

ANÁLISIS DINÁMICO DE PLACAS LAMINADAS MEDIANTE MACRO-ELEMENTOS USANDO TEORÍA TRIGONOMÉTRICA DE DEFORMACIÓN POR CORTE

Rita F. Rango^a, Liz G. Nallim^a y Sergio Oller^b

^aICMASa, INIQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia
5150, 4400 Salta, Argentina, lnallim@unsa.edu.ar, <http://www.ing.unsa.edu.ar>

^bCIMNE. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad
Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España,
sergio.oller@upc.edu, <http://www.cimne.upc.es>

Palabras clave: Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, Placas Laminadas, Macro Elemento.

Resumen. En este trabajo se incorpora la cinemática correspondiente a una Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte (TSDT) a macro-elementos enriquecidos, los cuales fueron formulados originalmente por los autores para el análisis de placas delgadas. En esta teoría se emplean funciones trigonométricas, definidas en la variable del espesor y dependientes del mismo, que incorporan una variación sinusoidal de los desplazamientos a lo largo del espesor y verifican la condición de tensiones de corte nulas en las superficies superior e inferior del laminado y la compatibilidad de desplazamientos en el plano en las superficies interlaminares. Por otro lado, se evita el bloqueo por cortante y no se requiere de un factor de corrección por corte. Las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones cortantes se satisfacen en cada lámina o capa. El macro-elemento formulado constituye un elemento finito jerárquicamente enriquecido con polinomios de Gram-Schmidt que, a su vez, es mapeado utilizando el concepto de isoparametría en coordenadas naturales. Así, la superficie de una placa se discretizaría con una malla de macro-elementos que a diferencia de elementos finitos clásicos, no requieren densificar el mallado. La formulación obtenida se emplea en este trabajo para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas, considerando diferentes condiciones de contorno. Los resultados numéricos obtenidos con la presente formulación muestran una buena correlación con resultados publicados por otros autores. Además, se pueden realizar con facilidad estudios paramétricos y llevar a cabo procesos de optimización.

1 INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se produjo un notable incremento en la utilización de materiales anisótropos, en particular de los denominados materiales compuestos, en diversos tipos de estructuras que se utilizan en muchas áreas de la ingeniería.

Los materiales compuestos reforzados con fibras son muy importantes en las aplicaciones, ya que presentan una elevada relación resistencia – peso y rigidez – peso, son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Más aún, en general, los materiales compuestos pueden diseñarse para satisfacer requerimientos de resistencia, rigidez y otros parámetros en cualquier dirección. Las características mencionadas y especialmente la reducción de peso que el uso de estos materiales implica, han hecho que los mismos sean de particular interés en la fabricación de piezas para las industrias aeronáutica, aeroespacial, naval y de automóviles. Por otra parte, la aplicación de materiales compuestos con fines estructurales en obras civiles también está siendo relevante. Estos hallan, entre otras, su aplicación en la industria de la construcción en estructuras sometidas a la acción de ambientes agresivos, en depósitos, en refuerzos de estructuras, en tableros para pasarelas, en recubrimiento de túneles, etc (Oller, 2002).

Para el análisis de placas de material compuesto laminado se han empleado a lo largo de los años diversas teorías, partiendo de la teoría de clásica (CLPT) (Timoshenko, 1959), la teoría de primer orden de deformación por corte (FSDT) (Reissner 1945; Mindlin 1951), hasta las teorías de deformación por corte de orden superior (HSDT). Las HSDT (Reddy, 1993) usan una función de la coordenada del espesor de la placa (z) para representar el campo de desplazamiento no lineal a lo largo del mismo. El empleo de estas teorías conduce a una mejor estimación de las tensiones interlaminares. Por otra parte, las teorías trigonométricas (TSDT) (Mantari et al., 2012a, 2012b) usan un término sinusoidal para representar el desplazamiento no lineal a lo largo del espesor. Este tipo de modelos satisface la continuidad de desplazamiento y tensión de corte transversal en las interfaces. Las teorías trigonométricas satisfacen además la condición de contorno de tensión de corte transversal nula en los planos superior e inferior de la placa. Ferreira et al. (2005) aplicaron la TSDT al análisis estático de placas compuestas laminadas cruzadas simétricas, mientras que Xiang y Wang (2009) emplearon también la TSDT en el análisis de vibración libre de placas laminadas cruzadas simétricas. La aplicación de la TSDT para el estudio del comportamiento de placas compuestas laminadas es reciente (Mantari et al., 2012c).

En el presente artículo se desarrolla un macro-elemento finito enriquecido para placas usando la TSDT. El mismo se basa en la utilización de funciones de forma clásicas, enriquecidas con la incorporación de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. La metodología se desarrolla y se aplica al estudio de la vibración libre de placas compuestas laminadas. El programa desarrollado permite trabajar con placas cuadriláteras laminadas, de cualquier forma geométrica, ya que la formulación del macroelemento incluye el mapeo de espacios y diferentes relaciones de espesor, en particular placas gruesas. Previo a la presentación de los ejemplos de aplicación, se realiza un estudio de convergencia y se comparan ejemplos numéricos con resultados obtenidos por otros autores, lo que permite concluir que la formulación del macro-elemento finito presentada en este trabajo produce soluciones estables, convergentes y con muy buena precisión.

2 FORMULACIÓN

2.1 Energía de deformación y energía cinética

Sea la placa cuadrilátera laminada de espesor h en las coordenadas Cartesianas (x, y) mostrada en la **Figura 1** (a la derecha), cuyo dominio en el plano resulta limitado por las rectas que unen sus esquinas consecutivas.

