

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS INVERSO PARA CÁSCARAS SOMETIDAS A GRANDES DESPLAZAMIENTOS EN RÉGIMEN ELÁSTICO

Víctor Fachinotti y Alejandro E. Albanesi

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, vfachino@intec.unl.edu.ar, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar, <http://www.cimec.org.ar>

Palabras Clave: Método de los Elementos Finitos Inverso, Cáscaras, MITC, grandes deformaciones, Elasticidad.

Resumen.

El Método de Elementos Finitos Inverso (IFEM) es, básicamente, el Método de los Elementos Finitos (FEM) aplicado a la resolución del problema de hallar la forma descargada de un cuerpo tal que adopte una forma deseada bajo cargas conocidas. Aquí abordaremos problemas geométricamente no lineales en cuerpos asimilables a cáscaras, compuestos de materiales elásticos. El punto de partida, es decir el elemento finito “directo” cuyo “inverso” es el aquí propuesto, es el elemento de cáscara MITC4, cuadrángulo de cuatro nodos donde el bloqueo por corte es tratado por interpolación mixta de las componentes tensoriales de la deformación. Este elemento posee cinco grados de libertad por nodo, tres de ellos para describir el desplazamiento de la superficie media, y los dos restantes para definir el campo director. A su vez, el campo director es actualizado de manera de garantizar su inextensibilidad. Para validación, resolvemos la flexión de una delgada losa en voladizo usando FEM para calcular su configuración deformada. Ésta es adoptada como dominio de análisis para IFEM, mostrando la habilidad de IFEM para recuperar la forma descargada original.

1. INTRODUCCIÓN

En trabajos previos, hemos desarrollado IFEM para diseñar piezas elásticas asimilables a sólidos Fachinotti et al. (2008) y vigas Albanesi et al. (2010) de forma que adopten una geometría deseada tras sufrir grandes deformaciones bajo cargas conocidas. Ahora nos proponemos extender IFEM a cáscaras. Partimos del simple y popular elemento de cáscara MITC4 (Bathe y Dvorkin, 1986), al que recientemente (Fachinotti et al., 2011) hemos dotado del tratamiento del campo director propuesto por Simo et al. (1990) a fin de garantizar la inextensibilidad del director.

La extensión de IFEM a cáscaras apunta a resolver eficientemente problemas como el de diseño de un álabe de turbina, estructura laminar flexible que debe adoptar una forma dictada por estudios aerodinámicos a una velocidad angular dada, problema que tratáramos previamente usando elementos sólidos (Fachinotti et al., 2008).

2. CINEMÁTICA DE LA CÁSCARA

De acuerdo a la teoría de cáscaras de Mindlin-Reissner, un segmento recto normal a la superficie media A^0 en la configuración descargada B^0 permanece recto tras la deformación, pero no necesariamente normal a la superficie media A en la configuración deformada B y viceversa: un segmento recto que es normal a A no proviene necesariamente de un segmento normal a A^0 . Esta pérdida de la normalidad es efecto de la deformación transversal por corte.

La posición de cualquier punto $\mathbf{X} \in B^0$ puede escribirse como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{X}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{h}{2} \mathbf{T}(\xi_1, \xi_2), \quad (1)$$

donde $\bar{\mathbf{X}} \in A^0$, \mathbf{T} es el vector director en la configuración B^0 , h es el espesor de la cáscara y $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ son las coordenadas naturales, $-1 \leq \xi_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$. En vista de la hipótesis precedente, tras la deformación el punto $\mathbf{X} \in B^0$ ocupa la posición

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{h}{2} \mathbf{t}(\xi_1, \xi_2), \quad (2)$$

donde $\bar{\mathbf{x}} \in A$ y \mathbf{t} es el vector director en la configuración deformada.

Ambos directores \mathbf{t} y \mathbf{T} son unitarios y apuntan en la dirección del espesor de la cáscara; uno de ellos puede suponerse normal a su respectiva superficie media, el otro generalmente no será normal a su respectiva superficie media a causa de la deformación por corte.

