

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CONFORMADO PLÁSTICO DE METALES CON ACOPLAMIENTO TERMOMECAÁNICO

Walter B. Castelló y Fernando F. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, wcastello@efn.uncor.edu -*

*fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>*

**Palabras Clave:** elementos finitos, grandes deformaciones, acoplamiento termomecánico.

**Resumen.** En este trabajo se estudian numéricamente procesos de deformación plástica de metales. Estos procesos de conformado de metales involucran habitualmente generación de calor, tanto por deformación plástica como por fricción con las herramientas. Este aspecto resulta relevante en algunas geometrías específicas, donde los cambios de forma y/o la velocidad de deformación producen gradientes térmicos elevados. Empleando un elemento triangular en deformaciones impuestas capaz de lidiar con el problema del bloqueo volumétrico, se ha adaptado la formulación adicionando un esquema de acoplamiento termomecánico del tipo escalonado isotérmico. Este esquema de acoplamiento resulta suficientemente preciso y adecuado cuando se utiliza una integración explícita de las ecuaciones de movimiento. En este trabajo se emplea además un esquema de aproximación térmica consistente, similar al empleado para las deformaciones, lo cual da lugar a una formulación cuadrática para el cálculo de los gradientes térmicos que se evalúan a partir de la temperatura de los elementos adyacentes. Se presentan algunos resultados obtenidos sobre problemas conocidos, que muestran el buen desempeño de los algoritmos propuestos en este trabajo y se comparan estos resultados con otros disponibles en la literatura.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existe un creciente interés por parte de la industria en la simulación numérica de procesos, y esto se fundamenta en la posibilidad de conocer las características del proceso mucho antes de ingresar en la fase de fabricación. En el área del conformado plástico de metales, particularmente el conformado másico o volumínico de metales, se emplean habitualmente dos métodos el forjado por estampa y el forjado por extrusión. En lo que respecta al forjado por estampa, consiste en colocar una pieza metálica entre dos matrices que al cerrarse conforman una cavidad con la forma y dimensiones que se desean obtener para la pieza final. A medida que avanza el proceso, ya sea empleando punzones o prensas, el material se va deformando y adoptando la forma geométrica de las matrices hasta que adquiere la geometría deseada. En el caso del forjado por extrusión, habitualmente aplicado a piezas con simetría de revolución, a partir de la fuerza realizada por un punzón la pieza es obligada a pasar por una matriz que posee la geometría final deseada. En lo que sigue se emplearán los términos forjado y extrusión para hacer referencia al forjado por estampa y forjado por extrusión, respectivamente. Desde un punto de vista físico estos procesos están dominados por fenómenos altamente complejos, esto conlleva a que cambios insignificantes en algunas variables como: las características (mecánicas y térmicas) del material de la pieza, la geometría de las herramientas, las condiciones del contacto pieza-herramientas (lubricación y terminación superficial), la temperatura y velocidad del proceso, entre otras; conlleven a la aparición de resultados no satisfactorios como pliegues, grietas o la rotura de la pieza.

En consonancia con la complejidad de los fenómenos físicos involucrados, el estudio computacional en estas aplicaciones requiere de fuertes discretizaciones. Y resulta más versátil el uso de elementos de bajo orden de interpolación con grados de libertad con sentido físico claro (desplazamientos) para facilitar la interpretación de los resultados. En dos dimensiones esto conduce a elementos triangulares lineales o cuadriláteros bilineales, sin embargo estos elementos muestran bloqueo volumétrico en problemas de deformaciones finitas. Además en el caso de triángulos es necesario un malla muy fina si se desean obtener resultados precisos. En el caso del elemento cuadrilátero bilineal las formulaciones para aumentar la eficiencia y robustez del mismo han tenido una evolución importante, lográndose elementos que no bloquean en problemas cuasi-incompresibles o con mallas gruesas. Las diferentes aproximaciones desarrolladas en cuadriláteros comprenden desde la adición de modos incompatibles, la integración reducida o selectiva, el método  $\bar{B}$  (B-barra), e inclusive las formulaciones más modernas en deformaciones impuestas y/o mejoradas. Como ejemplos de estas mejoras se pueden citar los trabajos de [Simo y Rifai \(1990\)](#), [César de Sá y Natal Jorge \(1999\)](#), [Armero \(2000\)](#) y las referencias que allí se mencionan. Mientras que en el caso de triángulos se han desarrollado aproximaciones que introducen grados de libertad que no son desplazamientos, formulaciones mixtas o híbridas, y también formulaciones  $\bar{F}$  (F-barra) dentro de las cuales se enmarca este trabajo. Algunos trabajos en esta área son los de [Felippa \(2003\)](#), [Zienkiewicz et al. \(1998\)](#) y [Souza Neto et al. \(2003\)](#). Este último trabajo resulta interesante dado que se ha extendido el método  $\bar{F}$  a triángulos lineales, originalmente propuesto para cuadriláteros en [Souza Neto et al. \(1996\)](#), donde la parte volumétrica del gradiente de deformaciones se obtiene considerando el aporte de un determinado número de elementos vecinos.

Este trabajo resulta de la extensión de otros anteriores, [Castelló y Flores \(2006, 2008\)](#), en donde se empleó un elemento triangular cuya geometría se define por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y posee la característica de que la evaluación del gradiente es función de la geometría de los elementos adyacentes. Se ha extendido la formulación de este elemento

triangular, a fin de incluir la capacidad de simular la generación de calor por flujo plástico, para ello se ha desarrollado un esquema de acoplamiento termomecánico del tipo "escalonado isotérmico" que resulta suficientemente preciso y adecuado cuando se utiliza una integración explícita de las ecuaciones de movimiento. En dicho esquema se supone que la temperatura es constante durante el paso de integración de las ecuaciones de movimiento y que el calor generado por la disipación mecánica es constante durante la integración de las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor, este esquema supone la división del problema de una manera similar a la propuesta de [Armero y Simo \(1993\)](#).

Se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando dicho elemento triangular y un modelo termo-elasto-plástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, bajo una formulación Lagrangiana Actualizada basada en la propuesta por [García Garino \(1993\)](#). Existe un importante cantidad de trabajos en la literatura para cuantificar y establecer el comportamiento plástico de los materiales, sin embargo unos pocos de estos trabajos están dedicados al punto de vista del acoplamiento termomecánico. Algunos esfuerzos en este sentido son el trabajo de [Adam y Ponthot \(2003\)](#), en el cual se parte de un esquema aditivo y basado en un modelo hipoeelástico similar a [Ponthot \(2002\)](#). Una propuesta similar basada en un modelo hipoeelástico se puede encontrar en el trabajo de [Andrade-Campos et al. \(2006\)](#), donde la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación resulta la suma de la parte termoelástica y la parte viscoplástica. También [Ulz \(2009\)](#) en su trabajo presenta un modelo generalizado, basado en la descomposición aditiva y siguiendo algunos lineamientos sobre las restricciones termodinámicas impuestas originalmente en el trabajo de [Green y Naghdi \(1965\)](#). Desde el punto de vista de la descomposición multiplicativa en problemas con acoplamiento termomecánicos se puede mencionar el trabajo de [Čanađja y Brnić \(2004\)](#). Otro punto de vista se presenta en el trabajo de [Bertram \(2003\)](#), el cual es una extensión a la termoplasticidad basada en el concepto de isomorfismo elástico ya previamente presentado en [Bertram \(1998\)](#), el cual resulta coincidente con las configuraciones isóclinas propuestas por [Mandel \(1983\)](#).

Si bien no se han considerado aquí efectos viscosos, cuando la temperatura es supuesta como variable, además de la aparición del acoplamiento termo-mecánico se observa un fuerte comportamiento viscoplástico en el metal (aun con temperaturas del orden de un tercio de la temperatura de fusión). Y el modelo empleado en este trabajo posee la ventaja de que puede ser generalizado para incluir los efectos viscosos a partir del modelo clásico de plasticidad dependiente del tiempo propuesto por [Perzyna \(1966, 1971\)](#). El modelo termo-elasto-viscoplástico unificado basado en los trabajos de [Ponthot \(2002\)](#), [Ponthot et al. \(2005\)](#) y [García Garino et al. \(2006\)](#); ha sido presentado en [Castelló \(2012\)](#) y resulta una extensión del modelo termo-elasto-plástico hiperelástico basado en la formulación Lagrangiana Actualizada mencionado anteriormente a fin de incorporar los efectos de la plasticidad dependiente del tiempo de una manera generalizada si fuera necesario.