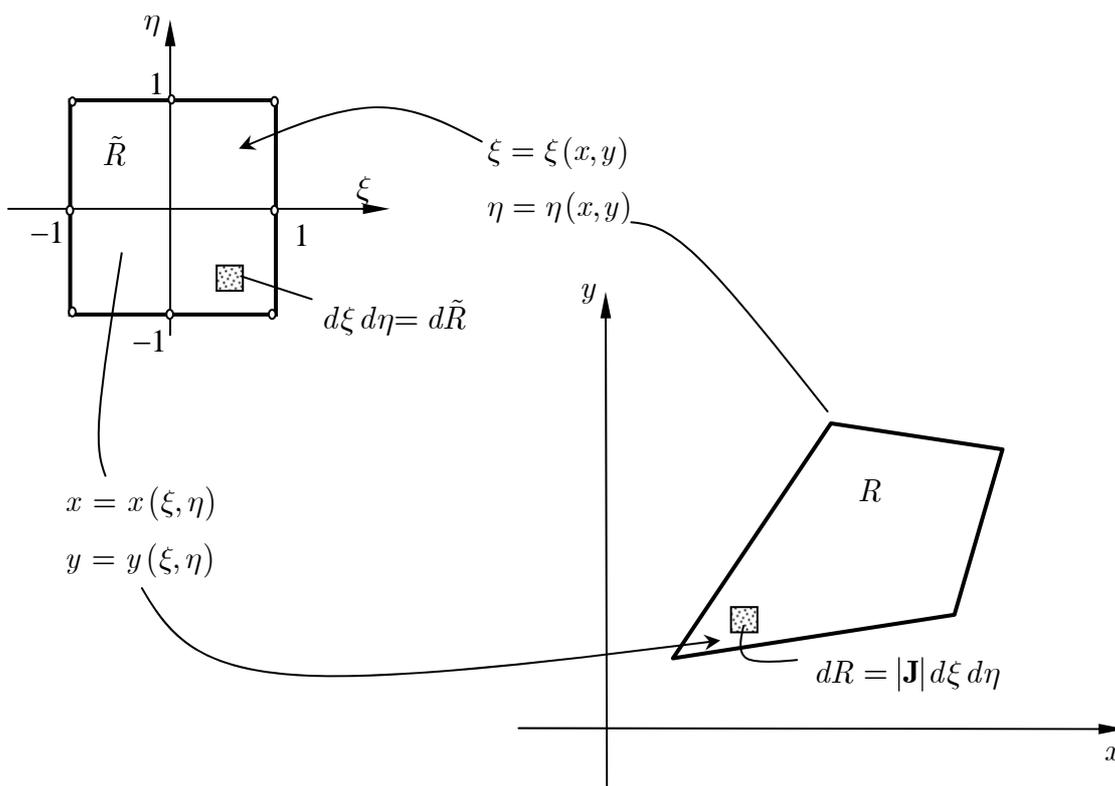


Figura 1: Transformación de espacios. A la derecha: placa real. A la izquierda: placa de referencia

Cada capa del laminado es de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales y la secuencia de apilamiento es simétrica respecto del plano medio, como muestra la **Figura 2**.

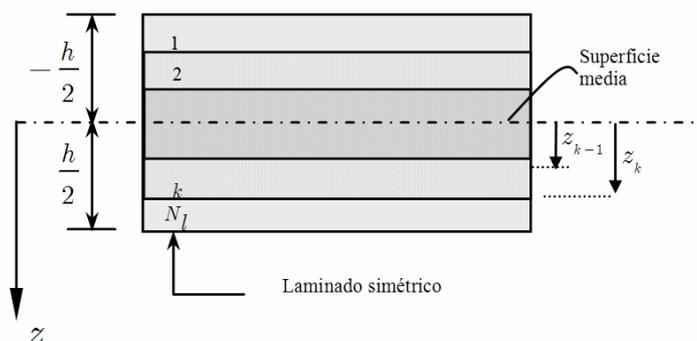


Figura 2: Laminado simétrico de n capas.

Basado en la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, el campo de

desplazamientos propuesto está dado por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde u, v son las componentes de desplazamiento en el plano y w es el desplazamiento transversal, el cual coincide con los desplazamientos transversales de los puntos ubicados en el plano medio (w_0) y ϕ_x y ϕ_y son las rotaciones de las normales al plano medio alrededor de los ejes y y x , respectivamente.

Las componentes de deformación para la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, considerando laminados simétricos, y en función de las Ecs. (1), resultan:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\ \sin \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \sin \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} (\phi_x) \\ \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} (\phi_y) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Las relaciones tensión-deformación en el sistema de coordenadas locales están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde los subíndices 1 y 2 corresponden, respectivamente, a la dirección paralela y perpendicular a la fibra, en el plano, y el subíndice 3 a la dirección normal al plano de la placa. Las componentes Q_{ij} están dadas por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \nu_{21}Q_{11}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{33} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{31}$$

donde $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{23}, G_{31}$ son las propiedades del material de cada lámina.

Mediante una adecuada transformación de coordenadas, las relaciones tensión-deformación en las coordenadas globales (x, y, z) resultan:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

donde \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) son las denominadas rigideces reducidas transformadas (Reddy, 2003) y son función de las propiedades mecánicas de cada lámina y del ángulo de inclinación de las fibras (β) respecto del eje x .

La energía de deformación de una placa laminada en coordenadas rectangulares está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) dV \quad (5)$$

donde V es el volumen del elemento placa.

