

UN ELEMENTO FINITO TRIANGULAR NURBS SIMPLIFICADO PARA ANÁLISIS DE TENSIONES

Claudio E. Jougard^a, Carlos J. Sarpero^b y Francisco J. Ferrari^c

^a*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires, Mozart 2300, C1407IVT, Buenos Aires, Argentina, jougard@gmail.com*

^b*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Avellaneda, Ramón Franco 5050 (1874). Villa Dominico, Avellaneda, Buenos Aires, Argentina.*

^c*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco, Av. Hipólito Yrigoyen 288, General Pacheco, Tigre, Buenos Aires, Argentina.*

Palabras Clave: elementos finitos, NURBS, dominios curvos.

Resumen: Se presenta en este trabajo la deducción de las matrices de rigidez para elementos finitos triangulares con contornos formados por curvas NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) muy usadas en los sistemas CAD. Para definir las funciones de forma se utiliza una configuración geométrica de referencia con lados rectos basada en las coordenadas de los vértices y sobre esta configuración se definen las clásicas funciones de forma polinómicas lineales y cuadráticas. Asumiendo que las desviaciones de la geometría real con respecto a la configuración de referencia son muy pequeñas es posible resolver las integrales de elemento en forma simplificada ignorando los términos de mayor orden en estas desviaciones sin necesidad de recurrir a complejas reglas de integración numérica. Además el elemento contiene toda la información de la geometría de su contorno por lo que no requiere consultas posteriores al motor geométrico del CAD para hacer refinamientos sucesivos de la malla.

1 INTRODUCCION

Actualmente existe una mayor integración entre el diseño asistido por computadora (CAD) y los programas de análisis por elementos finitos. Sin embargo los sistemas de CAD utilizan una representación de la geometría bastante más elaborada que los elementos finitos usuales. Esto se debe, en parte a las necesidades diferentes de cada sector. Los sistemas de diseño requieren, por ejemplo, una descripción precisa de superficies complejas para poder ser manufacturadas mediante control numérico (CAM), en otros casos como en la industria automotriz el diseño de carrocerías requiere uniones de superficies con continuidad de curvatura (C^2) o mayores para tener transiciones suaves de reflejos. Esto contrasta con las pobres descripciones de la geometría empleadas en elementos finitos donde prácticamente se utilizan elementos con apenas continuidad C^0 para la mayoría de los análisis (Cottrel et al., 2009).

Esta deficiencia en la representación de la geometría en los programas de análisis puede ocasionar problemas de precisión, incluso en problemas donde la geometría inicial es bastante simple. (Hughes et al, 2005; Sevilla et al., 2008). Podemos citar, por ejemplo, el análisis de inestabilidad de estructuras sensibles a imperfecciones donde pequeñas modificaciones de la geometría pueden ocasionar variaciones significantes de las respuestas (Godoy, 1996).

La mayoría de los programas de CAD usan NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) como tecnología estándar para representar la geometría de los componentes de un diseño. La descripción de curvas y superficies NURBS “*trimeadas*” en la forma que se las conoce actualmente tiene sus orígenes en la década del 70 (Rogers, 2000). Las NURBS son formas muy flexibles que permiten representar formas de geometría libre como así también círculos y cónicas de manera exacta (Piegl y Tiller, 1997) que son muy empleadas en procesos de fabricación industrial. Sin embargo la mayoría de los programas comerciales de análisis por elementos finitos sólo contempla elementos con lados de forma polinomial. La utilización de elementos finitos con geometría NURBS además de representar exactamente la geometría, tienen la ventaja de evitar la comunicación con el modelador CAD cuando es necesario hacer refinamientos de malla pues toda la información de la geometría queda contenida en el elemento.

Se han desarrollado diversos elementos finitos con geometría NURBS, entre los más citados tenemos la formulación *isogeométrica* de Hughes et al (2005) que utiliza elementos finitos con funciones NURBS tanto para definir la geometría como para el análisis. Otra formulación es la NEFEM (NURBS Enhanced Finite Element Method) de Sevilla et al (2008) que utiliza tetraedros con caras NURBS y solamente utiliza caras curvas en las superficies de contorno manteniendo elementos de caras planas en el interior del dominio, en este caso se ha utilizado una interpolación cartesiana para las funciones de forma, esto es, definida directamente en coordenadas cartesianas. En relación al uso de triángulos con interpolación exacta de la geometría podemos citar los trabajos de Ubach y Oñate (2008), que utilizan triángulos de Bézier (Farin, 2005) para análisis de láminas con funciones de forma polinómicas cúbicas y a Mäkipelto (2005) que desarrolló elementos triangulares para análisis de tensiones con contornos NURBS usando funciones de mezclado racionales (Gordon y Hall, 1973) para la geometría y funciones de forma polinómicas en coordenadas de área para el análisis.

Los elementos finitos curvos son más costosos que los elementos finitos de lados rectos por lo tanto parece conveniente limitar su utilización en el contorno y usar los tradicionales elementos de lados rectos en el interior del dominio. En este trabajo presentamos un elemento triangular con contorno NURBS, partimos de un elemento con forma de triángulo de Bezier

(Farin, 2002) que tiene la ventaja de poder representar no sólo triángulos con contornos NURBS sino también los clásicos elementos finitos con geometría polinomial. Finalmente se llega a un triángulo NURBS simplificado que combina las funciones de forma del triángulo de Bézier en los contornos curvos con las funciones de forma del elemento de lado recto. Se llega a un elemento que pasa el *Test de la Parcela* (Patch Test) (Hughes, 2000). Se utiliza una interpolación cuadrática en coordenadas de área para los desplazamientos. Se muestra la deducción de las matrices de rigidez para este elemento.

2 DESCRIPCION PARAMETRICA DE CURVAS

En esta sección mostraremos la descripción de las curvas NURBS. Estas curvas se definen por segmentos y cada segmento se puede representar en forma alternativa por curvas de Bézier que nos permitirán hacer una interpolación sencilla de la geometría del triángulo.

2.1 Curvas NURBS

Una curva NURBS se define por la posición de sus puntos de control \mathbf{P}_i y sus pesos asociados w_i (ver figura 1). Con los puntos de control se define la *poligonal de control* que gobierna la forma de la curva y con los pesos se maneja la atracción de la curva hacia los puntos de control.

En forma analítica una curva NURBS $\mathbf{r}(t)$ de grado p con $n+1$ puntos de control se define en forma paramétrica en función de un parámetro t como

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i} \quad (1)$$

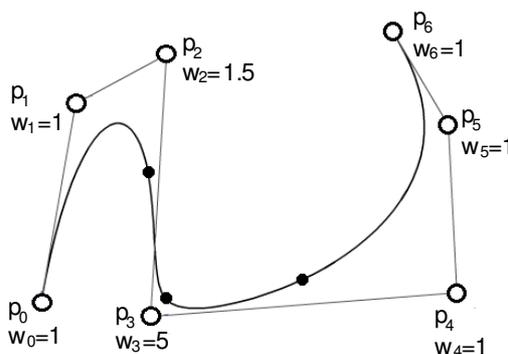


Figura 1: Curva NURBS y su poligonal de control.