Definimos las bases convectivas material y espacial:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} \quad (3)$$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i} \quad (4)$$

donde $(*)_{,i}$ denota derivada con respecto a la coordenada natural ξ_i . Nótese que $\mathbf{g}_3 = h\mathbf{t}/2$ y $\mathbf{G}_3 = h\mathbf{T}/2$ no dependen de ξ_3 , o sea, se mantienen constantes a través del espesor de la cáscara.

La base $\{\mathbf{G}^j\}$ dual de $\{\mathbf{G}_i\}$ resulta de la relación:

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_{ij} \quad (5)$$

2.1. Interpolación de la geometría de la cáscara

Aproximemos las posiciones (1) y (2) de la manera usual en FEM para cáscaras:

$$\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathbf{X}}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^4 h \varphi_k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{T}_k \quad (6)$$

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathbf{x}}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^4 h \varphi_k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{t}_k \quad (7)$$

donde $\bar{\mathbf{X}}_k \in A^0$ (o $\bar{\mathbf{x}}_k \in A$) denota la posición del nodo $k = 1, 2, 3, 4$ sobre la superficie media indeformada (o deformada), \mathbf{T}_k (o \mathbf{t}_k) es el versor director en la configuración indeformada (o deformada) en el nodo k , y φ_k es la función de forma bilineal asociada al nodo k

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4} (1 + \xi_1 \xi_1^k) (1 + \xi_2 \xi_2^k), \quad k = 1, \dots, 4 \quad (8)$$

donde (ξ_1^k, ξ_2^k) denota las coordenadas naturales del nodo k .

Las ecuaciones (6) y (7) pueden escribirse de la manera concisa

$$\mathbf{X} = \mathbf{N} \mathbf{Q} \quad (9)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{N} = [\varphi_1 \quad \frac{\xi_3}{2} h \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_4 \quad \frac{\xi_3}{2} h \varphi_4], \quad \varphi_i = \varphi_i \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \mathbf{T}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \\ \mathbf{T}_2 \\ \bar{\mathbf{X}}_3 \\ \mathbf{T}_3 \\ \bar{\mathbf{X}}_4 \\ \mathbf{T}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{t}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{t}_2 \\ \bar{\mathbf{x}}_3 \\ \mathbf{t}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}_4 \\ \mathbf{t}_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

3. DEFORMACIÓN

Elegimos como medida de deformación al tensor de Green-Lagrange que, expresado en la base $\{\mathbf{G}^i\}$, tiene la forma:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (13)$$

con las componentes (covariantes) definidas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} - \mathbf{X}_{,i} \cdot \mathbf{X}_{,j}) \quad (14)$$

Con \mathbf{x} y \mathbf{X} interpoladas según las ecuaciones (9) y (10), las componentes covariantes de \mathbf{E} resultan

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{Q}) \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,j} + \mathbf{N}_{,j}^T \mathbf{N}_{,i}) \quad (16)$$

En notación de Voigt, las componentes E_{ij} de un tensor de deformación simétrico como \mathbf{E} se ordenan en el vector $\check{\mathbf{E}}$ de la forma

$$\check{\mathbf{E}} = [E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{23} \ 2E_{13}]^T \quad (17)$$

Luego, la relación entre deformación y posiciones, dada por la ecuación tensorial (15), toma la forma

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{11} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{33} \\ 2\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{12} \\ 2\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{23} \\ 2\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{13} \end{bmatrix}}_{B(\mathbf{q})} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{11} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{33} \\ 2\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{12} \\ 2\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{23} \\ 2\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{13} \end{bmatrix}}_{B(\mathbf{Q})} \mathbf{Q} \quad (18)$$

3.1. Restricción de inextensibilidad del vector director

Siguiendo a Simo et al. (1990), imponemos la restricción de inextensibilidad del vector director \mathbf{t}_i en un nodo cualquiera i exigiendo que su variación $\delta\mathbf{t}_i$ verifique:

$$\mathbf{t}_i \cdot \delta\mathbf{t}_i = 0 \quad (19)$$

Siendo $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ uno de los vectores de la base global fija $\{\mathbf{e}_i\}$, definimos la transformación ortogonal

