

Dado que el gradiente efectivo de altura de presión queda establecido por las condiciones impuestas por las Ecs.13 y 14, su valor puede aproximarse por:

$$\nabla h_{\text{eff}} = \frac{h_U - h_D}{L}. \quad (16)$$

Luego, según la Ley de Darcy el flujo volumétrico de agua que atraviesa la muestra puede calcularse del siguiente modo:

$$Q = L^2 K_{\text{eff}} (\nabla h_{\text{eff}} + 1), \quad (17)$$

siendo K_{eff} la conductividad hidráulica efectiva y L^2 el área de la sección transversal del dominio. La K_{eff} se estima a partir de la Ec.17 calculando Q mediante una integración numérica del flujo de agua \mathbf{q} en una sección transversal de la muestra. Este procedimiento para estimar K_{eff} es similar a las técnicas de laboratorio empleadas para estimar la conductividad hidráulica.

4. EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se analizarán las conductividades hidráulicas efectivas para 10 muestras 3D empleando la técnica desarrollada en los apartados anteriores. Los resultados obtenidos se compararán con los valores que resultan de extraer un corte 2D de cada una de las muestras consideradas. Este análisis nos permitirá establecer y cuantificar las diferencias que surgen al simplificar la representación de un campo heterogéneo 3D utilizando una representación 2D. En este ejemplo consideraremos que el dominio de las muestras es de 10 cm de lado y la malla computacional de $50 \times 50 \times 50$ elementos. Los parámetros estadísticos que representan al campo de conductividad hidráulica son $E[K(\mathbf{x})] = 100 \text{ cm/d}$ y $Var[K(\mathbf{x})] = 10^4 \text{ cm}^2/\text{d}^2$, mientras que el inverso de la distancia de correlación para el campo gaussiano es $b = 0.8 \text{ cm}^{-1}$. Para la realización de las muestras se utilizaron 1000 direcciones uniformemente distribuidas, para cada una de las cuales se consideraron bandas de 0.8 cm de ancho (aproximadamente 21 bandas por línea).

A modo de ejemplo, en la Fig. 3 se muestra el módulo del vector de flujo para simulaciones 2D y 3D de una de las muestras. La gráfica de la izquierda corresponde a un corte vertical en el centro de la muestra 3D, donde puede observarse el patrón de flujo resultante. El campo

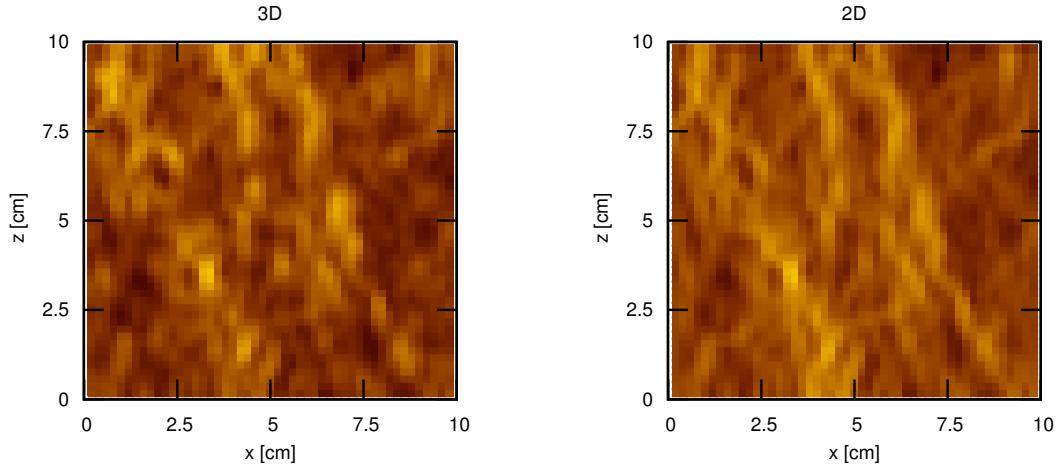


Figura 3: Módulo del vector de flujo 3D (izquierda) y 2D (derecha). Los colores claros corresponden a mayores intensidades

de conductividad hidráulica correspondiente a este corte vertical fue utilizado para realizar el experimento 2D, cuyo campo se muestra en el gráfico derecho de la Fig. 3. Como era de esperar los patrones de flujo son similares pero no idénticos, ya que los caminos preferenciales de flujo en el caso 3D son más complejos y no están limitados a un único plano.