Donde $N_{i,p}(t)$ son las funciones base B-Spline de grado p , que se definen sobre un *vector de nodos* (*knots*) \mathbf{T} que contiene coordenadas paramétricas de los nodos como

$$\mathbf{T} = \left\{ \underbrace{a, a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_n, \underbrace{b, b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

Donde a y b son los valores del parámetro t al inicio y final de la curva, respectivamente. Los primeros $p+1$ nodos tienen el mismo valor a del nodo inicial y los últimos $p+1$ nodos

tienen el mismo valor b del nodo final. Usualmente se adopta $a=0$ y $b=1$, por lo tanto el parámetro t varía entre $[0,1]$. En la figura 1 los puntos interiores de la curva indican la posición de los nodos utilizados. Además tenemos un total de $m+1$ nodos, estando relacionado el número de nodos con la cantidad n de puntos de control y el grado p de las funciones base como

$$m = n + p + 1 \quad (3)$$

Las funciones base B-Spline $N_{i,p}(t)$ se definen en forma recursiva comenzando con funciones constantes por segmentos para $p=0$ como

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

Y para $p=1,2,3,\dots$, ellas se definen como

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (5)$$

Cada función base B-Spline $N_{i,p}(t)$ es un polinomio de grado p definido por segmentos que es nulo fuera del intervalo $[t_i, t_{i+p+1})$. Luego si quisiéramos conocer la variación de una curva NURBS en el intervalo $[t_i, t_{i+1})$, deberíamos considerar las funciones base $N_{j,p}(t)$ con $j=i-p, i-p+1, i-p+2, \dots, i-1, i$.

2.2 Representación homogénea de curvas NURBS

La forma de una curva NURBS se define por la posición de sus puntos de control \mathbf{P}_i y sus pesos asociados w_i . Los puntos de control se definen mediante sus coordenadas x_i, y_i .

$$\mathbf{P}_i = \{x_i \quad y_i\}^T \quad (6)$$

Usando coordenadas homogéneas podemos identificar al punto de control \mathbf{P}_i y su peso asociado w_i como

$$\mathbf{P}_i^w = \{w_i x_i \quad w_i y_i \quad w_i\}^T \quad (7)$$

Notemos que las coordenadas del punto \mathbf{P}_i se obtienen dividiendo todas las coordenadas de \mathbf{P}_i^w por la última coordenada w_i . Esta transformación es conocida como mapeamiento de perspectiva H centrado en el origen (Piegl y Tiller, 1997)

$$\mathbf{P}_i = H(\mathbf{P}_i^w) = H(w_i x_i \quad w_i y_i \quad w_i) = \{x_i \quad y_i\}^T \quad (8)$$

Usando puntos de control ponderados podemos definir la curva NURBS en forma no racional como

$$\mathbf{r}^w(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i^w \quad (9)$$

Se puede demostrar (Piegl y Tiller, 1997) que las coordenadas de un punto cualquiera de la curva NURBS se pueden obtener aplicando la transformación de perspectiva H como

$$\mathbf{r}(t) = H(\mathbf{r}^w(t)) \quad (10)$$

2.3 Inserción de nodos en una curva NURBS

La forma de una curva NURBS es gobernada por la posición de los puntos de control y si queremos obtener un mayor control sobre la forma es posible *insertar* puntos de control adicionales pero sin alterar ni la forma ni la parametrización de la curva. Como la cantidad de nodos se incrementa en uno cada vez que se agrega un nuevo punto de control, este proceso se conoce como *inserción de nodos* (Piegl y Tiller, 1997) y se muestra en la figura 2

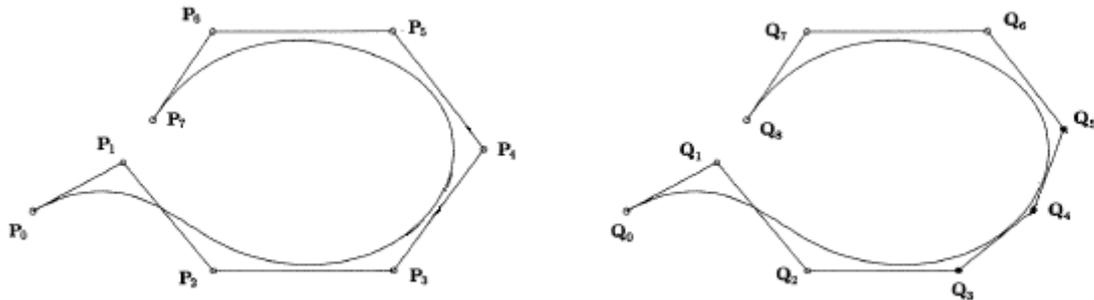


Figura 2: a) NURBS original b) NURBS con nodo adicional.

Supongamos que tenemos una curva NURBS de grado p definida sobre un vector de nodos $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}^T$ y con $n+1$ puntos de control \mathbf{P}_i e insertamos un nodo adicional t' entre los nodos originales $[t_k, t_{k+1})$ se puede demostrar (Piegl y Tiller, 1997) que es posible obtener una nueva representación, sin que se altere la descripción geométrica ni paramétrica de la curva, como

$$\mathbf{r}^w(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(t) \mathbf{Q}_i^w \quad (11)$$

Donde se ha agregado un punto de control adicional y se han modificado los puntos de control existentes y sus respectivas funciones B-Spline asociadas. Sin embargo, por la propiedad de soporte local de las funciones base B-Spline se puede demostrar que la mayoría de las funciones no se modifica, esto es

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,p}(t) &= N_{i,p}(t) & i = 0, \dots, k-p+1 \\ \bar{N}_{i+1,p}(t) &= N_{i,p}(t) & i = k+1, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

Además los puntos de control modificados son

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^w &= \mathbf{P}_i^w & i = 0, \dots, k-p \\ \mathbf{Q}_i^w &= \alpha_i \mathbf{P}_i^w + (1-\alpha_i) \mathbf{P}_{i-1}^w & i = k-p+1, \dots, k \\ \mathbf{Q}_i^w &= \mathbf{P}_{i-1}^w & i = k+1, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (13)$$

Siendo

$$\alpha_i = \frac{t' - t_i}{t_{i+p} - t_i} \quad i = k-p+1, \dots, k \quad (14)$$

Notemos que si la curva NURBS es de grado p sólo se modifican p puntos de control y sus respectivas funciones B-Spline.