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{e}_3 \quad (20)$$

Ahora, la restricción (19) puede escribirse como:

$$\delta\boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (21)$$

con

$$\delta\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\lambda}_i^T \delta\mathbf{t}_i \quad (\text{no se suma en } i) \quad (22)$$

En adelante, imponemos esa condición implícitamente suponiendo que $\delta\boldsymbol{\tau}_i$ es un vector en el plano cartesiano fijo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\delta\boldsymbol{\tau}_i = \delta\tau_{i1} \mathbf{e}_1 + \delta\tau_{i2} \mathbf{e}_2 \quad (23)$$

En ese caso, rescribimos la ecuación (22) como

$$\delta\mathbf{t}_i = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i \delta\boldsymbol{\tau}_i \quad (\text{no se suma en } i) \quad (24)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i$ es la matriz formada por las dos primeras columnas de $\boldsymbol{\lambda}_i$. Nótese que al adoptar $\delta\boldsymbol{\tau}_i$ en lugar de $\delta\mathbf{t}_i$, el número de grados de libertad por nodo se reduce a 5.

En IFEM, idéntica restricción aplica al vector director nodal \mathbf{T}_i : su variación $\delta\mathbf{T}_i$ debe satisfacer

$$\mathbf{T}_i \cdot \delta\mathbf{T}_i = 0 \quad (25)$$

Luego, introducimos

$$\delta\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_i^T \delta\mathbf{T}_i \quad (\text{no se suma en } i) \quad (26)$$

donde \mathbf{A}_i es la matriz ortogonal tal que

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{e}_3 \quad (27)$$

Ahora, la restricción (25) toma la forma

$$\delta\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (28)$$

Una vez más, imponemos esa condición implícitamente suponiendo que $\delta\mathbf{T}_i$ es un vector en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, y rescribimos la ecuación (26) como

$$\delta\mathbf{T}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \delta\mathbf{T}_i \quad (\text{no se suma en } i) \quad (29)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}_i$ es la matriz formada por las dos primeras columnas de \mathbf{A}_i .

3.2. Interpolación de las componentes covariantes de deformación

El cálculo “directo” de la deformación usando la ecuación (15) con las posiciones \mathbf{X} y \mathbf{x} interpoladas según las ecuaciones (6) y (7) da resultados satisfactorios cuando se usan elementos de alto orden; en caso contrario, la rigidez de los elementos aumenta espuriamente a medida que la relación espesor/longitud de la cáscara decrece. Este defecto es el bien conocido “bloqueo por corte”, y afecta la predicción de tensiones aún en elementos cúbicos, especialmente si están distorsionados (Bucalem y Bathe, 1993).

Una solución al “bloqueo por corte” consiste en la utilización de elementos finitos mixtos apropiados, eligiéndose para este trabajo el elemento MITC4 (MITC por interpolación mixta de componentes tensoriales, 4 por el número de nodos) propuesto por Bathe y Dvorkin (1986). En cada plano $\xi_3 = \text{constante}$, definimos los puntos de “ajuste” $P_i^\pm(\xi_3)$, $i = 1, 2$, situados en la mitad de los lados $\xi_i = \pm 1$. Luego, se reemplaza la deformación E_{i3} calculada directamente con la ecuación (15) por la deformación “impuesta”

$$\bar{E}_{i3}(\xi_j, \xi_3) = \frac{1 + \xi_j}{2} E_{i3}(P_j^+(\xi_3)) + \frac{1 - \xi_j}{2} E_{i3}(P_j^-(\xi_3)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j \quad (30)$$

o

$$\bar{E}_{i3} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \bar{\mathbf{M}}_{i3} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{M}}_{i3} \mathbf{Q}) \quad (31)$$

con

$$\bar{\mathbf{M}}_{i3} = \frac{1 + \xi_j}{2} \mathbf{M}_{i3}(P_j^+(\xi_3)) + \frac{1 - \xi_j}{2} \mathbf{M}_{i3}(P_j^-(\xi_3)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j \quad (32)$$

Nótese que \bar{E}_{i3} es constante en dirección i , es decir que está “empobrecida” con respecto a E_{i3} en esa dirección. De aquí en adelante, a todos los efectos, las cantidades “directas” serán reemplazadas por las “impuestas”, olvidando la barra superpuesta que identifica a estas últimas para simplificar la notación.