Reemplazando las expresiones (2) y (4) en la ec.(5), considerando la energía máxima de deformación para vibración libre, e integrando en el espesor del laminado se obtiene:

$$\begin{aligned} U_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_R [SA1_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + SA1_{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + SA1_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\ & + SA1_{12} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + SA1_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + SA1_{26} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\ & + SA1_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + SA1_{26} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + SA1_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \iint_R [SD_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + SD_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2SD_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + SD_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + SD_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2SD_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + 2SD_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2SD_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4SD_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \iint_R [SB_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + SB_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + 2SB_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \\
& + SB_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + SB_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + 2SB_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \\
& + SB_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + SB_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + 2SB_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)] dx dy \\
& -\frac{1}{2} \iint_R [SB_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + SB_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + SB_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\
& + SB_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + SB_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + SB_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\
& + 2SB_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + 2SB_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + 2SB_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint_R [SA2_{44} (\phi_y)^2 + SA2_{45} (\phi_x \phi_y) + SA2_{45} (\phi_x \phi_y) + SA2_{55} (\phi_x)^2] dx dy
\end{aligned} \tag{6}$$

donde:

$$\begin{aligned}
SA1_{ij} &= \int \bar{Q}_{ij} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz, \\
SA2_{ij} &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \int \bar{Q}_{ij} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz, \\
SB_{ij} &= \int \bar{Q}_{ij} z \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz, \\
SD_{ij} &= \int \bar{Q}_{ij} z^2 dz
\end{aligned} \tag{7}$$

En forma matricial, la energía de deformación dada por la ec. (6) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA1_{11} & SA1_{12} & SA1_{16} \\ SA1_{12} & SA1_{22} & SA1_{26} \\ SA1_{16} & SA1_{26} & SA1_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) & 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SD_{11} & SD_{12} & SD_{16} \\ SD_{12} & SD_{22} & SD_{26} \\ SD_{16} & SD_{26} & SD_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) & 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \end{bmatrix}^T dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) & 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -SB_{11} & -SB_{12} & -SB_{16} \\ -SB_{12} & -SB_{22} & -SB_{26} \\ -SB_{16} & -SB_{26} & -SB_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -SB_{11} & -SB_{12} & -SB_{16} \\ -SB_{12} & -SB_{22} & -SB_{26} \\ -SB_{16} & -SB_{26} & -SB_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) & 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \end{bmatrix}^T dx dy \\
& + \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \phi_y & \phi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA2_{44} & SA2_{45} \\ SA2_{45} & SA2_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_y & \phi_x \end{bmatrix}^T dx dy \tag{8}
\end{aligned}$$

La expresión de la energía cinética máxima en coordenadas cartesianas (x, y) está dada por:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \iint_R \rho \omega^2 \left(\frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{4h^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \phi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \phi_y \right) + \frac{h}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + 2w^2) \right) dx dy \tag{9}$$

2.2 Mapeo de la geometría de la placa

La técnica de mapeo es comúnmente usada en análisis por elementos finitos o en conjunto con otros métodos, para estudiar el comportamiento dinámico de placas de diversas formas geométricas. Nallim et al. (2005) y Nallim y Oller (2008) combinaron el mapeo de espacios con el método de Ritz para encontrar la respuesta estática y dinámica de placas laminadas delgadas, simétricas y no simétricas. La placa tiene una forma arbitraria, que en coordenadas cartesianas (x, y) representa un dominio R . Las expresiones analíticas correspondientes a esta placa pueden ser expresadas en otras variables mediante el uso de una aplicación que transforma un dominio cuadrado \tilde{R} en el dominio R . El dominio \tilde{R} corresponde a la placa de referencia o elemento generatriz y está definido en sus coordenadas naturales por las simples ecuaciones de su contorno $\xi = \pm 1$ y $\eta = \pm 1$ (ver Figura 1). La aplicación que realiza la transformación entre R y \tilde{R} (o lo que es equivalente, entre (x, y) y (ξ, η)) está dada por (Zienkiewicz, 1991; Reddy, 1993):

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \tag{10}$$

donde $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 4$ son las coordenadas de las cuatro esquinas de la región cuadrilátera R y $N_i(\xi, \eta)$ son las funciones lineales de interpolación o funciones de forma que definen la geometría del elemento, y que están dadas por:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \quad (11)$$

donde ξ_i y η_i son las coordenadas naturales de la i -ésima esquina.

Las expresiones (10) relacionan las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto, con las naturales (ξ, η) . Dicha relación debe ser biunívoca, para lo cual debe cumplirse que el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas $xy \rightarrow \xi\eta$ (dicha matriz se define más adelante) sea de signo constante en todos los puntos del dominio transformado.

El objetivo de la transformación de espacios es aplicar la metodología en la placa cuadrada de referencia como un único macro elemento finito. Para ello, es necesario escribir las expresiones del campo de desplazamientos y sus derivadas en las coordenadas naturales (ξ, η) . Para esto se aplica sucesivamente la regla de derivación de funciones compuestas (el desarrollo para las funciones que aproximan los giros ϕ_x y ϕ_y , es igual al presentado para la función w que aproxima las deflexiones) y están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|\mathbf{J}|} & -\frac{J_{12}}{|\mathbf{J}|} \\ -\frac{J_{21}}{|\mathbf{J}|} & \frac{J_{11}}{|\mathbf{J}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$y \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [Op^{(1)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} + [Op^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde $[Op^{(1)}]$ y $[Op^{(2)}]$ son los operadores que permiten realizar la transformación de espacios y están dados por:

$$[Op^{(1)}] = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & -a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & -b'_3 \\ -c'_1 & -c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}, \quad [Op^{(2)}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 a'_i \beta'_i \\ \sum_{i=1}^3 b'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 b'_i \beta'_i \\ -\sum_{i=1}^3 c'_i \alpha'_i & -\sum_{i=1}^3 c'_i \beta'_i \end{bmatrix}$$

$$\text{siendo: } a'_1 = \frac{J_{22}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad a'_2 = \frac{J_{12}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad a'_3 = 2 \frac{J_{12} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_1 = \frac{J_{21}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_2 = \frac{J_{11}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_3 = 2 \frac{J_{11} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2}$$

$$c'_1 = \frac{J_{21} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad c'_2 = \frac{J_{11} J_{12}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad c'_3 = \frac{J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2}$$

$$\alpha'_1 = \frac{-J_{11,\xi} J_{22} + J_{12,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, \quad \alpha'_2 = \frac{-J_{21,\eta} J_{22} + J_{22,\eta} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, \quad \alpha'_3 = \frac{J_{11,\eta} J_{22} - J_{22,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|}$$