2.4 Mallado con triángulos NURBS

Las curvas NURBS se utilizan para definir el contorno del dominio a utilizar. En la figura 3 a la izquierda se muestra un dominio cuyo contorno está formado por una curva NURBS y donde se ha omitido el polígono de control pero muestran los nodos de la curva. A la derecha se muestra el mallado de la región donde los elementos del contorno curvo contienen un lado completo entre nodos de la curva. Si se debe refinar la malla se deberán insertar nodos intermedios en la curva

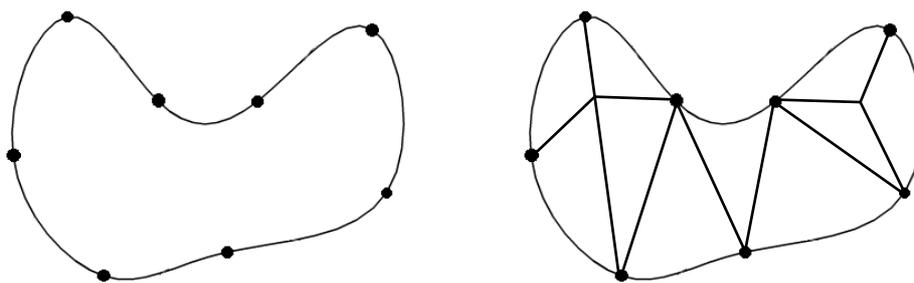


Figura 3: a) Contorno NURBS con nodos b) mallado con triángulos NURBS.

Luego sobre el contorno los vértices de la malla coinciden con los nodos de la curva NURBS. Si se debe refinar la malla se deberán insertar nodos intermedios en la curva NURBS del contorno sin alterar su forma. En la figura 4 vemos un refinamiento de la malla de la figura anterior donde se han insertado nodos intermedios en todo el contorno.

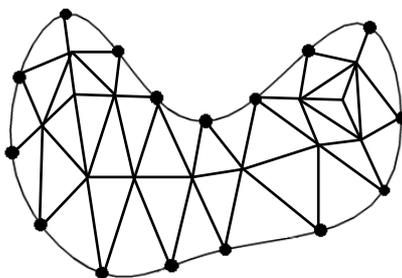


Figura 4: Refinamiento de malla con inserción de nodos.

De esta manera se consigue una definición única para la curva que forma un lado curvo del elemento finito triangular. En el interior del dominio podemos mantener triángulos de lados rectos.

Un problema que se presenta con los contornos NURBS es la cantidad de información que se necesita de puntos de control para describir la geometría que no está relacionada únicamente a cada segmento de contorno sino que se comparte entre varios segmentos. Es deseable que toda la información de la geometría de un segmento quede confinada a cada segmento en particular pues esto facilita el refinamiento de la malla y la paralelización del código (Borden et al., 2011). Una forma simple de hacer esto es definir una representación alternativa de la curva NURBS mediante segmentación, donde cada segmento entre nodos, que corresponde a un lado del elemento finito, se describe mediante una representación de

Bézier (Piegl y Tiller, 1997).

2.5 Representación de Bézier de curvas NURBS

Una curva de Bézier (Farin, 2002) se define en forma similar a las curvas NURBS mediante una poligonal de control con puntos \mathbf{P}_i y pesos asociados w_i a dichos puntos. La principal diferencia es que una alteración de posición de un punto de control afecta a toda la curva mientras que en una curva NURBS sólo se afectan los segmentos vinculados a ese punto de control.

Las curvas de Bézier no requieren de un vector de nodos y se definen paramétricamente en un intervalo $[0,1]$ como:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) w_i} \quad (15)$$

Donde las funciones $B_{i,n}(t)$ son los llamados polinomios de *Bernstein* de grado n que se definen como

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (16)$$

Siendo los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (17)$$

Notemos que si la curva de Bézier es de grado n tendremos exactamente $n+1$ puntos de control. Además las curvas de Bézier se pueden representar en forma no racional usando coordenadas homogéneas de manera similar a como se hizo con las curvas NURBS

$$\mathbf{c}^w(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i^w \quad (18)$$

Debemos resaltar que aunque se utilicen los mismos puntos de control \mathbf{P}_i y los respectivos pesos w_i que para una curva NURBS en general la curva de Bézier obtenida es diferente de la curva NURBS. Sin embargo es posible obtener una representación idéntica de Bézier para cada segmento entre nodos de una curva NURBS.

Consideremos una curva NURBS de grado n con $n+1$ puntos de control

$$\mathbf{r}^w(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,n}(t) \mathbf{P}_i^w \quad (19)$$

Cuyo vector de nodos es de la forma

$$\mathbf{T} = \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1} \right\} \quad (20)$$

Se puede demostrar (Piegl y Tiller, 1997) que en este caso particular la curva NURBS coincide exactamente con la curva de Bézier definida por los mismos puntos de control y pesos.

$$\mathbf{r}^w(t) \equiv \mathbf{c}^w(t) \quad (21)$$

Luego, esto nos define la metodología para hallar los puntos de control y sus pesos para una representación de Bézier de un segmento NURBS entre dos nodos t_i, t_{i+1} . Para ello debemos insertar repetidamente nodos coincidentes con los nodos extremos del segmento hasta que se repitan $n+1$ veces, siendo n el grado del NURBS. Los puntos de control obtenidos serán los puntos de control de la curva de Bézier. Para más detalles se puede consultar a Piegl y Tiller (1997), Borden et al. (2011). De aquí en adelante cuando hablemos de curvas de Bézier nos referiremos a la forma racional de estas curvas.

3 ELEMENTO TRIANGULAR CON CONTORNOS BÉZIER

Consideremos un elemento finito triangular cuyos lados L_i se encuentran formados por segmentos de curvas NURBS que han sido reparametrizados en la forma de curvas de Bézier. Para definir la geometría del elemento utilizamos un triángulo de referencia de lados rectos con los mismos vértices del triángulo curvo.

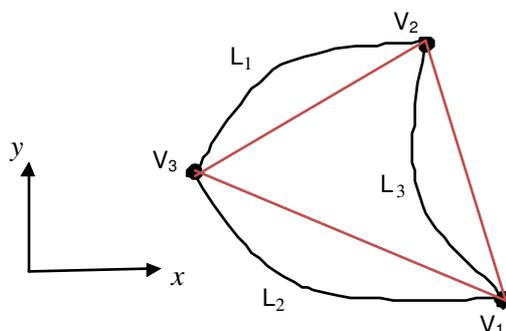


Figura 5: Definición del triángulo de referencia para un elemento con contornos NURBS

El problema es encontrar un mapeamiento entre el triángulo curvo y el triángulo de referencia. Existen diversas alternativas para hacer esto, por ejemplo usando mezclado lineal (Gordon y Hall, 1973)(Mäkipelto, 2005), sin embargo en este trabajo utilizaremos *triángulos de Bézier* (Farin, 2005).