El contenido de este trabajo se resume a continuación. La Sección 2 presenta las hipótesis asociadas a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, además de algunos detalles de la cinemática en grandes deformaciones y por último las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto. La Sección 3 introduce la aproximación elemental en deformaciones impuestas a partir de triángulos de tres nodos que ha sido empleada aquí. La Sección 4 contiene un compendio de los resultados obtenidos con la formulación termo-elasto-plástica propuesta en este trabajo. Y por último la Sección 5 presenta un resumen de las conclusiones obtenidas de este trabajo.

## 2. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN TERMO-ELASTO-PLÁSTICO

### 2.1. Hipótesis asociadas a la descomposición multiplicativa

Si se considera un sólido en su posición original o indeformada, ocupando un dominio  $\Omega_0$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$  y cuyo contorno queda definido por  $\Gamma_0$ . Si es posible definir una función  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  que relacione en todo momento la configuración de referencia  $\Omega_0$  con otra cualquiera  $\Omega_t$ , a la cual se puede denominar actual o deformada, resulta entonces posible definir el tensor gradiente de la deformación como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

El modelo cinemático empleado en este trabajo surge de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  de acuerdo a Lee (1969), en sus partes elástica  $\mathbf{F}^e$  y plástica  $\mathbf{F}^p$  de acuerdo a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2)$$

en donde se supone que la parte plástica no modifica el volumen (flujo plástico isócoro) de modo que  $\det(\mathbf{F}^p) = 1$  y  $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J$ .

El modelo presenta una evidencia física muy clara, similar a los que sucede en el análisis de monocristales. La ecuación (2) es suficiente para definir sin ambigüedades la descomposición multiplicativa en el caso de materiales isotrópicos, que de hecho es el tipo de material que se estudia en este trabajo. En este trabajo además se considera el acoplamiento termomecánico, de modo que el proceso resulta no isotérmico, y se ha considerado plasticidad independiente del tiempo lo que equivale a despreciar los efectos de la viscosidad.

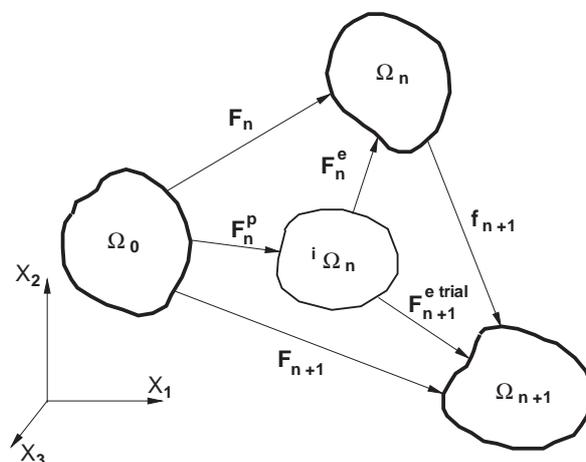


Figura 1: Esquema de configuraciones empleado en las relaciones cinemáticas y en la integración de la ecuación constitutiva.

La Figura 1 presenta un esquema de las configuraciones involucradas en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones, observándose la inclusión de una configuración adicional denominada *configuración intermedia* (denotada por  ${}^i\Omega_t$ ), la cual tiene la característica de ser una configuración libre de tensiones.

El algoritmo termo-elasto-plástico que se emplea en este trabajo surge como una extensión del modelo de plasticidad independiente del tiempo propuesto por García Garino (1993). El problema se descompone en: un problema elástico donde las variables plásticas no cambian (predictor termo-elástico) y un problema plástico donde el estado termo-elástico se mantiene

sin variaciones (corrector plástico), de modo que la resolución de ambos es equivalente a la solución del problema original. En el modelo plástico empleado se pretende mantener las ventajas del algoritmo de **García Garino (1993)**, asociadas a una eficiente integración de la ecuación constitutiva a nivel elemental.

## 2.2. Modelo constitutivo termo-elasto-plástico

A continuación se presentan algunos detalles de la cinemática asociada a las configuraciones observadas en la Figura 1. Si se desea obtener la actualización de una determinada configuración, por ejemplo una configuración anterior  $\varphi_n$ , a partir de la aplicación de un desplazamiento incremental  $\mathbf{u}_n$ , se tiene:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_n[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (3)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior conocida  $\varphi_n(\mathbf{X})$ , y al igual que los desplazamientos actuales  $\mathbf{u}_n$  son datos por lo cual resulta trivial la obtención configuración actualizada. Y de acuerdo con la Figura 1 y la ecuación (3), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual  $\mathbf{F}_{n+1}$  como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n \quad (4)$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (5)$$

y de (4) y (5) observa también que el *gradiente relativo*  $\mathbf{f}_{n+1}$  resulta:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (6)$$

En esta formulación se emplea la inversa del gradiente de deformación relativo  $\mathbf{f}_{n+1}^{-1}$ :

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (7)$$

donde (7) se puede obtener a partir de (6). En este trabajo la inversa del gradiente relativo se obtiene como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_{n+1}}^I \quad (8)$$

y resulta claro que se deben evaluar las derivadas de las funciones de forma en cada paso de tiempo. Por otra parte el gradiente de deformación total en (5), puede obtenerse de igual manera como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_n}^I \quad (9)$$

donde las derivadas se evalúan una sola vez respecto de la configuración de referencia.

La formulación empleada en este trabajo se corresponde con un esquema Lagrangeano Actualizado (FLA), y el algoritmo está basado en el propuesto por **García Garino (1993)**. A partir de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, considerando (2) y (5) se tiene:

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (10)$$

y a partir de esta última expresión es posible obtener la parte elástica del tensor de Finger según:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-\text{T}} (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-1} = \mathbf{f}_{n+1}^{-\text{T}} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (11)$$

El tensor elástico de prueba (*trial*) de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (11) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})^{\text{trial}} \right] \quad (12)$$

Las deformaciones de origen térmico resultan proporcionales al incremento térmico y a un coeficiente de dilatación térmica que se indica con el símbolo  $\alpha$ , para un caso de tensión plana puede escribirse:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{th} = f_\nu \alpha \Delta \theta_n \mathbf{1} \quad (13)$$

donde  $f_\nu = 1$ ; mientras que para los casos de deformación plana y axilsimetría la expresión (13) debe ser premultiplicada por  $f_\nu = 1 + \nu$ .

Se comprueba experimentalmente que cuando se calienta uniformemente un cuerpo elástico (isótropo y homogéneo) sin restricciones, el mismo se deforma libremente sin que aparezcan tensiones. Esto implica que las deformaciones totales deben ser iguales y opuestas a las deformaciones térmicas, en función de lo cual el tensor termoelástico de prueba de Almansi puede escribirse, a partir de (12) y (13), en forma general como:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{e}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{e}_{n+1}^{th} = \frac{1}{2} \left[ (1 - f_\nu \alpha \Delta \theta_n) \mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})^{\text{trial}} \right] \quad (14)$$

y con (14) se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} = K \text{tr} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (15)$$

en donde, considerando que  $\text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = -\frac{1}{2} \text{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})$ , la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida por:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = -\mu \text{dev} \left( [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \right) \quad (16)$$

Se comprueba si el estado de carga es plástico, a partir de la ecuación de Mises-Huber, que para este caso tiene la forma:

$$f(\tau, e^p, \theta) = \|\text{dev} [\boldsymbol{\tau}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_0(\theta) + A'(\theta) e^p] \leq 0 \quad (17)$$

siendo  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de tensiones de Kirchhoff (15),  $e^p$  es el parámetro de endurecimiento o deformación plástica efectiva, mientras que  $\sigma_0(\theta)$  y  $A'(\theta)$  son la tensión de fluencia y el módulo de endurecimiento del material, respectivamente, y ambos pueden verse como funciones dependientes de la temperatura.

Si no se sobrepasa la superficie de fluencia ( $f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}, e_n^p) \leq 0$ ), el estado es elástico con lo cual pueden adoptarse las deformaciones (12) y las tensiones (15) como el estado resultante. En caso contrario, si  $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ , es necesario corregir el estado elástico de prueba de acuerdo al esquema de la Figura 2.

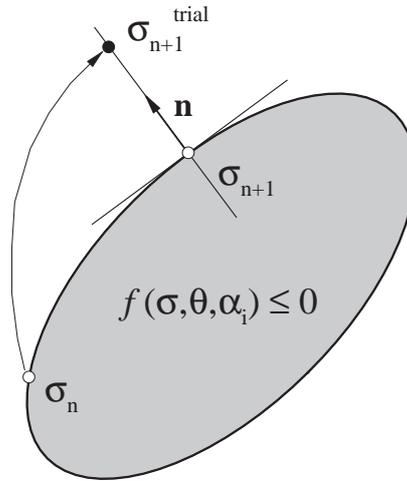


Figura 2: Representación conceptual del esquema de retorno radial para el modelo  $J_2$  elasto-plástico.