$$\beta'_1 = \frac{J_{11,\xi} J_{12} - J_{12,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, \quad \beta'_2 = \frac{J_{21,\eta} J_{12} - J_{22,\eta} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, \quad \beta'_3 = \frac{-J_{11,\eta} J_{12} + J_{22,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|}$$

y donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas y su expresión es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i N_{i,\xi} & \sum y_i N_{i,\xi} \\ \sum x_i N_{i,\eta} & \sum y_i N_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Por otra parte, de la teoría de funciones de varias variables, se sabe que el diferencial de área en coordenadas naturales está dado por:

$$dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (15)$$

2.3 Polinomios ortogonales

En general, el Método de los Elementos Finitos puede considerarse como un caso especial del Método de Rayleigh-Ritz. La principal diferencia radica en la selección de las funciones admisibles usadas en las series que aproximan la solución. Normalmente, la estructura se divide en un número de sub-dominios más pequeños, llamados elementos finitos. Así, la solución se aproxima por funciones (polinomios) localmente admisibles.

La precisión de la solución puede ser mejorada de dos maneras. La primera, y más común, es refinar la malla de elementos finitos, manteniendo el mismo grado de los elementos usados. Esta forma es conocida como la versión clásica o versión-h del MEF. La segunda forma consiste en fijar un tamaño de malla e incrementar el grado de las funciones polinómicas de aproximación. Este enfoque se conoce como versión-p del MEF, o Método de los Elementos Finitos Jerárquicos.

Por último, la versión híbrida llamada versión h-p, se obtiene mediante la unión de los dos conceptos previos. En esta idea se basa la formulación que se presenta en este artículo. Con este fin, los primeros modos de desplazamiento usados en la versión h se mantienen, mientras que los modos de orden más alto se derivan empleando polinomios generados con el proceso de Gram-Schmidt, extendiendo y generalizando el planteo realizado para laminados delgados en un trabajo previo de los autores (Rango et al., 2011)

Los polinomios ortogonales de Gram – Schmidt fueron usados previamente para analizar el comportamiento mecánico de diferentes tipos de placas. Su uso en el estudio de placas anisótropas es muy satisfactorio, como ha sido demostrado en distintos trabajos (Ver por

ejemplo: Nallim et al., 2003; Nallim et al., 2005; Nallim y Oller, 2008) donde los resultados presentan una rápida convergencia a la solución, prácticamente sin oscilaciones.

El macro-elemento que se presenta en este trabajo, como se mencionó en la sección previa, ha sido primeramente planteado por los autores para placas laminadas delgadas (Rango et al., 2011). La formulación expresa la deformación transversal w y los giros ϕ_x y ϕ_y en términos de las coordenadas naturales ξ, η con conjuntos de polinomios ortogonales que constituyen las funciones de forma:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{wij} p_{wi}(\xi) q_{wj}(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{wij} N_{wij}(\xi, \eta) \\ \phi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{\phi xij} p_{\phi i}(\xi) q_{\phi j}(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{\phi xij} N_{\phi ij}(\xi, \eta) \\ \phi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{\phi yij} p_{\phi i}(\xi) q_{\phi j}(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{\phi yij} N_{\phi ij}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (16)$$

donde $c_{wij}, c_{\phi xij}, c_{\phi yij}$ son los desplazamientos generalizados. Los primeros polinomios, como se dijo, son los polinomios de Hermite, de la versión-h del MEF, los siguientes polinomios ortogonales se construyen con el procedimiento de Gram-Schmidt (Bhat, 1985a,b).

Los polinomios de Gram-Schmidt se generan utilizando un polinomio base, que satisface condiciones de contorno geométricas. Por ejemplo, el primer polinomio de Gram-Schmidt para aproximar la función $w(\xi, \eta)$ satisface las condiciones de una viga biempotrada. Así, el primero de estos polinomios para la dirección ξ resulta:

$$p_{wi}(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (17)$$

Los demás polinomios del conjunto $\{p_{wi}(\xi)\}$ se generan utilizando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$p_k(\xi) = (\xi - B_k) p_{k-1}(\xi) - C_k p_{k-2}(\xi) \quad (18)$$

donde:

$$B_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}, C_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi p_{k-1}(\xi) p_{k-2}(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-2}(\xi))^2 d\xi}$$

Luego, los coeficientes de los polinomios son recalculados de manera que los polinomios resulten ortonormales:

$$\int_{-1}^1 p_k^2(\xi) d\xi = 1 \quad (19)$$

Los polinomios correspondientes a la coordenada η se generan usando el mismo procedimiento.

La generación de estos polinomios con las fórmulas de recurrencia dadas por las Ecs. (18)

garantizan que todas las aproximaciones tengan desplazamiento y pendiente nulos en cada extremo del elemento. Esta característica es particularmente importante, ya que estos modos sólo contribuyen o aportan al campo de desplazamiento interior del elemento y, por consiguiente, no afectan al desplazamiento a lo largo del borde del mismo, como ha sido demostrado por Bardell et al. (1996). Sin embargo, cuando cualquiera de estos modos se usa junto con los de Hermite, éstos se sumarán a los grados de libertad a lo largo del borde del elemento. Por lo tanto, se puede simular condiciones de borde clásicas y, para juntas internas, garantizar que las interfaces elemento-elemento sean conformadas totalmente.