Los triángulos de Bézier de grado n tienen la propiedad de poder representar cualquier contorno de Bézier de grado n sobre sus lados y además contienen al espacio de los polinomios de grado n sobre el triángulo. Esto es, si los lados varían como un polinomio de grado n , el triángulo de Bézier puede representar a cualquier polinomio de grado n sobre el triángulo que contenga dichos lados. Debemos resaltar que las interpolaciones obtenidas por mezclado lineal no poseen, en general, esta propiedad que influye en la convergencia.

3.1 Triángulos de Bézier

Para poder representar un triángulo de Bézier es necesario extender los polinomios de Bernstein a dos dimensiones usando coordenadas baricéntricas (Farin, 2002). En una dimensión los polinomios de Bernstein de grado n son

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (22)$$

Donde el parámetro t varía en $[0,1]$. Alternativamente estos polinomios se pueden escribir usando coordenadas baricéntricas ξ_1, ξ_2 como

$$B_{i,n}(\xi_1, \xi_2) = \binom{n}{i} \xi_1^i \xi_2^{n-i} \quad (23)$$

Siendo ξ_1, ξ_2 las coordenadas baricéntricas en una dimensión

$$\begin{aligned} \xi_1 &= t \\ \xi_2 &= 1-t \end{aligned} \quad (24)$$

Notemos que las coordenadas baricéntricas no son independientes ya que están vinculadas por la relación

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \quad (25)$$

En dos dimensiones las coordenadas baricéntricas son las usuales coordenadas de área ξ_1, ξ_2, ξ_3 , (Cook et al, 1989) definidas en el triángulo de referencia. Las coordenadas baricéntricas ξ_i no son independientes sino que están vinculadas por la relación:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (26)$$

La utilización de coordenadas de área facilita la definición de las funciones de interpolación sobre el triángulo de referencia. En particular, los polinomios de Bernstein de grado n sobre el triángulo son

$$B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \binom{n}{i, j, k} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \quad i + j + k = n \quad (27)$$

Siendo los coeficientes trinomiales

$$\binom{n}{i, j, k} = \frac{n!}{i! j! k!} = \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} \quad (28)$$

Luego una superficie de Bézier $\mathbf{f}^w(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de grado n se define mediante $(n+2)(n+1)/2$ puntos de control \mathbf{P}_{ijk}^w asociados a respectivas funciones de Bernstein en el triángulo como

$$\mathbf{f}^w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{P}_{ijk}^w \quad (29)$$

Por ejemplo, para $n=3$ las funciones de Bernstein son

$$\begin{aligned} B_{300}^3 &= \xi_1^3 & B_{210}^3 &= 3\xi_1^2 \xi_2 & B_{120}^3 &= 3\xi_1 \xi_2^2 & B_{030}^3 &= \xi_2^3 \\ B_{012}^3 &= 3\xi_2 \xi_3^2 & B_{021}^3 &= 3\xi_2^2 \xi_3 & B_{102}^3 &= 3\xi_1 \xi_3^2 & B_{201}^3 &= 3\xi_1^2 \xi_3 \\ B_{003}^3 &= \xi_3^3 & B_{111}^3 &= 6\xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{aligned} \quad (30)$$

Y la superficie de Bézier correspondiente es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \binom{3}{3} \mathbf{P}_{300}^w + \binom{3}{2,1,0} \mathbf{P}_{210}^w + \binom{3}{1,2,0} \mathbf{P}_{120}^w + \binom{3}{0,3,0} \mathbf{P}_{030}^w \\ &+ \binom{3}{0,1,2} \mathbf{P}_{012}^w + \binom{3}{0,2,1} \mathbf{P}_{021}^w + \binom{3}{1,0,2} \mathbf{P}_{102}^w + \binom{3}{2,0,1} \mathbf{P}_{201}^w \\ &+ \binom{3}{0,0,3} \mathbf{P}_{003}^w + \binom{3}{1,1,1} \mathbf{P}_{111}^w \end{aligned} \quad (31)$$

Donde los puntos de control están ubicados en los vértices, los tercios de los lados y en el centroide del triángulo de referencia

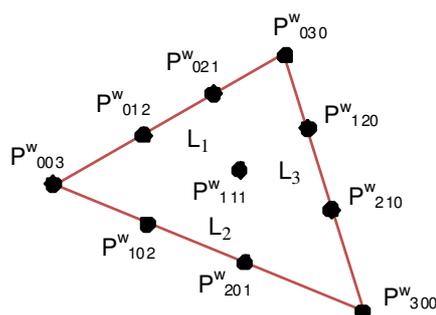
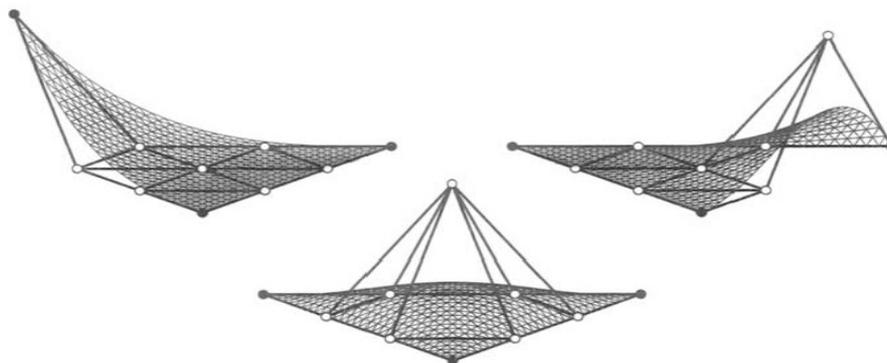


Figura 6: Puntos de control para el triángulo de Bézier cúbico

En la figura siguiente se muestran algunas funciones de Bernstein para el triángulo cúbico y los puntos de control.

Figura 7: Funciones de Bernstein B_{003} (izq.), B_{120} (der.) y B_{111} (centro) (Farin, 2002)

Luego es posible establecer un mapeo entre el triángulo de referencia y el triángulo curvo de manera que a cada punto del triángulo de referencia le corresponda un único punto en el triángulo curvo, y viceversa. Notemos que los vértices \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_3 del triángulo de referencia coinciden con la posición de los puntos de control sobre los vértices. Además es posible asignar cualquier curva de Bézier a la forma de los lados. Por lo tanto se puede establecer un mapeo de coordenadas como

$$\mathbf{x}^w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x \quad y \quad w\} = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{P}_{ijk}^w \quad (32)$$

Donde hemos usado coordenadas homogéneas para indicar un mapeo formado por funciones racionales. Si todos los pesos w_i son iguales el mapeo es polinómico (Piegel y Tiller, 1997). Esto implica que este mapeo tiene la posibilidad de representar lados rectos y cuadráticos en x, y , coincidiendo con los mapeos usuales (Cook et al., 1989) de triángulos de lados rectos y cuadráticos.