La regla de flujo establece que la velocidad de deformación plástica asociada a la configuración deformada o actual, puede escribirse a partir de la condición de máxima disipación plástica como:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, e^p, \theta)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (18)$$

y partir de la regla de flujo definida en (18), en donde  $\mathbf{n}$  es la dirección del flujo plástico en la configuración actual (ver Figura 2), el cambio en la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p$  se puede definir como:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^* (\dot{\gamma}^p \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma}^p \mathbf{N} \quad (19)$$

donde  $\phi^*$  implica una transformación del tipo *pull-back* para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original, y esta ecuación (19) puede discretizarse con un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^p - \mathbf{C}_n^p}{\Delta t} = 2\dot{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1} \quad (20)$$

esta expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo *push-forward* a la que indicaremos con  $\phi_*$ , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \phi_* \mathbf{C}_n^p + 2\dot{\gamma}^p \mathbf{n}_{n+1} \quad (21)$$

En variables espaciales, el primer término  $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p$  puede expresarse como:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} = \mathbf{b}_{n+1}^e \quad (22)$$

y para el segundo término  $\phi_* \mathbf{C}_n^p$ , se calcula de manera similar empleando para ello el tensor gradiente de la deformación total en el paso de tiempo actual ( $\mathbf{F}_{n+1}$ ) y aprovechando su relación el tensor gradiente de deformación relativo ( $\mathbf{f}_{n+1}$ ) resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_n^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (23)$$

con lo cual, de acuerdo a (11) se tiene:

$$\begin{aligned}\phi_* \mathbf{C}_n^p &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^{e-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}}\end{aligned}\quad (24)$$

Entonces el esquema de actualización del tensor elástico de Finger en variables espaciales se puede definir a partir de las ecuaciones (21), (22) y (24), obteniéndose:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} + 2\gamma^p \mathbf{n}_{n+1} \quad (25)$$

a partir de la cual puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} [(1 - f_\nu \alpha \Delta \theta_n) \mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}] = (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{\text{trial}} - 2\gamma^p \mathbf{n}_{n+1} \quad (26)$$

Aplicando la ecuación (16) en la (25) resulta:

$$\begin{aligned}-\mu \text{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}) &= -\mu \text{dev} ([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}}) + 2\mu \gamma^p \mathbf{n}_{n+1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu \gamma^p \mathbf{n}_{n+1}\end{aligned}\quad (27)$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras, el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (27) la parte volumétrica de las tensiones de modo que:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \text{tr} (\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (28)$$

Considerado que la regla de flujo es asociativa, ecuación (18), la evolución del parámetro de endurecimiento plástico esta definido por:

$$\dot{e}^p = \frac{e_{n+1}^p - e_n^p}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^p \quad (29)$$

y simplemente:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^p \quad (30)$$

El parámetro de consistencia plástico  $\gamma^p$ , puede obtenerse a partir de la función de Mises-Huber definida en (17), empleando las definiciones (27), (29) y (30), resulta:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}_{n+1}\| &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sigma_0 + A' \left( e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \gamma \right) \right] \\ \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu \Delta \gamma &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + A' e_n^p) + \frac{2}{3} A' \Delta \gamma \\ \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| + \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + A' e_n^p) &= \frac{2}{3} A' \Delta \gamma + 2\mu \Delta \gamma \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= \left( \frac{2}{3} A' + 2\mu \right) \Delta \gamma\end{aligned}\quad (31)$$

y a partir de (31) se puede definir una expresión para evolución del parámetro de consistencia:

$$\Delta \gamma = \frac{3 f_{n+1}^{\text{trial}}}{2A' + 6\mu} \quad (32)$$

Es importante destacar que este modelo elasto-plástico puede generalizarse para tener en cuenta los efectos viscosos tal como se ha demostrado en Castelló y Flores (2010), y más aun puede obtenerse un modelo termo-elasto-viscoplástico unificado a partir de la parametrización del comportamiento del material con la temperatura como se describe en Castelló (2012).

### 2.3. Ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto

Las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico pueden definirse a partir de las leyes físicas de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y cantidad de movimiento angular, en conjunto con la primera y segunda ley de la termodinámica, y adoptando un funcional adecuado que permita derivar las expresiones constitutivas (ver [Castelló \(2012\)](#) para más detalles).

La definición de la forma débil para la ecuación de movimiento del sólido deformable, a través de un principio como el de desplazamientos virtuales y para el caso de una Formulación Lagrangeana Actualizada termina siendo:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}_{AL} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega - \left( \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \right) = 0 \quad (33)$$

en (33) la primer integral resulta ser el trabajo virtual interno (a partir del par conjugado: tensor de deformaciones de Almansi  $\mathbf{e}_{AL}$  (26) y tensor de tensiones de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  (27)), la segunda integral representa el trabajo virtual externo de las fuerzas de inercia y por último las dos integrales restantes representan el trabajo virtual externo debido a las cargas aplicadas y las fuerzas másicas respectivamente.

Empleando un procedimiento similar al de desplazamientos virtuales y eligiendo las condiciones térmicas de borde adecuadas, se puede obtener la forma débil de la ecuación de equilibrio del calor :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \theta \rho C_{\kappa} \dot{\theta} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta \theta \mathbf{K}^{\theta} \nabla \theta d\Omega + \int_{\Omega} \delta \theta \left[ Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \right] d\Omega + \\ \int_{\Gamma_h} \delta \theta \left[ h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \delta \theta q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

la cual también está referida a la configuración deformada previa en el caso de una Formulación Lagrangeana Actualizada, y donde la primer integral representa la contribución de la capacidad calórica, la segunda integral es la difusión asociado a la conductividad térmica, la tercer integral involucra por otra parte el acoplamiento termoelástico y termoplástico, y por último las dos integrales en la segunda línea involucran las cargas térmicas en el contorno externas asociadas a convección, radiación y flujo por conducción.

El término de acoplamiento termoplástico queda fijado por la adopción de la función de energía libre y de las variables de estado involucradas, en caso de un modelo elasto-plástico con endurecimiento isótropo, el factor de acoplamiento termoplástico se puede evaluar como:

$$D_p = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p + \theta \boldsymbol{\varepsilon}^e : \frac{\partial \mathbf{C}(\theta)}{\partial \theta} : \mathbf{d}^p \quad (35)$$

en donde  $\mathbf{d}^p$  es el tensor velocidad de deformación plástica,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  es el tensor elástico de pequeñas deformaciones. El segundo término involucra básicamente el cambio en el tensor constitutivo tangente ( $\mathbf{C}$ ) debido a un cambio en la temperatura.

En el caso de un problema termomecánico con contacto, propio de los problemas industriales de conformado de metales, las ecuaciones (33) y (34) deben ser modificadas a los fines de incluir los términos en el contorno asociados a la interacción con las herramientas. En el trabajo [Castelló \(2012\)](#) se presenta una descripción general del problema de contacto y su tratamiento,

como así también un detalle del algoritmo de contacto bidimensional basado en la técnica de penalización que se ha empleado.

El contacto desde el punto de vista mecánico se puede observar como un vector de carga actuando sobre el contorno, el cual puede tener dirección normal ( $\bar{\mathbf{n}}$ ) o tangencial ( $\bar{\mathbf{a}}$ ) al contorno, la forma débil de las ecuaciones de movimiento de un sólido deformable con contacto resulta entonces:

$$\mathcal{Q}_M + \int_{\Gamma_c} (p_N \bar{\mathbf{n}} + t_T \bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (36)$$

en (36)  $p_N$  y  $t_T$  son las magnitudes de las fuerzas normal y tangencial, respectivamente, en la parte del contorno  $\Gamma_c$  en la cual se evidencia contacto; mientras  $\mathcal{Q}_M$  contiene el resto de los términos establecidos previamente en (33).

Por otra parte desde el punto de vista térmico el contacto involucra dos aspectos fundamentales, el primero está relacionado con la transmisión de calor entre los cuerpos en contacto por conducción, y además la generación de calor por fricción. Entonces la forma débil de la ecuación de equilibrio de calor de un sólido deformable con contacto es:

$$\mathcal{Q}_T - \int_{\Gamma_c} \delta \theta [k_c (p_N) (\theta^2 - \bar{\theta}^1) + \zeta_c (t_T \dot{g}_T^d)] d\Gamma = 0 \quad (37)$$

el primer término de (37) representa la conducción por contacto en donde interviene el coeficiente de transferencia  $k_c$  y el salto o diferencia térmica entre las superficies en contacto ( $\theta^2 - \bar{\theta}^1$ ), el segundo término representa la generación de calor por fricción en donde interviene la efusividad relativa de la interface  $\zeta_c$  y la potencia de contacto evaluada a partir de la fuerza tangencial y la velocidad de deslizamiento relativa  $\dot{g}_T^d$ . En (37)  $\mathcal{Q}_T$  contiene el resto de términos de la ecuación (34).