4. EQUILIBRIO DE CÁSCARAS FRENTE A GRANDES DEFORMACIONES

Sea \mathbf{S} el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, de componentes (contravariantes) S^{ij} en la base $\{\mathbf{G}_i\}$, o sea:

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (33)$$

De acuerdo a la notación de Voigt para tensores de tensión simétricos, las componentes de \mathbf{S} se ordenan en el vector

$$\check{\mathbf{S}} = [S^{11} \quad S^{22} \quad S^{33} \quad S^{12} \quad S^{23} \quad S^{13}]^T \quad (34)$$

Para un material elástico, la tensión de Piola-Kirchhoff puede expresarse como una función de la deformación de Green-Lagrange, o sea:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})) \quad (35)$$

Dado que \mathbf{S} y \mathbf{E} forman un par conjugado, el principio de los trabajos virtuales puede escribirse como

$$\underbrace{\int_{B^0} \delta \check{\mathbf{E}}^T \check{\mathbf{S}} dV}_{\delta W^{\text{int}}} = \delta W^{\text{ext}} \quad (36)$$

donde el término de la izquierda representa el trabajo virtual (interno) realizado por las tensiones frente a una variación de la deformación, y el de la derecha el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas (dato).

Dada $\check{\mathbf{E}}$ por la ecuación (18), su variación resulta

$$\delta \check{\mathbf{E}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} \quad (37)$$

Por la restricción de inextensibilidad, usando la ecuación (24) expresamos la variación de \mathbf{E} como

$$\delta \check{\mathbf{E}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \lambda \delta \mathbf{q}^* \quad (38)$$

con

$$\delta \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \boldsymbol{\tau}_1 \\ \delta \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \delta \boldsymbol{\tau}_2 \\ \delta \bar{\mathbf{x}}_3 \\ \delta \boldsymbol{\tau}_3 \\ \delta \bar{\mathbf{x}}_4 \\ \delta \boldsymbol{\tau}_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

donde $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de dimensión 3×3 y $\mathbf{0}_{3 \times j}$ es la matriz nula de dimensión $3 \times j$.

Ahora, el trabajo virtual interno puede expresarse como

$$\delta W^{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^{*T} \underbrace{\left(\int_{B^0} [\mathbf{B}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}]^T \check{\mathbf{S}} dV \right)}_{\Psi^{\text{int}}} \quad (40)$$

quedando así definido el vector de fuerzas internas nodales Ψ^{int} . Teniendo en cuenta que para IFEM q es dato y Q es incógnita, cambiamos de dominio de integración:

$$\Psi^{\text{int}} = \int_B [B(q)\lambda]^T \check{S} J^{-1} dv \quad (41)$$

donde J es el determinante del gradiente de deformación F , dado por

$$J = \det F = \frac{(g_1 \times g_2) \cdot g_3}{(G_1 \times G_2) \cdot G_3} \quad (42)$$

Nótese que Ψ^{int} depende de Q , la incógnita para IFEM, sólo a través de S y J .

Por su parte, siempre podremos escribir δW^{ext} de la forma

$$\delta W^{\text{ext}} = \delta q^{*T} \Psi^{\text{ext}}(Q, q) \quad (43)$$

donde Ψ^{ext} es el vector de cargas nodales.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (40) y (43) y que δq^* es arbitrario, la ecuación (41) se reduce al sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que define el equilibrio en MEF:

$$\Psi(Q, q) = \Psi^{\text{int}}(Q, q) - \Psi^{\text{ext}}(Q, q) = 0 \quad (44)$$

a resolver iterativamente.