3 FORMULACIÓN DEL ELEMENTO

El campo de desplazamientos del elemento puede ser representado aproximadamente por una serie finita de n modos en la dirección ξ , y n modos en la dirección η , como se indica en Ecs (16). Expresado en forma matricial:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= [N_{wij}(\xi, \eta)] \{c_{wij}\} \\ \phi_x(\xi, \eta) &= [N_{\phi ij}(\xi, \eta)] \{c_{\phi xij}\} \\ \phi_y(\xi, \eta) &= [N_{\phi ij}(\xi, \eta)] \{c_{\phi yij}\} \end{aligned} \quad (20)$$

donde $[N_w(\xi, \eta)]$, por ejemplo, es el vector fila de las funciones de forma, dado por:

$$\begin{aligned} [N_w(\xi, \eta)] &= [p_{w1}q_{w1}, p_{w1}q_{w2}, p_{w1}q_{w3}, p_{w1}q_{w4}, p_{w1}q_{w5}, \dots, p_{w1}q_{wn}, \\ & p_{w2}q_{w1}, p_{w2}q_{w2}, p_{w2}q_{w3}, p_{w2}q_{w4}, p_{w2}q_{w5}, \dots, p_{w2}q_{wn}, \\ & p_{w3}q_{w1}, p_{w3}q_{w2}, p_{w3}q_{w3}, p_{w3}q_{w4}, p_{w3}q_{w5}, \dots, p_{w3}q_{wn}, \dots, \\ & p_{wn}q_{w1}, p_{wn}q_{w2}, p_{wn}q_{w3}, p_{wn}q_{w4}, p_{wn}q_{w5}, \dots, p_{wn}q_{wn}] \end{aligned} \quad (21)$$

y:

$$\{c_w\} = \{c_{w11}, c_{w12}, c_{w13}, \dots, c_{w1n}, c_{w21}, c_{w22}, c_{w23}, \dots, c_{w2n}, c_{wn1}, c_{wn2}, c_{wn3}, \dots, c_{wnn}\}_{(n \times n) \times 1}^T \quad (22)$$

A partir de la expresión de la energía de deformación dada por la Ec. (8) y las Ecs. (12) y (13), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$\begin{aligned}
U_{\max} = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_w & c_{\phi x} & c_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A1 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA1_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_w \\ c_{\phi x} \\ c_{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_w & c_{\phi x} & c_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A3 & A4 & 2A5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SD_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} A3 & 0 & 0 \\ A4 & 0 & 0 \\ 2A5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_w \\ c_{\phi x} \\ c_{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_w & c_{\phi x} & c_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A3 & A4 & 2A5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -SB_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_w \\ c_{\phi x} \\ c_{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_w & c_{\phi x} & c_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A1 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -SB_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} A3 & 0 & 0 \\ A4 & 0 & 0 \\ 2A5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_w \\ c_{\phi x} \\ c_{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_w & c_{\phi x} & c_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA2_{ij} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_w \\ c_{\phi x} \\ c_{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (23)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
[A1] &= \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
[A2] &= \begin{bmatrix} -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
[A3] &= \begin{bmatrix} a'_1 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + a'_2 \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} - a'_3 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} + a\alpha \frac{\partial N}{\partial \xi} + a\beta \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
[A4] &= \begin{bmatrix} b'_1 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + b'_2 \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} - b'_3 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} + b\alpha \frac{\partial N}{\partial \xi} + b\beta \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
[A5] &= \begin{bmatrix} -c'_1 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} - c'_2 \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + c'_3 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} - c\alpha \frac{\partial N}{\partial \xi} - c\beta \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (24)
\end{aligned}$$

De la Ec. (23), la matriz de rigidez del elemento resulta de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
[K] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A1 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} [SA1_{ij}]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A3 & A4 & 2A5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [SD_{ij}]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} A3 & 0 & 0 \\ A4 & 0 & 0 \\ 2A5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A3 & A4 & 2A5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [-SB_{ij}]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A1 & 0 & A2 \\ 0 & A2 & A1 \end{bmatrix} [-SB_{ij}]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} A3 & 0 & 0 \\ A4 & 0 & 0 \\ 2A5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \\ N & 0 \end{bmatrix} [SA2_{ij}]_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (25)
\end{aligned}$$

De manera análoga a lo desarrollado para la matriz de rigidez, la matriz de masa en coordenadas naturales, se obtiene a partir de la energía cinética de Ec (9).

4 PROBLEMA DE AUTOVALORES

A partir de las matrices de masa y rigidez (Ec. (25)), se obtienen las frecuencias naturales de vibración libre, mediante la sustitución en la ecuación de Lagrange:

$$\{[K^E] - \omega^2 [M^E]\} \{c_{ij}\} = 0 \quad (26)$$

En correspondencia con cada autovalor ω^2 se tienen los autovectores $\{c_{ij}\}$. El movimiento de cualquier punto (ξ, η) del elemento, puede ser calculado sustituyendo el autovector apropiado junto con las funciones de forma asociadas p_i ($i = 1, \dots, n$) y q_j ($j = 1, \dots, n$) en las Ecs. (20). Así, se puede graficar la superficie deformada del elemento.

5 ESTUDIO DE CONVERGENCIA

La formulación obtenida fue implementada en un programa de computadora. Para validar la metodología implementada, se muestra a continuación uno de los estudios de convergencia y verificación realizados, para la frecuencia fundamental de vibración correspondiente a una placa laminada cuadrada de cuatro capas, con esquema de laminación $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$, simplemente apoyada en sus cuatro lados.

Se presentan dos relaciones de aspecto a/h y se listan los adimensionales de frecuencia para diversas relaciones E_1/E_2 .

Las propiedades del material de las láminas son $E_1 = 40E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ y $G_{23} = 0.5E_2$.

El estudio de convergencia se lleva a cabo incrementando el número de términos correspondiente a los polinomios de Gram-Schmidt (GS) utilizados para enriquecer la función de aproximación.

En la [Tabla 1](#) se resumen los valores obtenidos para la primera frecuencia de la placa, usando desde dos polinomios de GS hasta cinco, y se muestran los valores de referencia ([Liu](#)

et al., 2007 y Xiang y Wang, 2009).