Con la técnica propuesta se calcularon los valores efectivos de conductividad hidráulica para las 10 muestras generadas. Con el fin de comparar los resultados se calcularon además las conductividades equivalentes dadas por la media aritmética K_A , la media geométrica K_G y la media armónica K_H . Si bien estas cantidades carecen de sentido físico, han sido ampliamente utilizados como valores representativos de la conductividad hidráulica efectiva (e.g. [Sanchez-Vila et al. \(1995\)](#); [Desbarats \(1998\)](#)). Las medias K_A , K_G y K_H se definen a partir del campo de conductividad hidráulica de la siguiente manera:

$$K_A = \frac{1}{V} \int_V K(\mathbf{x}) dV, \quad (18)$$

$$K_G = \exp \left(\frac{1}{V} \int_V \ln (K(\mathbf{x})) dV \right), \quad (19)$$

$$K_H = \left(\frac{1}{V} \int_V K(\mathbf{x})^{-1} dV \right)^{-1}, \quad (20)$$

siendo V el volumen total de la muestra. Estos valores equivalentes pueden calcularse aproximando las integrales de las Ecs. 18- 20 con un método de cuadratura.

La Fig. 4 muestra los resultados obtenidos para la conductividad hidráulica efectiva K_{eff} en las 10 muestras del ejemplo 3D. Junto a estos valores se grafican además los correspondientes a las medias aritmética, geométrica y armónica. Puede observarse que la media geométrica K_G es la que mejor aproxima los valores efectivos en todos los casos. No obstante ello, los valores de K_G son levemente inferiores, por lo que su utilización en problemas prácticos conduciría a una subestimación de los valores de flujo.

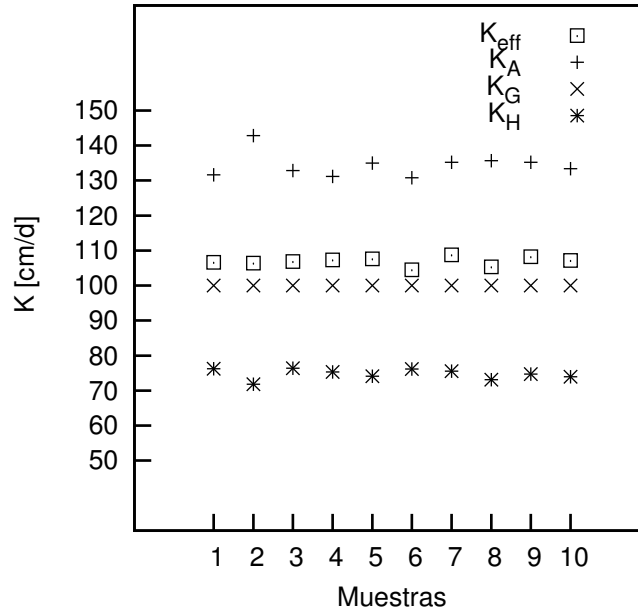


Figura 4: Valores de conductividad hidráulica efectiva K_{eff} , valor medio aritmético K_A , geométrico K_G y armónico K_H calculados para 10 muestras 3D

Para evaluar el efecto que produce la aproximación de un medio 3D mediante una representación bidimensional, se ha extraído un corte vertical en la parte central de cada una de las 10 muestras del ejemplo, y se llevó a cabo un análisis equivalente en 2D. La Fig.5 muestra los resultados obtenidos para este caso. Como puede observarse, todos los valores de conductividad hidráulica registran mayor variación. Sin embargo los valores relativos entre las conductividades para una misma muestra mantienen en promedio la misma relación. Nótese que los valores efectivos caen en promedio por debajo del valor de la media geométrica, permitiendo concluir que en el caso 2D, utilizar la media geométrica como valor efectivo de conductividad conduciría a una sobreestimación de la conductividad hidráulica del medio 2D.

Este sencillo ejemplo muestra la importancia de considerar medios 3D para calcular las propiedades efectivas de un medio poroso. La hipótesis de que una muestra se puede representar por un dominio 2D limita los caminos preferenciales de flujo, como ya se ha mencionado en el análisis de la Fig. 3. Estas variaciones en el patrón de flujo modifican sensiblemente el valor de la conductividad efectiva que se define a partir de la Ley de Darcy (Ec. 17).