4 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO FINITO NURBS

Asumiendo un estado plano de tensiones o deformaciones las únicas componentes de desplazamiento a considerar son las componentes u, v en la dirección de los ejes coordenados x, y .

Supongamos que las componentes de desplazamiento u, v son aproximadas en el elemento por funciones de interpolación $N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ asociadas a m valores nodales u_i, v_i de los

desplazamientos como

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_i = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad (33)$$

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_i = \mathbf{N}^T \mathbf{v}$$

Donde \mathbf{u}, \mathbf{v} son los vectores de desplazamientos nodales

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad \cdots \quad u_m\}^T \quad (34)$$

$$\mathbf{v} = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad \cdots \quad v_m\}^T$$

Además \mathbf{N} es el vector de funciones de forma

$$\mathbf{N} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad \cdots \quad N_m\}^T \quad (35)$$

El principio de los desplazamientos virtuales para un elemento finito deformable en equilibrio puede postularse como

$$\delta W = \int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} h dA - \delta W_{ext} = 0 \quad (36)$$

donde h es el espesor del elemento, δW_{ext} es el trabajo virtual de las cargas externas, $\boldsymbol{\sigma}$ es el campo de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (37)$$

y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el campo de deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (38)$$

cuyas componentes valen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (39)$$

Reemplazando las aproximaciones a los desplazamientos (13) tenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (40)$$

donde \mathbf{d} es el vector de desplazamientos nodales intercalados

$$\mathbf{d} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad \cdots \quad \cdots \quad u_m \quad v_m\}^T \quad (41)$$

y la matriz \mathbf{B} es

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m] \quad (42)$$

Siendo las matrices \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (43)$$

El vector de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ está relacionado con el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ por la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (44)$$

Siendo \mathbf{C} la matriz constitutiva. Para una variación arbitraria $\delta\mathbf{d}$ del vector de desplazamientos nodales la variación del campo de deformaciones y el trabajo virtual externo son

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{d}, \quad \delta W_{ext} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (45)$$

donde \mathbf{f}_{ext} es el vector de fuerzas nodales externas. Luego el trabajo virtual resulta

$$\delta W = \delta\mathbf{d}^T \left(\int_A \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} h dA - \mathbf{f}_{ext} \right) = 0 \quad (46)$$

Que debe ser válida para cualquier variación arbitraria $\delta\mathbf{d}$, por lo tanto debe verificarse que

$$\mathbf{f}_{int} = \int_A \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} h dA = \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} \quad (47)$$

siendo \mathbf{f}_{int} el vector de fuerzas internas y \mathbf{K} es la *matriz de rigidez* que viene dada por

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h dA \quad (48)$$

Notemos que esta integral no puede calcularse directamente pues los elementos de la matriz \mathbf{B} son funciones de las coordenadas de área ξ_i y la integral está referida al área real del triángulo en coordenadas cartesianas y con lados curvos. Por lo tanto es necesario efectuar una transformación de coordenadas para expresar la integral en coordenadas de área y sobre el triángulo de referencia de lados rectos.

4.1 Transformación de coordenadas

Notemos que por la relación entre coordenadas de área sólo tenemos dos coordenadas linealmente independientes. Por ejemplo si elegimos a ξ_1, ξ_2 y las renombramos ξ, η tenemos

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \\ \xi_2 &= \eta \\ \xi_3 &= 1 - \xi - \eta \end{aligned} \quad (49)$$

Para calcular las derivadas de las funciones de forma respecto de las variables independientes ξ, η aplicamos la regla de la cadena obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{aligned} \quad (50)$$

Pero para calcular las derivadas que participan en \mathbf{B}_i , debemos derivar las funciones de forma respecto de las coordenadas cartesianas x, y para lo cual debemos aplicar nuevamente la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (51)$$

Como las derivadas de ξ, η respecto de las coordenadas cartesianas x, y no están disponibles,

en general, escribimos las relaciones *inversas*

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (52)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

Siendo \mathbf{J} la matriz *Jacobiana* de la transformación

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Luego invirtiendo la relación matricial (34) obtenemos

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Donde \mathbf{J}^{-1} es la inversa de la matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Y J es el determinante de la matriz Jacobiana

$$J = \det \mathbf{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (57)$$

Además los diferenciales de área se relacionan mediante el determinante Jacobiano como

$$dA = dx dy = J d\xi d\eta \quad (58)$$

Luego es posible calcular la matriz de rigidez como

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h dA = \int_{\xi} \int_{\eta} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} J h d\xi d\eta \quad (59)$$

Donde ahora es posible utilizar las derivadas de las funciones de forma respecto de las coordenadas de área. Además debemos calcular los coeficientes de la matriz Jacobiana que dependerán del tipo de mapeamiento utilizado.

5 FUNCIONES DE FORMA ISOGOMÉTRICAS DE BÉZIER

La idea del análisis *isogeométrico* es utilizar las mismas funciones base utilizadas para describir la geometría para describir las variables de la solución, los campos de desplazamientos en este caso (Cottrell et al., 2009).

Un requerimiento básico de las funciones de forma es que representen una partición de la unidad, esto es, que la suma de todas las funciones de forma sobre el elemento valga uno. Esto se verifica fácilmente para los polinomios de Bernstein de grado n ya que se corresponden con

los términos de la expansión de un trinomio del mismo grado

$$(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^n = 1 \quad (60)$$

Luego la elección natural sería usar las funciones de Bézier para triángulos, aunque haciendo esto los desplazamientos nodales \mathbf{d} no estarán asociados a verdaderos desplazamientos, sino a variables de control que nos permitirán obtener la solución (Cottrell et al., 2009). Además, los pesos w_i se mantienen fijos en las funciones de forma e iguales a los usados para describir la geometría esto asegura que el elemento pase un *test de la parcela* (Cook et al., 1989) para deformación constante.

Las funciones de forma se obtienen del mapeo homogéneo (32)

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x \quad y\}^t = \frac{\sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij} \mathbf{P}_{ijk}}{\sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij}} \quad (61)$$

Definiendo al denominador como

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij} \quad (62)$$

Resulta

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij} \mathbf{P}_{ijk}}{W_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \sum_{i+j+k=n} N_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{P}_{ijk} \quad (63)$$

Siendo

$$N_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{B_{ijk}^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij}}{W_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (64)$$

la función de forma de Bézier de grado n asociada al punto de control \mathbf{P}_{ijk} .