Las ecuaciones (33) a (37) representan las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto en forma débil, a partir de las cuales y empleando la técnica del método de elementos finitos, se puede obtener el sistema de discreto de ecuaciones para el análisis numérico del problema.

Para la solución del problema termomecánico acoplado se ha empleado un esquema de integración escalonado, en donde el problema se divide naturalmente en: (a) una fase mecánica con temperatura constante, y (b) posteriormente una fase térmica donde la configuración no se deforma. Esta subdivisión puede verse como un paso con deformaciones isotérmicas seguido de un paso con transferencia y difusión de calor sobre la geometría deformada, debido a esto el algoritmo utilizado se denomina "escalonado isotérmico".

### 3. APROXIMACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

La eficiencia de la aproximación en deformaciones impuestas que se utilizó en este trabajo, ya ha sido probada con éxito en trabajos anteriores, como Castelló y Flores (2008) y en las referencias que allí se mencionan. Esta aproximación consiste en la aplicación de un elemento triangular de bajo orden de interpolación y cuyos grados de libertad son únicamente los desplazamientos.

El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos, pero a diferencia de la aproximación convencional en triángulos lineales, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos, un elemento central sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a

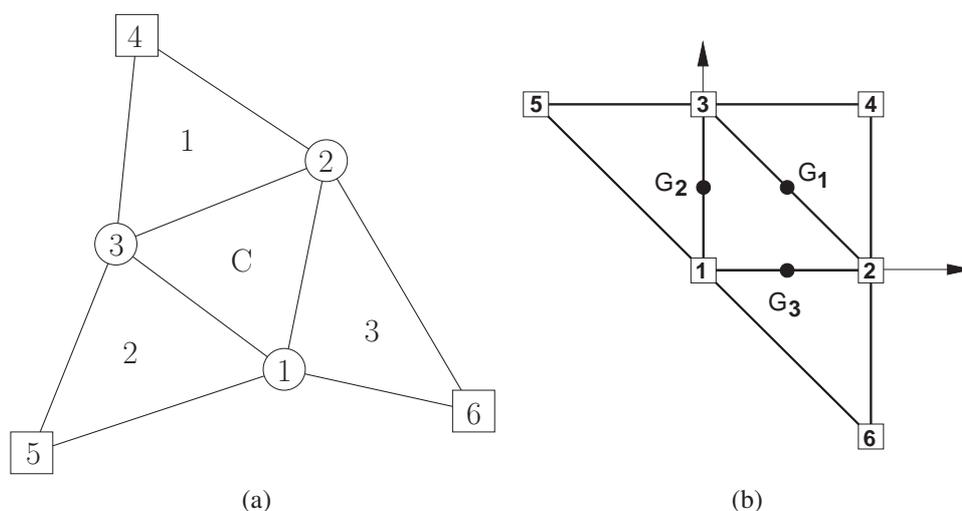


Figura 3: Parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas naturales.

los lados del elemento central de acuerdo a la Figura 3. Se observa en esta figura que se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, sin embargo puede verse la existencia de los tres elementos adyacentes. Se observa también en la Figura 3 que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos y de esta forma, si bien se parte de elementos triangulares lineales de tres nodos, se llega a una aproximación cuadrática cuyas funciones de forma no son las estándar. Las funciones de forma y los detalles de la aproximación pueden verse en los trabajos Castelló y Flores (2008) y Castelló (2012).

Siendo  $\mathbf{x}^I$  las coordenadas de un nudo en la configuración actual (deformada), la interpolación de la geometría resulta:

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{x}^I \quad (38)$$

y en el caso de emplear un esquema Lagrangeano Actualizado basado en la inversa del tensor gradiente relativo de deformación  $\bar{\mathbf{f}}^{-1}$ , entonces este gradiente resulta:

$$\bar{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \sum_{I=1}^6 \bar{N}_{I\mathbf{x}_{n+1}}^I \mathbf{x}_n^I \quad (39)$$

en donde  $\mathbf{x}_n^I$  hace referencia a las coordenadas de los nudos en el paso previo, y  $\bar{N}_{I\mathbf{x}}^I$  las derivadas de las funciones de forma evaluadas en los puntos de integración ( $G_i$ ) y promediadas en el elemento central. Estas derivadas deben evaluarse cada vez que se actualiza la configuración de referencia.

En el caso del problema térmico se ha empleado la aproximación estándar del triángulo de tres nodos (coordenadas de área  $L$ ), con estas funciones de forma la temperatura puede interpolarse a partir de los valores nodales como:

$$\theta = \sum_{I=1}^3 L^I \theta^I \quad (40)$$

Una opción que se ha explorado en este trabajo es la posibilidad de evaluar el gradiente térmico empleando las derivadas promediadas de las funciones de forma cuadráticas  $\bar{N}_{/x}^I$ , en lugar de emplear las derivadas de las funciones de forma lineal estándar de un triángulo. En este caso el gradiente térmico consistente con la formulación mecánica resulta entonces:

$$\nabla\theta = \sum_{I=1}^6 \bar{N}_{/x_{n+1}}^I \theta_n^I \quad (41)$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se estudian tres problemas axilsimétricos en grandes deformaciones con acoplamiento termomecánico: (a) el impacto de un proyectil contra una pared rígida, (b) el acortamiento de un tocho cilíndrico a diferentes velocidades, y (c) la extrusión directa de un tocho cilíndrico para obtener un eje de menor diámetro. En los primeros dos casos se estudia la generación de calor por deformación plástica, y a la vez se analiza la incidencia en la generación de calor de la velocidad de deformación. El tercer caso consiste en un problema de aplicación directa a la industria, y se estudian los efectos de la generación de calor por deformación plástica y por rozamiento entre la pieza y la herramienta.

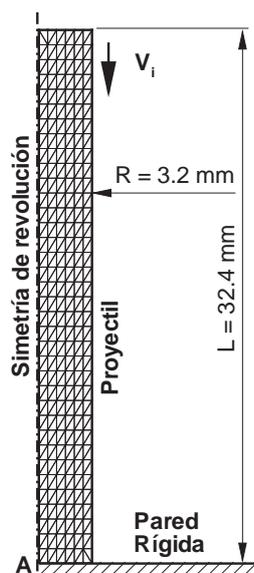


Figura 4: Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Geometría del problema y discretización en elementos triangulares empleada.

##### 4.1. Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida

Este problema axilsimétrico consiste en el estudio del impacto de una barra contra una pared rígida, considerando además el acoplamiento termomecánico debido a la evolución de la deformación plástica. El caso isotérmico de este problema se utiliza habitualmente como *benchmark* para determinar el comportamiento del elemento en la simulación de problemas de impacto, y suele denominarse en la literatura como experimento de la barra de Taylor. En el trabajo de Celentano (2002) se presenta un amplio estudio de este problema con acoplamiento termomecánico, donde se analiza la incidencia del material y de la velocidad del proyectil, además de validar los resultados numéricos con ensayos experimentales. Aquí, sin embargo, se analiza el

problema de impacto no isotérmico de un proyectil con las características presentadas en el trabajo de [García y Celentano \(2007\)](#).

En la Figura 4 se presenta un esquema de la geometría del problema. La barra de longitud 32,4 mm y radio 3,2 mm, se encuentra inicialmente sometida a una velocidad de 227 m/s. La pared rígida puede modelarse aplicando apoyos simples que solo permitan la deformación radial de esos puntos. El material del proyectil es cobre y las propiedades mecánicas del mismo son: módulo de Young  $E = 117$  GPa, módulo de Poisson  $\nu = 0,35$  y densidad  $\rho = 8920$  kg/m<sup>3</sup>. El comportamiento plástico se considera isótropo con endurecimiento lineal definido a partir de una tensión de fluencia  $\sigma_y = 400$  MPa y un módulo de endurecimiento  $A' = 100$  MPa. Las propiedades térmicas del cobre en tanto son: calor específico  $c = 460$  J/(kg K), conductividad  $K = 380$  W/(m K) y coeficiente de dilatación  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$  1/°C. Las propiedades, tanto térmicas como mecánicas, en este problema se consideran independientes de la temperatura.

La geometría se ha discretizado con 432 (6x36x2) elementos triangulares, según se muestra en la Figura 4. Esta cantidad de elementos resulta acorde a los problemas de deformaciones finitas en sólidos, más aun si se considera la elevada distorsión del proyectil después del impacto.