4.1. Solución de la ecuación no lineal de equilibrio

El sistema de ecuaciones no lineales (44) es resuelto iterativamente usando la técnica de Newton-Raphson, que garantiza tasa de convergencia cuadrática siempre que se parta de una predicción inicial que esté dentro del radio de convergencia de la solución buscada. Para IFEM, q es dato y Q la incógnita a determinar. Conocida la predicción $Q^{(k)}$ para la iteración k , si $\|\Psi(Q^{(k)})\| > \epsilon$ donde ϵ es un valor suficientemente pequeño prefijado (aquí adoptamos $\epsilon = 10^{-5} \|\Psi^{\text{ext}}\|$), se procede a una nueva iteración $k+1$ donde se resuelve la ecuación de equilibrio linealizada

$$\Psi(Q^{(k)}, q) + K(Q^{(k)}) \Delta Q^* = 0 \quad (45)$$

donde K designa la matriz tangente

$$K = \frac{\partial \Psi}{\partial Q^*} \quad (46)$$

y

$$\Delta Q^* = \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_1 \\ \Delta \Gamma_1 \\ \Delta \bar{X}_2 \\ \Delta \Gamma_2 \\ \Delta \bar{X}_3 \\ \Delta \Gamma_3 \\ \Delta \bar{X}_4 \\ \Delta \Gamma_4 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Resolviendo el sistema lineal (45), obtenemos ΔQ^* y podemos actualizar inmediatamente la posición nodal:

$$\bar{X}_i^{(k+1)} = \bar{X}_i^{(k)} + \Delta \bar{X}_i \quad (48)$$

4.2. Actualización del vector director nodal

Ahora bien, la actualización del vector director nodal \mathbf{T}_i requiere particular atención a fin de preservar su longitud unitaria. De hecho, su tratamiento es idéntico al que diéramos al vector director \mathbf{t}_i para el elemento “directo” de cáscara (Fachinotti et al., 2011), siguiendo a Simo et al. (1990). Conocido $\Delta\mathbf{T}_i$ como solución del sistema lineal (45) en la iteración $k + 1$:

1. Se calcula el incremento de \mathbf{T}_i :

$$\Delta\mathbf{T}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i^{(k)} \Delta\mathbf{T}_i \quad (49)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ es la matriz formada por las dos primeras columnas de la matriz de rotación $\mathbf{A}_i^{(k)}$, cuyo valor para la iteración inicial es

$$\mathbf{A}_i^{(0)} = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_i) \mathbf{I}_{3 \times 3} + \widehat{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_i} + \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_i) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_i)}{1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_i} \quad (50)$$

siendo $\widehat{\mathbf{v}}$, para todo vector \mathbf{v} , la matriz antisimétrica cuyo vector axial es \mathbf{v} . Nótese que $\mathbf{A}_i^{(0)} \equiv \boldsymbol{\lambda}_i$ es la matriz ortogonal de la transformación (20).

2. Se actualiza el vector director:

$$\mathbf{T}_i^{(k+1)} = \cos \|\Delta\mathbf{T}_i\| \mathbf{T}_i^{(k)} + \frac{\text{sen} \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|} \Delta\mathbf{T}_i \quad (51)$$

3. Se calcula el incremento de la matriz de rotación:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{A}_i = \cos \|\Delta\mathbf{T}_i\| \mathbf{I} + \frac{\text{sen} \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|} \widehat{\mathbf{T}_i^{(k)} \times \Delta\mathbf{T}_i} \\ + \frac{1 - \cos \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|^2} (\mathbf{T}_i^{(k)} \times \Delta\mathbf{T}_i) \otimes (\mathbf{T}_i^{(k)} \times \Delta\mathbf{T}_i) \end{aligned} \quad (52)$$

4. Se actualiza la matriz de rotación:

$$\mathbf{A}_i^{(k+1)} = \Delta\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^{(k)} \quad (53)$$

4.3. Cálculo de la matriz tangente

La matriz tangente \mathbf{K} se nutre de contribuciones provenientes de las fuerzas internas y externas, a saber:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \Psi^{\text{int}}}{\partial \mathbf{Q}^*} + \frac{\partial \Psi^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{Q}^*} = \mathbf{K}^{\text{int}} + \mathbf{K}^{\text{ext}} \quad (54)$$

El término \mathbf{K}^{ext} , que aparece si las fuerzas dependen de la configuración original, no recibirá aquí mayor consideración.