5.1 Cálculo de la matriz \mathbf{B}

Para calcular los coeficientes de la matriz \mathbf{B} debemos calcular las derivadas de las coordenadas cartesianas x, y respecto de las coordenadas de área ξ, η .

Luego puedo calcular las derivadas respecto de la coordenada de área ξ_m

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_m} = \sum_{i+j+k=n} \frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial \xi_m} \mathbf{P}_{ijk} \quad (65)$$

Siendo

$$\frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial \xi_m} = \left(\frac{\partial B_{ijk}^n}{\partial \xi_m} \frac{1}{W_n} - \frac{\partial W_n}{\partial \xi_m} \frac{B_{ijk}^n}{W_n^2} \right) w_{ij} \quad (66)$$

Finalmente las derivadas de las coordenadas de área ξ, η necesarias para el cálculo de la matriz Jacobiana son

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_3} \quad (67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_3}$$

Para la formulación isogeométrica los desplazamientos se describen mediante las mismas funciones usadas para describir la geometría

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i+j+k=n} N_{ijk}^n u_{ijk} \quad (68)$$

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i+j+k=n} N_{ijk}^n v_{ijk}$$

Siendo u_{ijk}, v_{ijk} los *desplazamientos de control*, esto es, no son estrictamente desplazamientos nodales sino que deben interpretarse como coordenadas generalizadas que tienen unidades de desplazamientos (Cottrell et al., 2009).

Luego la matriz \mathbf{B} se puede expresar como un vector de submatrices \mathbf{B}_{ijk} como

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_{ijk}\}^T \quad (i + j + k = n) \quad (69)$$

Donde las submatrices \mathbf{B}_{ijk} son

$$\mathbf{B}_{ijk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial y} & \frac{\partial N_{ijk}^n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Donde las derivadas se calculan usando las relaciones (55) y (66).

Para el cálculo de las matrices de rigidez usamos integración numérica sobre el triángulo de referencia con la misma regla de Gauss que se utiliza en elementos finitos de grado p y forma regular para integrar las funciones de Bézier de grado p (Cottrell et al., 2009).

6 FORMULACIÓN ISOGEOMÉTRICA DE BÉZIER SIMPLIFICADA

En general la descripción de la geometría es complicada sólo en el contorno y llevando en cuenta que debemos utilizar un mallador de triángulos la mayoría de los elementos que no tienen lados sobre el contorno serán de lados rectos. Luego no se justifica complicar el cálculo de las matrices de rigidez si la mayoría de los elementos tienen lados rectos.

Además si tenemos partes del contorno descritas con NURBS de grado diferentes estamos obligados a usar triángulos de Bézier del mayor grado existente en todos los elementos para evitar incompatibilidades entre elementos adyacentes. Si bien esto se podría corregir mediante la imposición de restricciones esto agrega una complejidad innecesaria.

Por lo tanto parece conveniente hacer un tratamiento discriminado de los elementos que están en contacto con el contorno de los que están en el interior del dominio.

La idea es hacer una separación entre los elementos finitos internos, donde aplicaremos la formulación convencional con variables nodales y los elementos que están en contacto con el contorno a los cuales le aplicaremos una formulación simplificada. Asumiremos que los elementos que están sobre el contorno sólo tienen un lado curvo en forma de curva de Bézier.

Supongamos que el lado de contorno se describe por una curva de Bézier de grado n y sobre los elementos internos definimos una interpolación convencional de desplazamientos de grado p con $p \leq n$. Para mantener compatibilidad con los elementos internos sobre los lados rectos del triángulo curvo debemos definir una interpolación usando como grados de libertad a los mismo desplazamientos nodales convencionales usados para definir un polinomio de grado p sobre un lado recto interno. Sobre el contorno curvo la interpolación debe tener la posibilidad de usar funciones de Bézier de grado n para poder reproducir la geometría del lado curvo.

Luego definimos una interpolación usando como grados de libertad a los desplazamientos nodales convencionales de un polinomio de grado p de todos los nodos que estén en el interior del dominio y agregamos los desplazamientos de control de todos los puntos de control que estén sobre el lado curvo usados por las curvas de Bézier de grado n .

Por ejemplo supongamos que adoptamos una interpolación cuadrática ($p=2$) sobre todos los elementos internos mediante las usuales funciones de forma cuadráticas $N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ definidas en función de las coordenadas de área (Cook et al, 1989)

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (2\xi_1 - 1)\xi_1 & N_2 &= (2\xi_2 - 1)\xi_2 & N_3 &= (2\xi_3 - 1)\xi_3 & (71) \\
 N_4 &= 4\xi_1\xi_2 & N_5 &= 4\xi_2\xi_3 & N_6 &= 4\xi_3\xi_1
 \end{aligned}$$

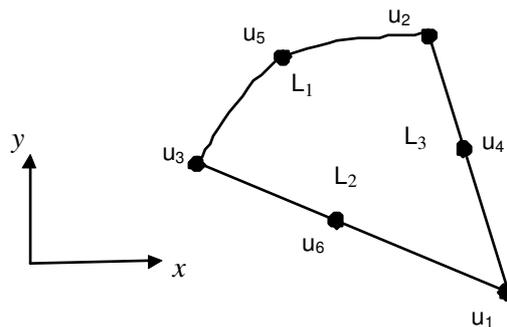


Figura 8: Interpolación cuadrática convencional

Supongamos que el contorno viene descrito por una curva de Bézier de tercer grado ($n=3$). Luego debemos usar un triángulo de Bézier de grado 3 para describir la variación en el contorno curvo y en el dominio mediante los desplazamientos de control u_{ijk} (fig. 9.a)

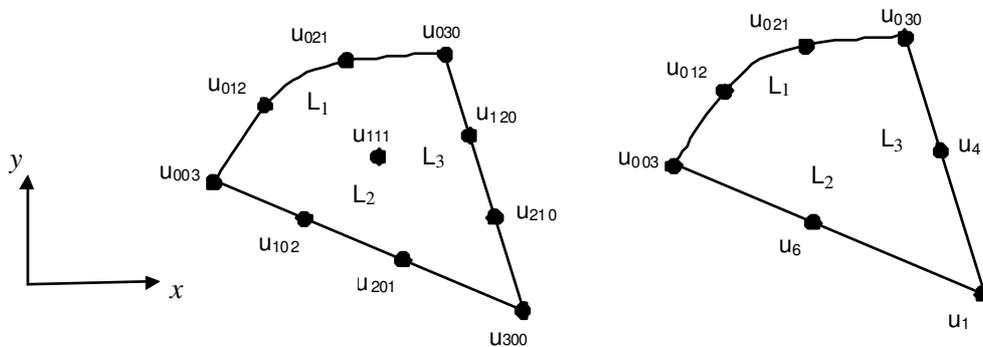


Figura 9: a) Triángulo de Bézier cúbico b) Triángulo de Bézier cúbico simplificado para compatibilidad cuadrática

Para mantener compatibilidad con los grados de libertad internos restringiremos los valores

de los desplazamientos de control internos para que queden en función de los desplazamientos del triángulo convencional de grado p . Luego llamaremos a este elemento triángulo de Bézier simplificado de grado n para compatibilidad con grado p . Esto significa que el contorno varía como una curva de Bézier de grado n y el dominio es compatible con elementos convencionales de grado p (fig. 9.b).