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una técnica numérica de upscaling que permite obtener la conductividad hidráulica efectiva de medios porosos heterogéneos 3D. La técnica se basa en la simulación computacional de un experimento de laboratorio al que suele someterse a las muestras de roca para obtener y estudiar sus propiedades hidráulicas efectivas. En particular, el método fue aplicado a muestras de roca con distribuciones de conductividad hidráulica de tipo lognormal. Con este fin se implementó un algoritmo de tipo turning bands que permite generar muestras 3D de rocas con campos de conductividad hidráulica que poseen propiedades estadísticas predeterminadas. Para estas muestras se llevó a cabo el test hidráulico propuesto, obteniéndose sus respectivos valores efectivos de conductividad hidráulica. Por otro lado, se calcularon las conductividades equivalentes que surgen de la promediación aritmética, geométrica y armónica, con el propósito de compararlas con los valores efectivos obtenidos. En todos los

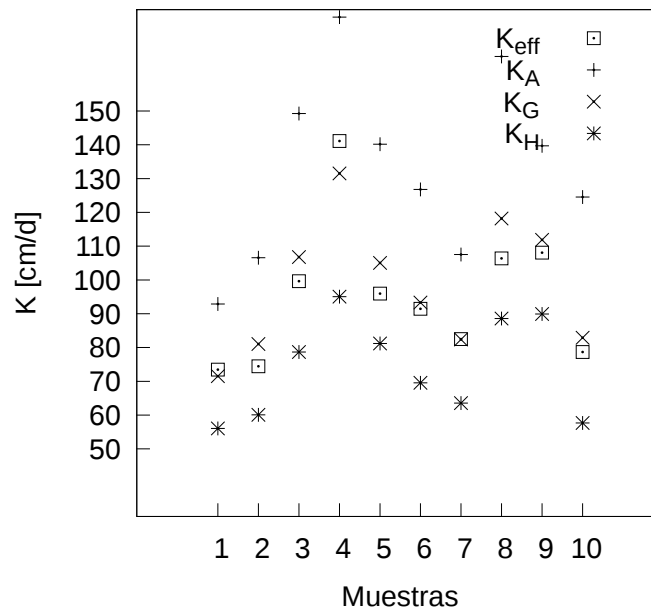


Figura 5: Valores de conductividad hidráulica efectiva K_{eff} , valor medio aritmético K_A , geométrico K_G y armónico K_H calculados para cortes 2D de las muestras del ejemplo

casos la media geométrica resultó ser la mejor aproximación a los valores efectivos obtenidos mediante esta técnica. El mismo análisis se repitió para cortes 2D de las muestras. El resultado del análisis comparativo entre los experimentos 2D y 3D permite concluir que la utilización de la media geométrica como valor representativo de la conductividad efectiva puede conducir a errores en la caracterización hidráulica de rocas heterogéneas. En el caso 3D, el valor efectivo de conductividad hidráulica supera a la media geométrica, mientras que en el caso 2D, el valor efectivo cae, en promedio, por debajo de dicho valor. Este resultado muestra que aunque se disponga de una caracterización precisa de las heterogeneidades de un dado medio, su simplificación mediante una representación bidimensional puede llevar a una estimación errónea de sus propiedades hidráulicas.

REFERENCIAS

- Dagan G. *Flow and transport in Porous Formations*, volumen I. Springer-Verlag, 1989.
- Desbarats A. Scaling of constitutive relationships in unsaturated heterogeneous media: a numerical investigation. *Water Resources Research*, 24:1427–1436, 1998.
- Guarracino L. *Modelado Numérico del flujo de aguas subterráneas y transporte de solutos en medios porosos heterogéneos*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de La Plata, 2001.
- Journel A. y Huijbregts C. *Mining geostatistics*. Academic Press, London, 1978.
- Liu H. y Bodvarsson G. Constitutive relations for unsaturated flow in fracture networks. *Journal of Hydrology*, 252:116–125, 2001.
- Mantoglou A. y Wilson J. The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method. *Water Resources Research*, 18:1379–1394, 1982.
- Monachesi L. y Guarracino L. Un método numérico para la obtención de relaciones constitutivas en rocas fracturadas. *Cuadernos del CURIHAM*, 17, 2011.
- Nedelec J. Mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.
- Peaceman D. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Elsevier, 1977.

- Raviart P. y Thomas J. A mixed finite element method for second order elliptic problems: Mathematical aspects of the finite element method. *Lect. Notes Math.*, 606:292–315, 1977.
- Rubin Y. y Gomez-Hernandez J. A stochastic approach to the problem of upscaling of conductivity in disordered media: theory and unconditional numerical simulations. *Water Resources Research*, 24:1689–1697, 1990.
- Sanchez-Vila X., Girardi J.P., y Carrera J. A synthesis of approaches to upscaling of hydraulic conductivities. *Water Resources Research*, 31:867–882, 1995.
- Sarris T.S. y Paleologos E.K. Numerical investigation of the anisotropic hydraulic conductivity behavior in heterogeneous porous media. *Stochastic Environmental Research*, 18:188–197, 2004.