En la Figura 5a se muestra una gráfica del resultado obtenido con esta aproximación (TTR2D) en la evolución en el radio de la base que se deforma por el impacto por el impacto. Esta gráfica se compara con los resultados obtenidos en [García y Celentano \(2007\)](#), y los arrojados por el código [ABAQUS \(2010\)](#) aplicando un elemento cuadrilátero con una aproximación en deformaciones finitas con acoplamiento termomecánico denominado CAX4RT. Igualmente la Figura 5b presenta la evolución de la temperatura en el centro de la base (ver punto A en la Figura 4), que es donde se concentra la mayor deformación plástica debida al impacto. Se puede observar que los resultados son comparativamente buenos. Y en lo que respecta a la evolución de la temperatura, los resultados de este trabajo y los de [ABAQUS \(2010\)](#) resultan menos difusivos que lo observado en el trabajo de [García y Celentano \(2007\)](#).

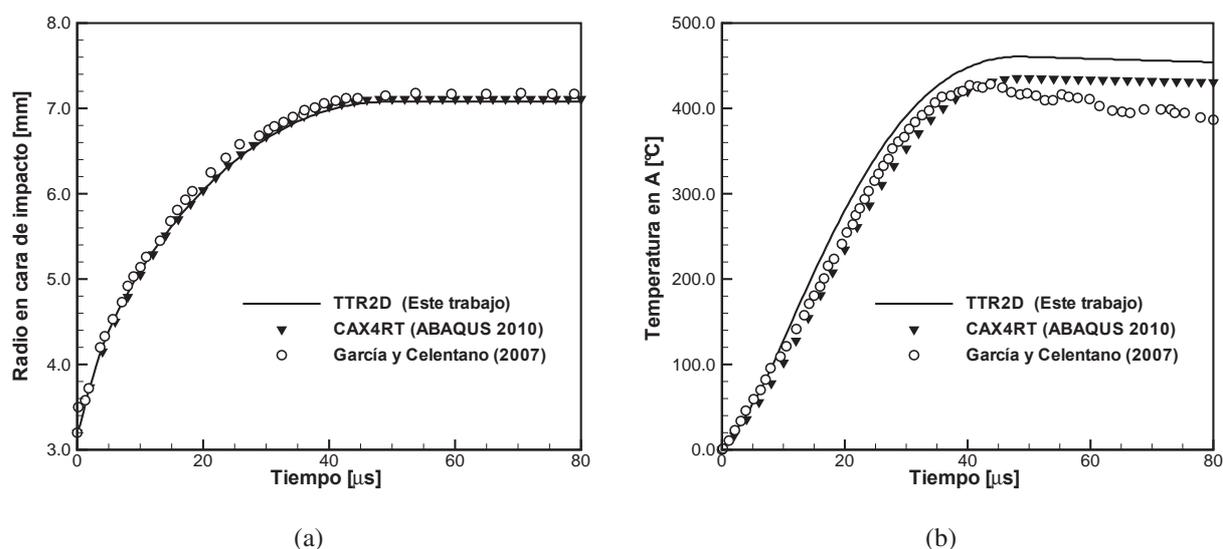


Figura 5: Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. (a) Evolución del radio de la barra en la cara de impacto. (b) Evolución de la temperatura en el centro de la cara de impacto.

Por otra parte en las Figuras 6 y 7 se puede observar la deformada después del impacto y sobre la misma la distribución de la deformación plástica efectiva y la distribución de la tempe-

ratura, respectivamente. Los resultados presentados corresponden a este trabajo (ver Figuras 6a y 7a) y a los arrojados por ABAQUS (2010) (ver Figuras 6b y 7b). Según se observa tienen una excelente concordancia, aun cuando se presenta una excesiva deformación de los elementos en el centro de la cara que hace impacto en la pared.

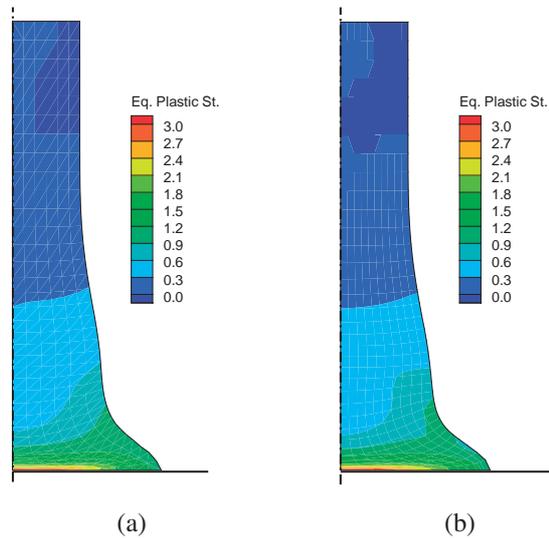


Figura 6: Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Deformada final y distribución de la deformación plástica efectiva. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010).

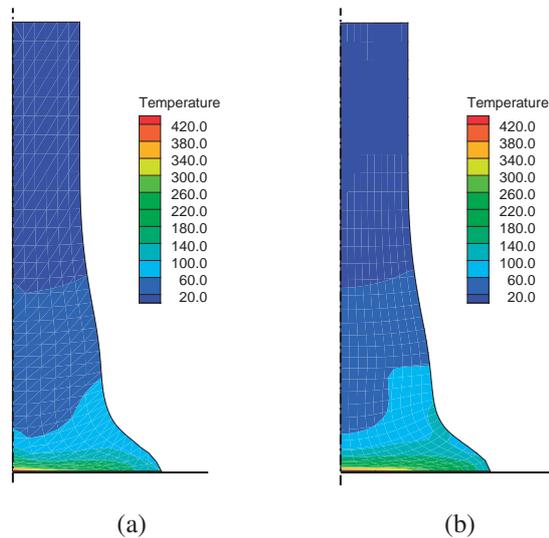


Figura 7: Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Deformada final y distribución de la temperatura. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010).

La Tabla 1 también muestra una comparativa de los resultados máximos arrojados por esta aproximación, frente a los resultados obtenidos en el trabajo de García y Celentano (2007) y con el código ABAQUS (2010). Se observa que estos últimos trabajos brindan resultados muy

similares, si bien utilizan aproximaciones diferentes, ya que ambos emplean elementos cuadriláteros. Los resultados obtenidos en este trabajo son cuantitativamente similares y se encuentran dentro de un rango de precisión aceptable.

Tabla 1: Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Valores máximos obtenidos en este trabajo y comparativa con otros resultados.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	$\theta_{max} [^{\circ}C]$	$R_{max} [mm]$
TTR2D (Este trabajo)	3.09	461	7.08
García y Celentano (2007)	3.20	428	7.10
CAX4RT (ABAQUS (2010))	3.21	436	7.11

#### 4.2. Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico

Este problema, introducido en el trabajo de Taylor y Becker (1983), consiste en la compresión de un tocho cilíndrico para reducir su longitud un 60 % de la longitud original. Por sus características este problema se enmarca en el campo de las grandes deformaciones elasto-plásticas, además de la distorsión de los elementos de la malla sufren una importante distorsión y se considera acoplamiento termomecánico (estudiándose la incidencia de la velocidad de deformación en los resultados). Se consideran dos velocidades: (a) un caso rápido donde la prensa se desplaza 9 mm en  $1,8 \times 10^{-3}$  s, y (b) un caso lento donde los 9 mm de desplazamiento de la prensa se logran en 1,8 s. La geometría del problema se observa en la Figura 8, el tocho cilíndrico de 30 mm de longitud y radio de 10 mm es comprimido por las mordazas rígidas de una prensa y se supone a estas superficies como perfectamente rugosas (no permiten el deslizamiento). La geometría se ha discretizado con un malla estructurada de 288 (12x12x2) elementos triangulares de tres nodos, como se observa en la misma figura.

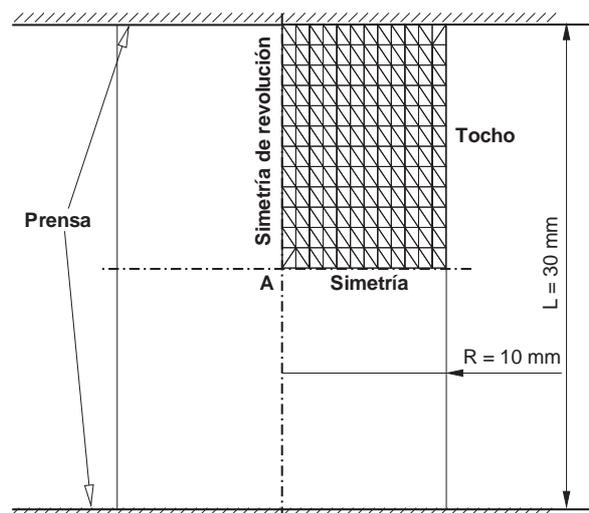


Figura 8: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Geometría del problema y malla empleada en el análisis.