Se puede observar que a partir del uso de tres polinomios, las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, observándose además convergencia estable y sin oscilaciones. Por lo tanto se puede concluir que el uso de cuatro polinomios de GS produce muy buenos resultados.

a/h	E_1/E_2	Xiang y Wang (2009)	Liu et al. (2007)	Propuesto m=2	Propuesto m=3	Propuesto m=4	Propuesto m=5
5	3	-	6.557	7.396	6.267	6.250	6.248
	10	8.421	8.270	9.645	8.146	8.116	8.113
	20	9.671	9.528	11.452	9.486	9.440	9.433
	30	10.416	10.279	12.699	10.273	10.216	10.211
	40	10.938	10.773	13.694	10.816	10.749	10.742
10	3	-	7.240	7.830	7.089	7.084	7.080
	10	9.912	9.847	10.903	9.761	9.749	9.741
	20	12.316	12.225	13.698	12.183	12.161	12.159
	30	13.943	13.987	15.670	13.857	13.825	13.822
	40	15.213	15.112	17.204	15.121	15.079	15.073

Tabla 1: Valores de la primera frecuencia $\Omega_1 = \omega_1 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ de placa cuadrada SSSS laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación las frecuencias naturales, las formas modales y las líneas modales asociadas, correspondientes a la placa que se muestra en la Figura 3.

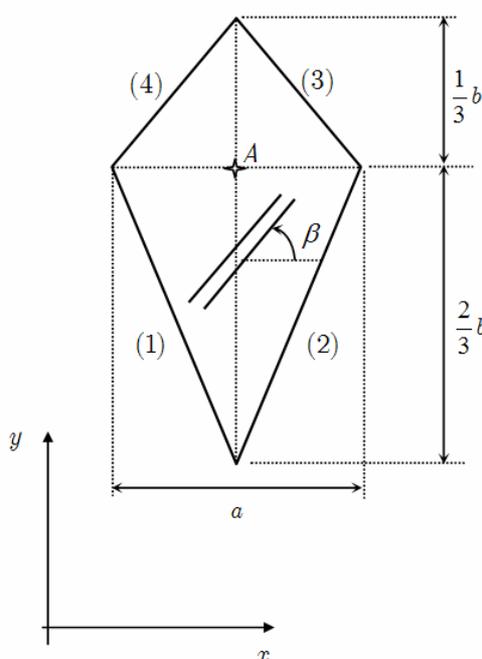


Figura 3: Placa romboidal laminada con secuencia $(\beta, -\beta, -\beta, \beta)$.

Se considera una placa romboidal, con dos tipos de condiciones de apoyo: sus cuatro lados simplemente apoyados (SSSS) y sus cuatro lados empotrados (CCCC). La geometría adoptada en este ejemplo corresponde a una relación $b/a = 2$. Se trata de un laminado simétrico de cuatro capas, con secuencia de laminación $(\beta, -\beta, -\beta, \beta)$. Se considera un material laminado E-glass/epoxi:

$$E_L = 60.7 \text{ GPa}, E_T = 24.8 \text{ GPa}, G_{LT} = 12 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.23.$$

Para cada una de las dos condiciones de contorno, el ángulo de orientación de la fibra varía de 0° a 90° . Para estos valores extremos, el laminado será cruzado, mientras que para valores intermedios, será equiangular. Los resultados se lograron usando los polinomios de Hermite combinados con cinco polinomios de Gram-Schmidt.

Los valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia para la placa romboidal SSSS son los que se resumen en [Tabla 2](#).

a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)
10	0	18.5809		34.5022		56.2822	
	15	18.2249		34.1421		54.7248	
	30	17.3695		33.3455		51.0873	
	45	16.4231		32.5637		46.9713	
	60	15.7411		32.0135		43.4381	
	75	15.4382		31.6786		41.1124	
	90	15.3719		31.5529		40.3000	
100	0	20.6000	20.0737	36.8326	36.6949	60.1989	56.2655
	15	20.2158	19.9335	36.7318	36.3469	59.9456	55.3904
	30	19.3819	19.0271	37.9273	36.1031	61.7435	55.4023
	45	18.1723	17.9583	36.9841	35.7434	56.6129	53.4624
	60	17.3480	17.2236	36.3386	35.5353	51.9358	50.1564
	75	17.0739	16.9929	36.0438	35.4883	49.0573	47.8736
	90	17.0546	17.6523	35.9436	36.0199	48.1886	49.6827

Tabla 2: Valores de frecuencias $\Omega = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_\beta}}$ con $D_\beta = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$ de placa romboidal SSSS

Los valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia para la placa romboidal CCCC son los que se resumen en [Tabla 3](#).

Las formas modales y las líneas modales asociadas para el caso de la placa SSSS con secuencia de laminación $(45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ y $a/h = 10$ se muestran, a modo de ejemplo, en [Figura 4](#), [Figura 5](#) y [Figura 6](#). A su vez, las formas modales y las líneas modales asociadas para el caso de la placa CCCC con secuencia de laminación $(45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ y $a/h = 10$ se muestran en [Figura 7](#), [Figura 8](#) y [Figura 9](#).

a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)
10	0	32.1552		48.0616		67.5206	
	15	31.6226		47.5493		66.5967	
	30	30.3561		46.5042		64.4355	
	45	28.8508		45.4811		60.0875	
	60	27.4350		44.5784		56.1383	
	75	26.3933		43.8700		53.3604	
	90	26.0017		43.5920		52.3198	
100	0	37.4472	36.8314	59.6702	58.8535	88.5645	83.1270
	15	37.1065	37.0481	59.2706	58.5976	87.5861	82.0608
	30	36.0531	36.0536	58.2387	57.8697	84.8958	81.2752
	45	34.3733	34.4103	56.9190	56.7976	80.3591	78.8899
	60	32.5095	32.5536	55.6439	55.6541	74.7105	74.3086
	75	31.0981	31.1404	54.6539	54.7190	70.2107	70.1211
	90	30.5825	31.8310	54.2437	55.4846	68.5582	72.0156

Tabla 3: Valores de frecuencias $\Omega_r = \omega_r a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_\beta}}$ con $D_\beta = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ de placa romboidal CCCC