La contribución de las fuerzas internas puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{int}} = \underbrace{\left\{ - \int_B [\mathbf{B}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}]^T \frac{d\check{\mathbf{S}}}{d\check{\mathbf{E}}} [\mathbf{B}(\mathbf{Q})]^T J^{-1} dv \right\}}_{\mathbf{K}^{\text{mat}}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} \\ + \underbrace{\left\{ - \int_B [\mathbf{B}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}]^T \check{\mathbf{S}} \frac{dJ}{d\mathbf{Q}} J^{-2} dv \right\}}_{\mathbf{K}^{\text{geo}}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} \end{aligned} \quad (55)$$

Siendo el vector director nodal \mathbf{T}_i la función de $\Delta\mathbf{T}_i$ detallada en la Sección 4.2, resulta

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{d\mathbf{T}_i} = \left[\frac{\text{sen } \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{T}_i^{(k)} \otimes \Delta\mathbf{T}_i \right) + \left(\frac{\text{cos } \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|} - \frac{\text{sen } \|\Delta\mathbf{T}_i\|}{\|\Delta\mathbf{T}_i\|^2} \right) \Delta\mathbf{T}_i \otimes \Delta\mathbf{T}_i \right] \tilde{\mathbf{A}}_i^{(k)} \quad (56)$$

Luego:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d\mathbf{T}_1}{d\mathbf{T}_1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d\mathbf{T}_2}{d\mathbf{T}_2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d\mathbf{T}_3}{d\mathbf{T}_3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d\mathbf{T}_4}{d\mathbf{T}_4} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Finalmente, dado J por la ecuación (42), resulta

$$\frac{dJ}{d\mathbf{Q}} = -\frac{J}{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3} \left[\mathbf{N}_{,1}^T (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3) + \mathbf{N}_{,2}^T (\mathbf{G}_3 \times \mathbf{G}_1) + \mathbf{N}_{,3}^T (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \right] \quad (58)$$

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN

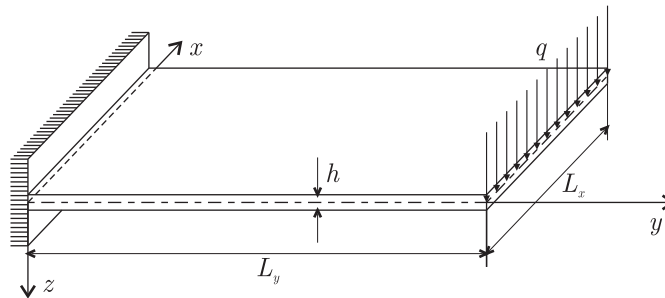


Figura 1: Losa delgada en voladizo sujeta a flexión.

Sea la losa en voladizo de la Figura 1, donde $L_x = 0,9$ m, $L_y = 2$ m, $h = 0,005$ m, $q = 1,5$ kN/ L_x , compuesta de un material elástico lineal con módulo de elasticidad $E = 210$ GPa y coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

En primer lugar, usaremos los elementos finitos “directos” de cáscara tipo MITC4 desarrollados por Fachinotti et al. (2011), que siguen el trabajo de Bathe y Dvorkin (1986) para prevenir el bloqueo por corte y tratan el campo director de la forma propuesta por Simo et al. (1990) para satisfacer la restricción de inextensibilidad. Discretizamos el dominio rectangular de la losa usando elementos cuadrados de 5 cm de lado. La malla resultante posee 720 elementos y 779 nodos, cada uno de ellos con 5 grados de libertad.