El material usado es acero con un comportamiento elasto-plástico definido por el módulo de Young  $E = 200$  GPa, relación de Poisson  $\nu = 0,3$  y densidad de  $\rho = 7833$  kg/m<sup>3</sup>. Se asume un endurecimiento isótropo lineal, y tanto la tensión de fluencia  $\sigma_y = \sigma_y(\theta)$  como el

módulo de endurecimiento  $A' = A'(\theta)$  son funciones de la temperatura según la Figura 9. Las propiedades térmicas empleadas para este acero son: calor específico  $c = 586 \text{ J/(kg K)}$ , coeficiente de dilatación  $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$  y conductividad dependiente de la temperatura  $K = K(\theta)$ . La Tabla 2 muestra los parámetros mecánicos y térmicos que resultan dependientes de la temperatura.

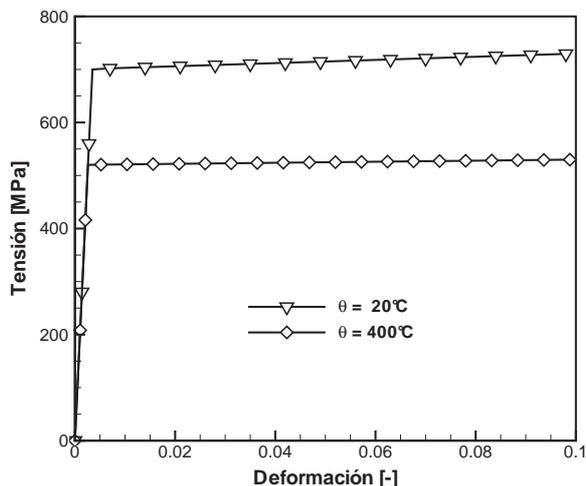


Figura 9: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura.

Tabla 2: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Parámetros del material dependientes de la temperatura.

Parámetro	20 °C	400 °C
Tensión de fluencia $\sigma_y$ [MPa]	700.0	520.0
Módulo de endurecimiento $A'$ [MPa]	300.0	100.0
Conductividad térmica $K$ [W/(m K)]	52.0	68.0

La geometría deformada del tocho cilíndrico y los niveles de deformación plástica equivalente (para el caso de carga lenta) son muy cercanos al caso isotérmico, la Tabla 3 muestra los valores máximos de la deformación plástica equivalente obtenidos en cada caso.

Tabla 3: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Deformaciones plásticas equivalentes máximas registradas y comparación con otros resultados.

Aproximación	$e_{max}^p$ [-]	
	Rápido	Lento
TTR2D (Este trabajo)	2.05	1.86
CAX4RT (ABAQUS (2010))	2.09	1.97

La Figura 10a muestra la evolución de la temperatura en el centro del tocho cilíndrico para ambos casos, los resultados se comparan con los arrojados por ABAQUS (2010) empleando el elemento cuadrilátero CAX4RT. Se observa que la respuesta de la aproximación propuesta

en este trabajo presenta pequeñas diferencias con respecto a la que se obtiene con **ABAQUS** (2010). La incidencia de la velocidad de deformación el proceso se observa en las mayores temperaturas para el caso rápido, esto está asociado a la falta de difusión de calor debido a los tiempos más cortos. Este es el mismo efecto que se observa en el impacto de un proyectil en el apartado anterior. Cuando los tiempos son más largos, la difusión de calor desde el centro del tocho hacia el contorno permite que las temperaturas desarrolladas sean menores.

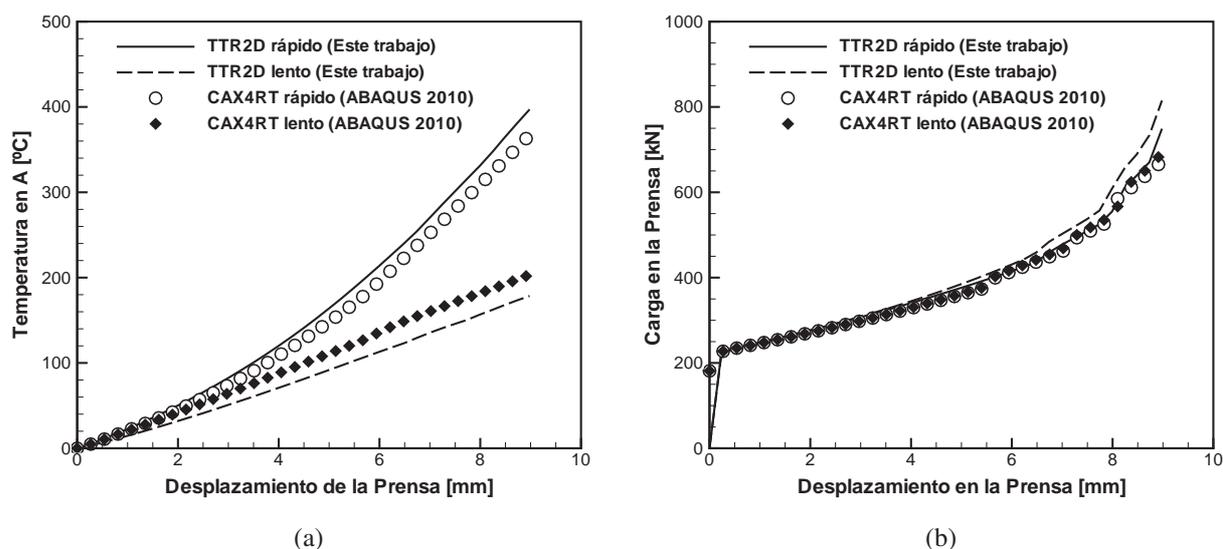


Figura 10: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. (a) Evolución de la temperatura en el centro del tocho en función del desplazamiento de la prensa. (b) Evolución de la carga en función del desplazamiento de la prensa.

Tabla 4: Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Temperaturas máximas registradas y comparación con otros resultados.

Aproximación	Temperatura [°C]	
	Rápido	Lento
TTR2D (Este trabajo)	397.1	178.5
CAX4RT ( <b>ABAQUS</b> (2010))	368.2	203.9

La evolución de la carga en la prensa, necesaria para producir la deformación del tocho, se puede observar en la Figura 10b. También se presentan los resultados obtenidos con **ABAQUS** (2010). Como puede verse en esta figura el efecto de la alta temperatura en el tocho, en el caso del movimiento rápido de la prensa, provoca una disminución en la carga necesaria para llevar a cabo el proceso de deformación (a altas temperaturas la tensión de fluencia y el módulo de endurecimiento son menores). Las curvas obtenidas con el elemento TTR2D resultan muy próximas a las obtenidas con CAX4RT, solo muestran una leve diferencia sobre el final del proceso. Los valores de carga en el caso lento, difieren mínimamente del caso isotérmico estudiado en el capítulo anterior.

### 4.3. Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico

Este problema representa una aplicación industrial concreta, básicamente consiste en la reducción del diámetro por extrusión directa de un tocho para obtener un eje cilíndrico. En este problema se considera no solamente la generación de calor por deformación plástica si no que además se tiene en cuenta el calor generado por la fricción de la barra cilíndrica con las herramientas (matriz).

La geometría del problema se presenta en la Figura 11, el tocho cilíndrico tiene 300 mm de largo y un radio inicial de 100 mm. El tocho recibe el movimiento de un punzón que desciende a velocidad prefijada, lo cual también puede modelarse como una velocidad aplicada sobre la superficie superior del mismo. El desplazamiento del punzón es de 25 cm y el proceso se logra en un tiempo de 11 segundos. El contacto se modela como el de un cuerpo deformable (tocho) y un sólido rígido (perfil de la matriz). La generación de calor por fricción se logra considerando una efusividad  $\zeta_c = 0,5$  (lo cual implica que el calor generado se distribuye en partes iguales entre el tocho y la matriz). El coeficiente de rozamiento considerado es de  $\mu = 0,1$ , y la temperatura inicial del conjunto tocho-matriz es de 20 °C.

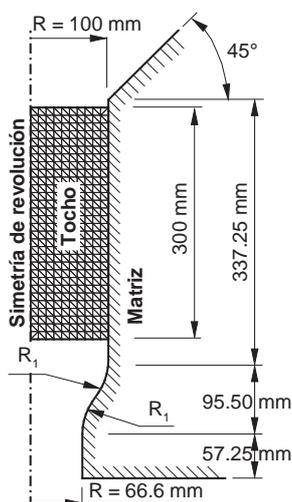


Figura 11: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Geometría del problema y discretización en elementos triangulares empleada para su análisis.