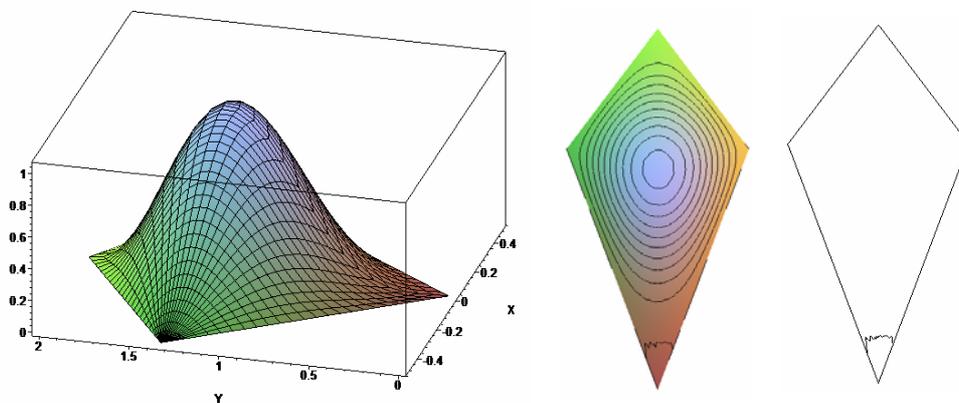


Figura 4: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_1 de placa romboidal SSSS ($a/h = 10$).

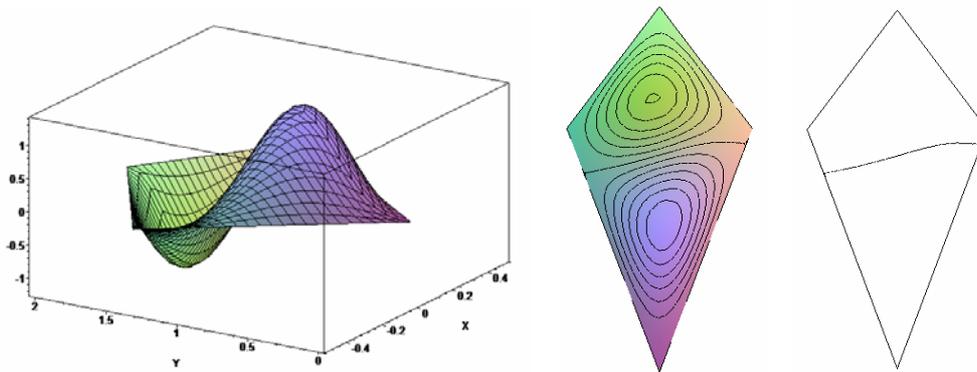


Figura 5: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_2 de placa romboidal SSSS ($a/h = 10$).

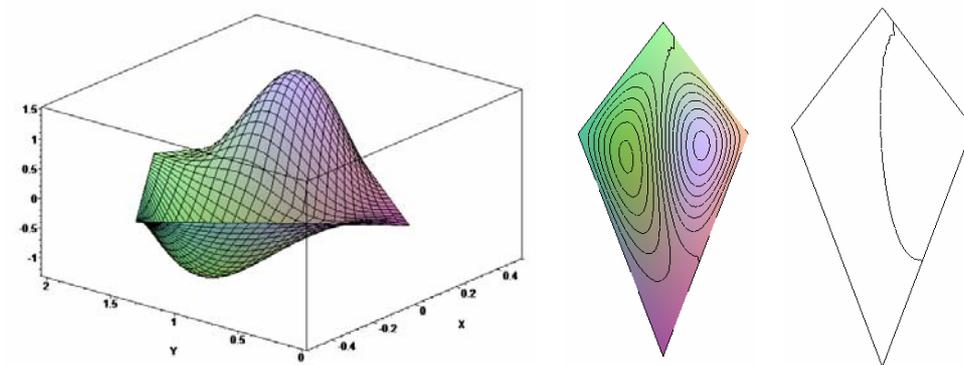


Figura 6: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_3 de placa romboidal SSSS ($a/h = 10$).

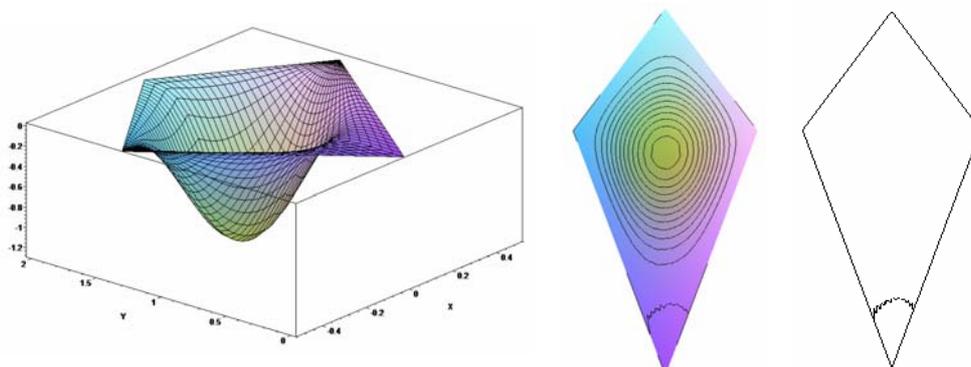


Figura 7: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_4 de placa romboidal CCCC ($a/h = 10$).