Llamemos $\bar{\mathbf{X}}_i^0$ a las coordenadas de los nodos sobre la superficie media descargada y \mathbf{T}_i^0 a los vectores directores nodales, en este caso normales a la superficie media descargada. Como solución de este análisis directo, se obtienen las coordenadas $\bar{\mathbf{x}}_i$ de los nodos sobre la superficie

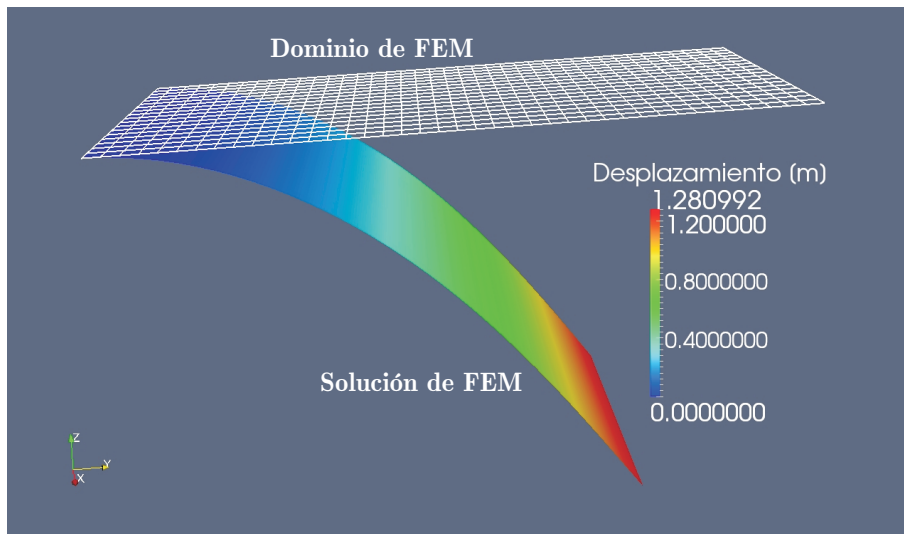


Figura 2: Losa flexionada: dominio y solución FEM.

media deformada y los vectores directores \mathbf{t}_i en la configuración deformada, que en general no son normales a la superficie media deformada. La configuración deformada y la magnitud de los desplazamientos así calculados se muestran en la Figura 2.

Luego, procedemos al análisis inverso con $\bar{\mathbf{x}}_i$ y \mathbf{t}_i como datos, para calcular $\bar{\mathbf{X}}_i$ y \mathbf{T}_i . La configuración descargada y la magnitud de los desplazamientos como solución IFEM se muestran en la Figura 3.

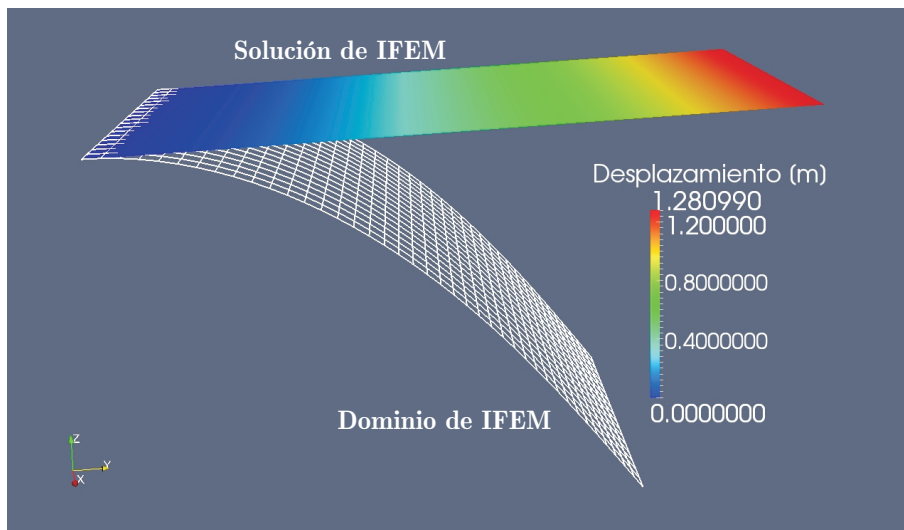


Figura 3: Losa flexionada: dominio y solución IFEM.