El material del tocho cilíndrico es un aluminio con las siguientes características mecánicas: módulo de Young  $E = 69$  GPa, relación de Poisson  $\nu = 0,33$  y densidad  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>. El modelo de endurecimiento es del tipo isótropo lineal, y resulta dependiente de la temperatura de acuerdo a la Tabla 5. El efecto de la temperatura en el modelo de endurecimiento se puede observar en forma gráfica en la Figura 12a. En lo que respecta a las características térmicas del material son: calor específico  $c = 880$  J/(kg K), coeficiente de dilatación  $\alpha = 8,42 \times 10^{-5}$  1/°C, y conductividad térmica dependiente de la temperatura  $K = 204$  W/(m K) a 0 °C y  $K = 225$  W/(m K) a 300 °C.

Tabla 5: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Parámetros de endurecimiento plástico dependientes de la temperatura.

Parámetro	20 °C	50 °C	100 °C	150 °C
Tensión de fluencia $\sigma_y$ [MPa]	60.0	55.0	50.0	45.0
Módulo de endurec. $A'$ [MPa]	53.0	48.0	38.0	33.0

La Figura 11 muestra además la malla de 600 (30x10x2) elementos empleada en la discretización de la geometría del tocho. El problema ha sido resuelto también empleando el código ABAQUS (2010) con el elemento cuadrilátero en deformaciones mejoradas para problemas termomecánicos CAX4RT y el código VULCAN con la formulación presentada en el trabajo de Celentano (2010).

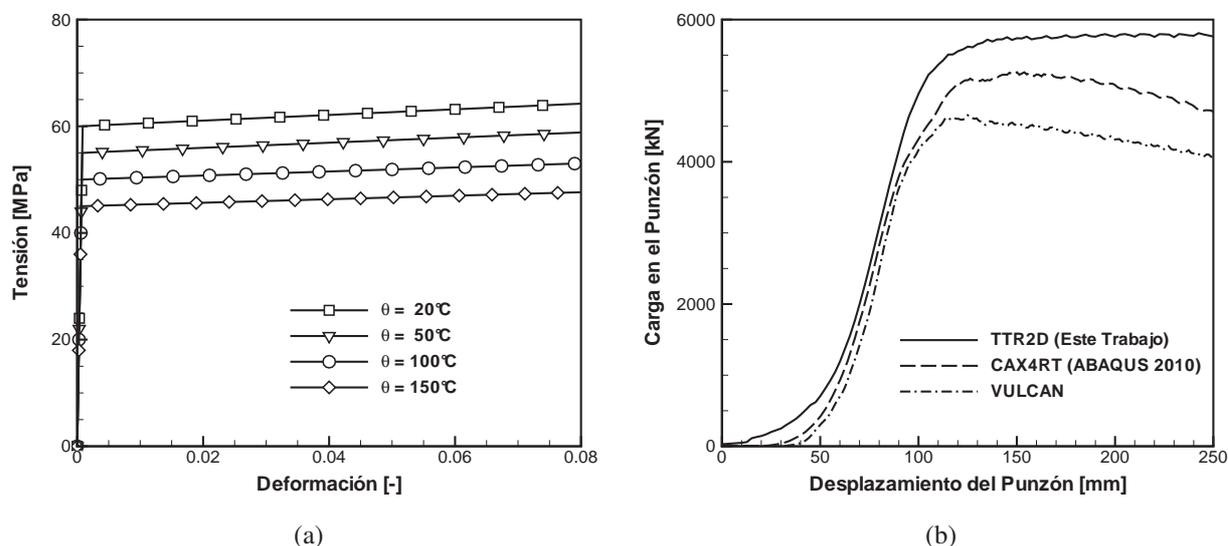


Figura 12: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. (a) Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura. (b) Evolución de la carga en función del desplazamiento de la prensa.

La Figura 12b presenta la evolución de la carga en el punzón en la medida que se produce el desplazamiento del mismo. Las discrepancias en los valores máximos de carga, que suceden cuando el tocho ha alcanzado el final del segundo radio de empalme  $R_1$  (ver Figura 11), son importantes entre los tres códigos empleados en el análisis de este problema. Las diferencias son justificables debido a las distintas aproximaciones empleadas, los distintos elementos y los diferentes algoritmos de contacto empleados. El elemento triangular presentado en este trabajo presenta regularmente un comportamiento más rígido, desde el punto de vista de las cargas, con respecto a los cuadriláteros.

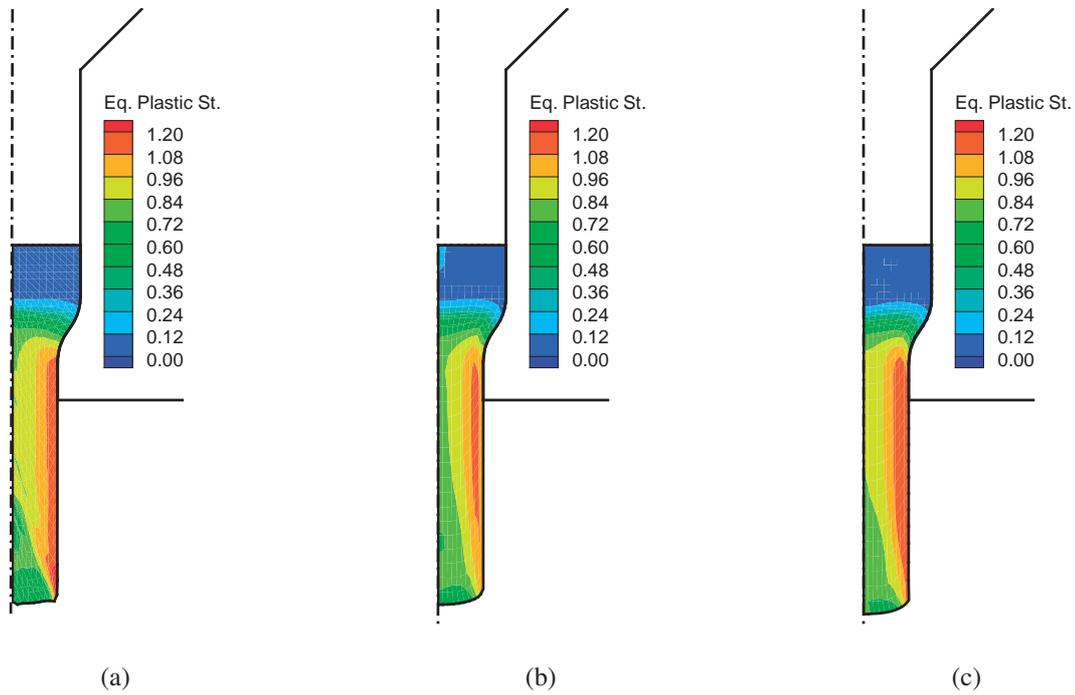


Figura 13: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Distribución de la deformación plástica efectiva en la geometría deformada. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010). (c) VULCAN (formulación de Celentano (2010)).

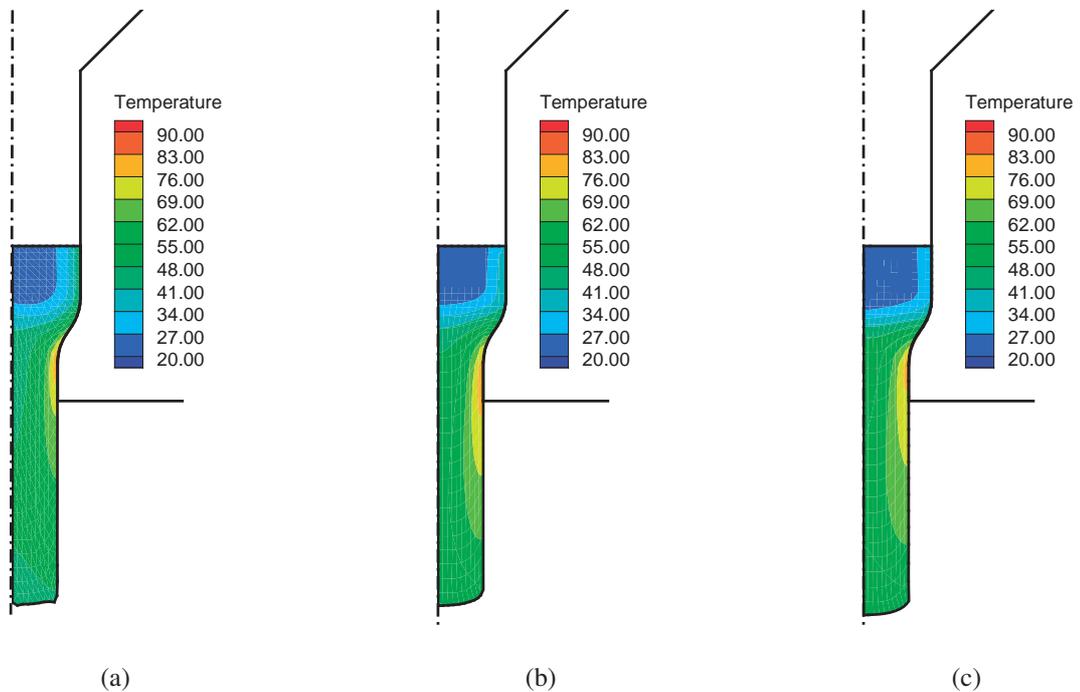


Figura 14: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Distribución de la temperatura en la geometría deformada. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010). (c) VULCAN (formulación de Celentano (2010)).