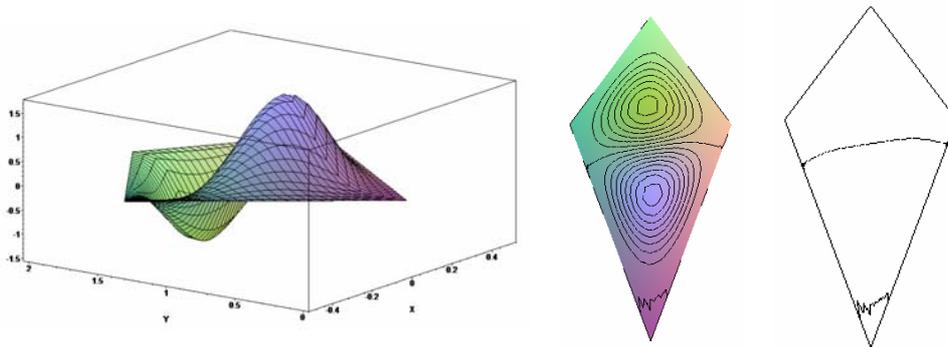


Figura 8: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_2 de placa romboidal CCCC ($a/h = 10$).

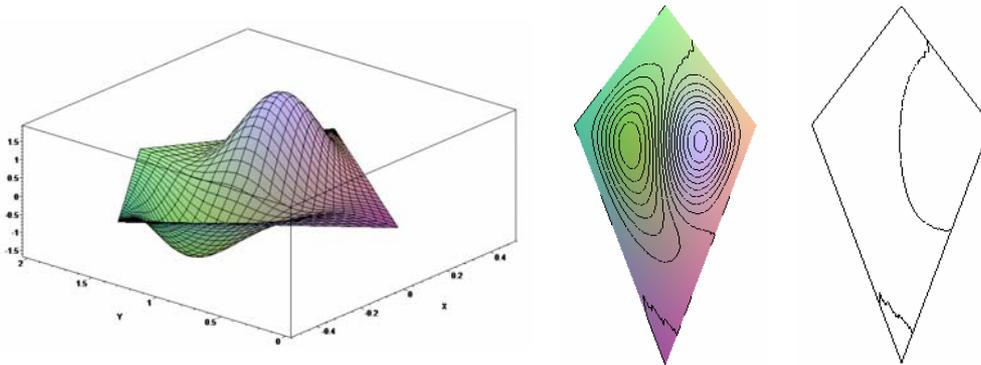


Figura 9: Forma modal y líneas modales asociadas a Ω_3 de placa romboidal CCCC ($a/h = 10$).

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la formulación y desarrollo de un macro elemento finito de placa enriquecido que puede ser aplicado de manera unificada al análisis de placas laminadas de distintas formas geométricas. El modelo incluye la deformación por corte a través de una cinemática que permite anular las tensiones tangenciales en la superficie libre y una más adecuada y precisa consideración de la distribución de las tensiones tangenciales. Esto hace que el modelo sea especialmente adecuado para su aplicación al análisis de placas laminadas, tanto delgadas como gruesas, ya que aún cuando la relación de aspecto (espesor/longitud característica) permite considerar a una placa como geoméricamente delgada, la baja rigidez cortante transversal que presentan los laminados hace que el uso de la teoría clásica conduzca a errores cuando se determinan las frecuencias correspondientes a los modos superiores de vibración, así como cuando se calculan las tensiones interlaminares.

Por otra parte, el uso de esta teoría de orden superior hace innecesaria la incorporación de factores de corrección por corte y no se produce bloqueo por cortante, aún en valores elevados de la relación a/h . A través de los ejemplos correspondientes a vibraciones libres, presentados en este trabajo, se observa que el método propuesto produce muy buenos resultados.

Por otro lado, los macro-elementos individuales aquí propuestos pueden ser superpuestos para armar una matriz de rigidez global, prestando atención a la estructura interna de cada elemento en la misma. Cada fila y columna de la matriz $[K^E]$ corresponden a un determinado grado de libertad $c_{(\bullet)ij}$ (w, ϕ_x, ϕ_y). El primer paso en un proceso de ensamblaje será separar estos grados de libertad en nodales (N), de borde (B) y puramente internos (I), y luego reordenar las correspondientes entradas en los elementos de la matriz de rigidez (Rango et al., 2011).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET, a través del PIP 0105/2010, Proyecto CIUNSa N°1903 y Proyecto Redes V, financiado por la Secretaría de Políticas Universitarias.

REFERENCIAS

- Bardell, N.S., Dunsdon, J.M., and Langley, R.S., Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates. *Composite Structures*, 34:129–143, 1996.
- Bhat, R.B., Plate deflection using orthogonal polynomials, *Journal Engineering Mechanics*. ASCE 101:1301-1309, 1985. Bhat, R.B., Plate deflection using orthogonal polynomials, *Journal Engineering Mechanics*. ASCE 101:1301-1309, 1985a.
- Bhat, R.B., Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibrations* 102:493-499, 1985b.
- Ferreira, A.J.M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & Structures*, 83:2225-2237, 2005.
- Liu, L., Chua, L.P., Ghista, D.N., Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates. *Composite Structures*, 78:58-69, 2007.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C., Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94:1991-2000, 2012a.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C., A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. *Computers & Structures*, 94-95:45-53, 2012b.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C., A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49:43-53, 2012c.
- Mindlin, R.D., Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31-38, 1951.
- Nallim, L.G., Grossi, R.O., On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1201-1207, 2003.
- Nallim, L.G., Oller, S., Grossi, R.O., Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1797-1822, 2005.
- Nallim, L. G., Oller, S., An analytical - numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plate. *Composite Structures Journal*, 85: 311–

- 325, 2008.
- Oller, S., Análisis y Cálculo de Estructuras de Materiales Compuestos. 1ra ed. *Edicions UPC. CIMNE*. Barcelona, España, 2002.
- Rango, R.F., Nallim, L.G., Oller, S., Formulación y ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras laminadas. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*. En prensa manuscript N° 1549, 2011.
- Reddy, J.N., *Finite Element Method*. McGraw Hill, 1993.
- Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Second Edition. CRC Press, United States of America, 2003.
- Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 12:69-76, 1945.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*. New York McGraw-Hill, 1959.
- Xiang, S., Wang, K., Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47:304-310, 2009.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method, fourth ed.* McGraw-Hill, 1991.