Luego forzamos a que en la posición de los puntos de control internos los desplazamientos en el triángulo de Bézier sean iguales a los del triángulo con interpolación convencional.

A continuación mostraremos las funciones de forma modificadas para triángulos de Bézier simplificados cuadráticos ($p=2$) y cúbicos ($p=3$).

6.1 Triángulo de Bézier cuadrático simplificado

En este caso el contorno varía como una curva de Bézier racional cuadrática.

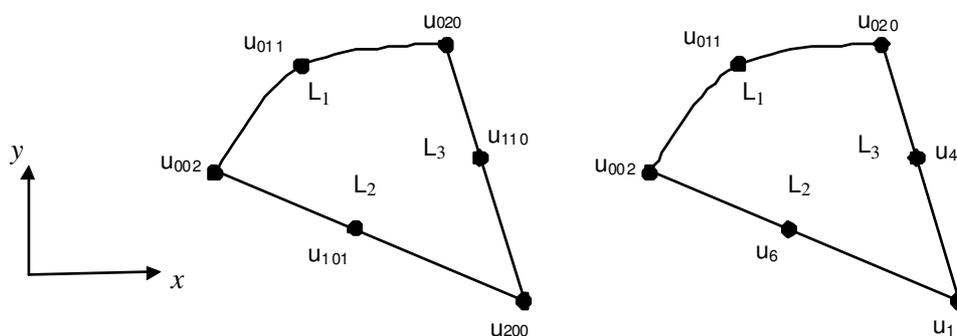


Figura 10: a) Triángulo de Bézier de grado 2 b) Triángulo de Bézier cuadrático simplificado

Luego los desplazamientos del triángulo de Bézier \mathbf{u}_B vienen dados por

$$\mathbf{u}_B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\xi_1^2 \mathbf{u}_{200} + w_{020} \xi_2^2 \mathbf{u}_{200} + w_{002} \xi_3^2 \mathbf{u}_{002} + 2\xi_1 \xi_2 \mathbf{u}_{110} + 2\xi_1 \xi_3 \mathbf{u}_{101} + w_{011} 2\xi_2 \xi_3 \mathbf{u}_{011}}{W_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (72)$$

Donde W_2 viene dado por la expresión (62) que para este caso queda

$$W_2 = \xi_1^2 + w_{020} \xi_2^2 + w_{002} \xi_3^2 + 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 + w_{011} 2\xi_2 \xi_3 \quad (73)$$

Nótese que hemos asumido que todos los pesos internos w_{110} , w_{101} , w_{200} valen 1.

Luego para el elemento finito convencional cuadrático los desplazamientos \mathbf{u}_C valen

$$\mathbf{u}_C(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2\xi_1 - 1)\xi_1 \mathbf{u}_1 + (2\xi_2 - 1)\xi_2 \mathbf{u}_2 + (2\xi_3 - 1)\xi_3 \mathbf{u}_3 + 4\xi_1 \xi_2 \mathbf{u}_4 + 4\xi_2 \xi_3 \mathbf{u}_5 + 4\xi_1 \xi_3 \mathbf{u}_6 \quad (74)$$

Imponiendo restricciones a los desplazamientos de Bézier en la posición de los puntos de control internos \mathbf{u}_{110} , \mathbf{u}_{101} , \mathbf{u}_{200} , de manera que coincidan con los del triángulo cuadrático, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) &= \frac{\mathbf{u}_{200} + w_{020} \mathbf{u}_{020} + 2\mathbf{u}_{110}}{3 + w_{020}} = \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_B(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) &= \frac{\mathbf{u}_{200} + w_{002} \mathbf{u}_{002} + 2\mathbf{u}_{101}}{3 + w_{002}} = \mathbf{u}_6 \\ \mathbf{u}_B(1, 0, 0) &= \mathbf{u}_{200} = \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (75)$$

Resultando las siguientes restricciones para los desplazamientos de control

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{110} &= \frac{3+w_{020}}{2}\mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_1}{2} - \frac{w_{020}\mathbf{u}_{020}}{2} \\ \mathbf{u}_{101} &= \frac{3+w_{002}}{2}\mathbf{u}_6 - \frac{\mathbf{u}_1}{2} - \frac{w_{002}\mathbf{u}_{002}}{2} \\ \mathbf{u}_{200} &= \mathbf{u}_1\end{aligned}\quad (76)$$

Por lo tanto las funciones de forma de Bézier restringidas quedan

$$\begin{aligned}\bar{N}_{002}^2 &= N_{002}^2 - (w_{002}/2)N_{101}^2 \\ \bar{N}_{011}^2 &= N_{011}^2 \\ \bar{N}_{020}^2 &= N_{020}^2 - (w_{020}/2)N_{110}^2 \\ \bar{N}_1 &= N_{200}^2 - N_{110}^2/2 - N_{101}^2/2 \\ \bar{N}_4 &= N_{110}^2(3+w_{020})/2 \\ \bar{N}_6 &= N_{101}^2(3+w_{020})/2\end{aligned}\quad (77)$$

Estas mismas funciones de forma son usadas para interpolar la geometría y los desplazamientos.