La Figura 13 muestra una comparativa de la distribución de las deformaciones plásticas efectivas, en la Figura 13a las obtenidas en este trabajo y las arrojadas por los códigos ABAQUS (2010) y VULCAN en la Figura 13b y Figura 13c, respectivamente. Se puede observar que las distribuciones son muy similares, no solo las zonas donde se presentan los mayores niveles, sino que también las magnitudes.

Respecto de la distribución de temperatura, la Figura 14 muestra los resultados obtenidos en este trabajo y los compara con los correspondientes a ABAQUS (2010) y VULCAN. Se puede observar que el mapa de temperaturas en el tocho es muy similar en los tres casos, ubicándose en la zona de estricción de la matriz el punto de mayor desarrollo de temperatura. En esa zona se conjugan los efectos de generación de calor por deformación plástica (estricción del tocho) y por rozamiento con las herramientas.

La Tabla 6 presenta los valores máximos de deformación plástica equivalente y de temperatura obtenidos con el elemento TTR2D, y se los compara con los máximos arrojados por los otros códigos. Los valores observados resultan muy próximos entre sí, con diferencias relativas menores al 8 %.

Tabla 6: Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Valores máximos obtenidos en este trabajo y comparativa con otros resultados.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	$\theta_{max} [^{\circ}\text{C}]$
TTR2D (Este trabajo)	1.36	87.2
VULCAN (form. Celentano (2010))	1.25	82.8
CAX4RT (ABAQUS (2010))	1.13	81.8

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han estudiado problemas termomecánicos, estos problemas han permitido evaluar el comportamiento de la aproximación propuesta en este trabajo. Los resultados muestran semejanzas con respecto a los obtenidos por otros autores y códigos, y las diferencias se encuentran dentro del rango de precisión ingenieril.

La aproximación en deformaciones impuestas basada en un elemento triangular, muestra un comportamiento levemente más rígido que los cuadriláteros empleados comúnmente en los trabajos contra los cuales se contrastan resultados. Esto no solo se observa en los trabajos donde se presenta plasticidad, sino que además puede verse en la evolución de la temperatura en procesos no isotérmicos.

En los problemas con acoplamiento termomecánico se han presentado resultados comparativamente adecuados, frente a los divulgados por otros autores y los brindados por otros códigos numéricos. La respuesta de la aproximación propuesta en este trabajo se muestra menos difusiva (del punto de vista térmico), en particular en los problemas de muy corta duración (impacto). En los problemas estudiados, los perfiles térmicos muestran similitudes cuando se los compara con otros resultados presentes en la literatura. Además los problemas donde las propiedades térmicas y mecánicas son dependientes de la temperatura, muestran la incidencia de este efecto en los resultados (asociadas al ablandamiento térmico del material). Las diferencias en los valores máximos de temperatura indicados en este trabajo se encuentran dentro del 8 % lo cual es ingenierilmente aceptable considerando la aproximación empleada.

El algoritmo escalonado propuesto en la solución del problema térmico y mecánico acoplado resulta eficiente, aun cuando en este trabajo no se hace uso de la diferencia de escalas de

tiempo que existe entre los dos problemas lo cual sería mucho más conveniente. Se ha utilizado un algoritmo escalonado del tipo isotérmico el cual, si bien es condicionalmente estable, resulta adecuado cuando se lo emplea dentro de un esquema explícito de integración de las ecuaciones de gobierno tal como el que ha sido utilizado. Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento del esquema termomecánico explícito empleado es acorde al objetivo del análisis. La aproximación térmica a nivel elemental es la más simple posible en problemas bidimensionales, triángulo de tres nodos con funciones de forma lineal, lo cual se observa en las diferencias obtenidas cuando se comparan los resultados con cuadriláteros. Los resultados muestran además que las modificaciones realizadas al algoritmo de contacto, para contemplar la generación y transmisión de calor por fricción y contacto con las herramientas, respectivamente, se comportan de manera adecuada en el estudio de los problemas de aplicación industrial.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero del Dpto de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C.

## REFERENCIAS

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.10.1*. Simulia, Dassault Systèmes Corporation, Providence, EE.UU., 2010.
- Adam L. y Ponthot J.P. A coupled thermo-viscoplastic formulation at finite strains for the numerical simulation of superplastic forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 139:514–520, 2003.
- Andrade-Campos A., Menezes L., y Teixeira-Dias F. Numerical analysis of large deformation processes at elevated temperatures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3947–3959, 2006.
- Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers and Structures*, 75:261–290, 2000.
- Armero F. y Simo J. A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9:749–782, 1993.
- Bertram A. An alternative approach to finite plasticity based on material isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, 15:353–374, 1998.
- Bertram A. Finite thermoplasticity based on isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, 19:2027–2050, 2003.
- Castelló W. *Análisis numérico de sólidos bidimensionales en grandes deformaciones elasto-viscoplásticas con acoplamiento termomecánico*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2012.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando un elemento con deformaciones impuestas. *Mecánica Computacional*, XXV:329–349, 2006.
- Castelló W. y Flores F. A triangular finite element with local remeshing for the large strain analysis of axisymmetric solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:332–343, 2008.
- Castelló W. y Flores F. Análisis de problemas elasto-viscoplásticos en conformado de metales. *Mecánica Computacional*, XXIX:4199–4217, 2010.
- Celentano D. Thermomechanical analysis of de taylor impact test. *Journal of Applied Physics*, 91(6):3675–3686, 2002.
- Celentano D. Thermomechanical simulation and experimental validation of wire drawing pro-

- cesses. *Journal of Materials Processing Technology*, 25(7):546–556, 2010.
- César de Sá J. y Natal Jorge R. New enhanced strain element incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248, 1999.
- Felippa C. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- García C. y Celentano D. Análisis del impacto de una bala de cabeza plana contra una pared rígida. *VI Encuentro de Modelos Físicos y Matemáticos en Ingeniería, 15-16 Noviembre de 2007, UNiversidad de Santiago de Chile*, 2007.
- García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- García Garino C., Ponthot J.P., Mirasso A., Koeune R., Jeunechamps P.P., y Cargelio C. Numerical simulation of large strain rate dependent j2 problems. *Mecánica Computacional*, XXV:1927–1946, 2006.
- Green A. y Naghdi P. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 18:251–281, 1965.
- Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969.
- Mandel J. Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et en grande transformation élastoplastique. *International Journal of Solids and Structures*, 19:573–578, 1983.
- Perzyna P. Fundamental problems visco-plasticity. *Advanced in Applied Mechanics*, G. Kuerti editor; Academic Press, 9:243–377, 1966.
- Perzyna P. Thermodynamic theory of plasticity. In Chia-Shun Yih, editor, *Advanced in Applied Mechanics*, Academic Press, 11:313–355, 1971.
- Ponthot J.P. Unified stress update algorithm for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18:91–126, 2002.
- Ponthot J.P., Garino C., y Mirasso A. Large strain elasto/viscoplastic constitutive model. theory and numerical scheme. *Mecánica Computacional*, XXIV:441–454, 2005.
- Simo J. y Rifai M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- Souza Neto E., Peric D., Dutko M., y Owen D.R.J. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3277–3296, 1996.
- Souza Neto E., Pires F., y Owen D. A new f-bar based method for linear triangles and tetrahedra in the finite strain analysis of nearly incompressible solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003, CIMNE, Barcelona*, 2003.
- Taylor L. y Becker E. Some computational aspects of large deformation rate dependent plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:251–278, 1983.
- Ulz M. A green-naghdi approach to finite anisotropic rate-independent and rate-dependent thermo-plasticity in logarithmic lagrangean strain-entropy space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:3262–3277, 2009.
- Čanađja M. y Brnić J. Associative coupled thermoplasticity at finite strain with temperature-dependent material parameters. *International Journal of Plasticity*, 20:1851–1874, 2004.
- Zienkiewicz O., Rojek J., Taylor R., y Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583, 1998.