La Figura 4 muestra los errores $\|\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_i^0\|/L_y$ en la posición y $\|\mathbf{T}_i - \mathbf{T}_i^0\|$ en el director para toda la malla. Teniendo en cuenta que se resuelve la ecuación no lineal de equilibrio (44) con una tolerancia $\epsilon = 10^{-5} \|\Psi^{\text{ext}}\|$, el hecho de que los errores relativos máximos, tanto en la posición como en el director, sean inferiores a 10^{-6} evidencia la gran precisión de IFEM.

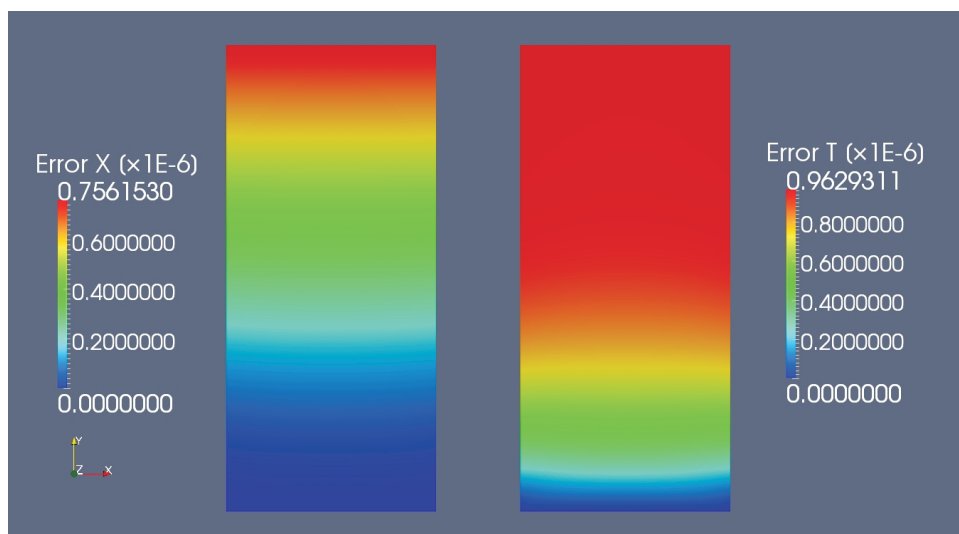


Figura 4: Losa flexionada: errores en posición y director.

6. CONCLUSIONES

Hemos cumplido aquí con el objetivo que nos propusiéramos al formular el elemento de cáscara “directo” MITC4 (Fachinotti et al., 2011): formular su respectivo “inverso”, que nos permita determinar la configuración indeformada de una pieza para que, tras grandes deformaciones en el rango elástico bajo la acción de cargas conocidas, adquiera una forma deseada.

Con este aporte, completamos nuestra librería de elementos finitos inversos para el diseño de piezas sujetas a grandes deformaciones elásticas, que cuenta ya con elementos para problemas en sólidos tridimensionales (Fachinotti et al., 2008) y vigas (Albanesi et al., 2010).

REFERENCIAS

- Albanesi A.E., Fachinotti V.D., y Cardona A. Inverse finite element method for large-displacement beams. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 84:1166–1182, 2010.
- Bathe K.J. y Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 22:697–722, 1986.
- Bucalem M.L. y Bathe K.J. Higher-order MITC general shells elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 36:3729–3754, 1993.
- Fachinotti V.D., Albanesi A.E., y Huespe A.E. Elementos finitos MITC para cáscaras sometidas a grandes deformaciones elásticas. *Mecánica Computacional*, XXX:845–855, 2011.
- Fachinotti V.D., Cardona A., y Jetteur P. A finite element model for inverse design problems in large deformations anisotropic hyperelasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 74:894–910, 2008.
- Simo J.C., Fox D.D., y Rifai M.S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 79:21–70, 1990.