6.2 Triángulo de Bézier cúbico simplificado para compatibilidad cuadrática

En este caso el contorno varía como una curva de Bézier cúbica. Luego los desplazamientos de Bézier \mathbf{u}_B vienen dados por la ec. (63) para $n=3$ como

$$\mathbf{u}_B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\sum_{i+j+k=3} B_{ijk}^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{ij} \mathbf{u}_{ijk}}{W_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \sum_{i+j+k=3} N_{ijk}^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{u}_{ijk} \quad (78)$$

Donde \mathbf{u}_{ijk} son los desplazamientos de control (fig.9.a). Si restringimos los desplazamientos de control internos \mathbf{u}_{300} , \mathbf{u}_{201} , \mathbf{u}_{102} , \mathbf{u}_{210} , \mathbf{u}_{120} , \mathbf{u}_{102} , \mathbf{u}_{111} de manera que en la posición de los dichos puntos de control, los desplazamientos dados por el triangulo de Bézier coincidan con los de un triángulo cuadrático convencional se obtienen las siguientes funciones de forma modificadas asociadas a los grados de libertad mostrados en la fig. 9.b

$$\begin{aligned}\bar{N}_{003}^3 &= N_{003}^3 + \alpha_9 N_{102}^3 + \alpha_{12} N_{201}^3 + \alpha_4 N_{111}^3 \\ \bar{N}_{012}^3 &= N_{012}^3 + \alpha_6 N_{111}^3 \\ \bar{N}_{021}^3 &= N_{021}^3 + \alpha_5 N_{111}^3 \\ \bar{N}_{030}^3 &= N_{030}^3 + \alpha_{15} N_{120}^3 + \alpha_{18} N_{210}^3 + \alpha_7 N_{111}^3 \\ \bar{N}_1 &= N_{300}^3 + \alpha_8 N_{102}^3 + \alpha_{11} N_{201}^3 + \alpha_{14} N_{120}^3 + \alpha_{17} N_{210}^3 + \alpha_1 N_{111}^3 \\ \bar{N}_4 &= \alpha_2 N_{111}^3 + \alpha_{16} N_{120}^3 + \alpha_{19} N_{210}^3 \\ \bar{N}_6 &= \alpha_3 N_{111}^3 + \alpha_{10} N_{102}^3 + \alpha_{13} N_{201}^3\end{aligned}\quad (79)$$

Donde los coeficientes α_i son funciones únicamente de los pesos w_{003} , w_{012} , w_{021} y w_{030}

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (7 - w_b + w_{003} + w_{030})/54 & \alpha_2 &= (-60 + 4w_b - 12w_{030})/54 & (80) \\
\alpha_3 &= (-60 + 4w_b - 12w_{003})/54 & \alpha_4 &= (-2 - w_b + 2w_{003} + 4(w_b/w_a)w_{030})/54 \\
\alpha_5 &= (-27 + 12(w_b/w_a))w_{021}/54 & \alpha_6 &= (-27 + 12(w_b/w_a))w_{012}/54 \\
\alpha_7 &= (-2 - w_b + 2w_{030} + 4(w_b/w_a)w_{030})/54 & \alpha_8 &= (-2 - w_{003})/9 \\
\alpha_9 &= (17 - 17w_{003})/27 & \alpha_{10} &= (16 + 20w_{003})/27 \\
\alpha_{11} &= (-2 + 2w_{003})/27 & \alpha_{12} &= (-5 + 2w_{003})/9 \\
\alpha_{13} &= (44 - 8w_{003})/27 & \alpha_{14} &= (-2 + 2w_{030})/27 \\
\alpha_{15} &= (17 - 17w_{030})/27 & \alpha_{16} &= (16 + 20w_{030})/27 \\
\alpha_{17} &= (-2 + 2w_{030})/27 & \alpha_{18} &= (-5 + 2w_{030})/9 \\
\alpha_{19} &= (44 - 8w_{030})/27
\end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}
w_a &= w_{030} + 3w_{021} + 3w_{012} + w_{003} & (81) \\
w_b &= 19 + w_a
\end{aligned}$$

Estas funciones de forma satisfacen el criterio de *partición de la unidad*, esto es su suma vale uno y si se usan tanto para definir la geometría como los desplazamientos entonces el elemento resultante pasa un test de la parcela de tensión constante.

7 CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación para elementos finitos triangulares en dominios con contornos en forma de curvas NURBS para análisis de tensiones. Se ha transformada la descripción de los segmentos del contorno para representarlos mediante curvas de Bézier y finalmente se ha descrito una interpolación mediante funciones de Bézier sobre triángulos.

Los triángulos de Bézier no han sido muy utilizados en sistemas CAD principalmente por la dificultad para obtener representaciones de alto orden de continuidad, mayor al C^0 . Sin embargo, aparecen como la opción natural para representar funciones NURBS sobre elementos finitos triangulares, pues además, pueden representar polinomios completos del mismo grado cuando el elemento tiene lados rectos.

Se han simplificado las funciones de forma para generar elementos de transición entre el contorno y el dominio manteniendo la información de la geometría. Los elementos simplificados desarrollados pasan el test de la parcela.

Notemos que es posible tener interpolaciones para los desplazamientos de bajo orden y con reglas económicas de integración numérica manteniendo la descripción del contorno. En general la formulación isogeométrica convencional requiere de una gran cantidad de puntos de integración.

El elemento más económico que se podría definir usando la formulación aquí presentada es un triángulo de Bézier cuadrático simplificado con compatibilidad lineal en los lados. Aunque deberíamos utilizar como mínimo una regla de integración para funciones cuadráticas para integrar adecuadamente las funciones de forma de Bézier cuadráticas asociadas al contorno.

Sería deseable comparar la formulación simplificada aquí presentada con la formulación cartesiana (Sevilla et al., 2008) donde se utilizan interpolaciones cartesianas para los desplazamientos y paramétricas para la geometría con lo que se simplifica la integración numérica.

REFERENCIAS

- Borden, M.J., Scott, M.A., Evans, J.A. y Hughes, T.J.R., Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. *Internat. J. Numer. Methods Engng*, 87, 15–47, 2011.
- Cook, R.D., Malkus D.S. y Plesha M.E., *Concepts and applications of finite element analysis*, third edition. John Wiley and Sons, 1989.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., y Bazilevs, Y., *Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA*. Wiley, 2009.
- Farin, G., *Curves and Surfaces for CAGD. A practical guide.*, 5th Edition, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, USA, 2002
- Godoy, L.A., *Thin-walled structures with structural imperfections: analysis and behavior*, first edition. Elsevier Ltd, 1996.
- Gordon, W.J. y Hall, C.A., Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numer. Math.*, 21, 109-129, 1973.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. y Bazilevs, Y., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.*, 194 (39-41), 4135-4195, 2005.
- Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, 2000.
- Mäkipelto, J., *Exact geometry description with unstructured triangular meshes for shape optimization*, 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brasil, Mayo 2005.
- Piegel, L. y Tiller, W., *The NURBS Book*, Second Edition. Springer-Verlag (New York), 1997.
- Rogers, D.F., *An introduction to NURBS with historical perspective*, Academic Press (San Diego, CA), 2001.
- Sevilla, R., Fernández-Méndez, S. y Huerta A., NURBS-Enhanced Finite Element Method for Euler equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 57(9), 1051–1059, 2008.
- Ubach, P.A. y Oñate, E., *Evolution of the New Rotation-Free Finite Element Shell Triangle Using Accurate Geometrical Data*, 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures, IASS-IACM, Cornell University, Ithaca, NY, USA, Mayo 2008.