

## MODELO DE CAMPO DE FASE PARA SIMULAR FRÁCTURA FRÁGIL

A. Ciarbonetti<sup>a</sup>, A.E. Huespe<sup>b</sup>, P.J. Sánchez<sup>a,b</sup> y Milton N. da Silva<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*CIMEC-INTEC-UNL-CONICET, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina*

<sup>b</sup>*GIMNI-UTN-FRSF, Lavaisse 610, 3000 Santa Fe, Argentina*

<sup>c</sup>*Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Cidade Universitária, Rio de Janeiro, Cx. Postal 68503 21945-970, Brazil*

**Palabras Clave:** Métodos variacionales para fractura; modelado de fractura mediante campo de fase

**Resumen.** En este trabajo se presenta una metodología basada en la teoría de la formulación variacional de fractura, introducida por Francfort y Marigo para resolver problemas de propagación de fisura en fractura frágil. La solución del problema que surge de esa formulación, y siguiendo a (Da Silva et al., 2012), se realiza mediante la introducción de un campo de fase suave  $d$  que representa la fisura. Una técnica similar ha sido descrita en (Miehe et al., 2010). Se propone una ecuación adecuada para evaluar la evolución  $d$  y que por lo tanto describe la propagación de la fisura a través de la estructura. El problema suave así planteado, converge al problema sharp de la teoría de Francfort y Marigo. El modelo numérico que se ha implementado, sigue las propuestas de los trabajos de Miehe (Miehe et al., 2010). En esta contribución se presentan las ecuaciones acopladas que gobiernan la evolución del campo de desplazamientos  $u$  como también la del campo de fase,  $d$  y su relación con el problema de equilibrio de tensiones cuasi-estático estándar. El acoplamiento introducido entre  $d$  y las variables mecánicas del problema son tales que la evolución de  $d$  degrada el comportamiento mecánico del material. Desde este punto de vista, se interpreta a  $d$  como una variable de daño clásica en los modelos de variables internas. El conjunto de ecuaciones acopladas que se derivan del modelo propuesto se resuelven numéricamente utilizando el método de elementos finitos. Y los resultados se validan a través de comparaciones con soluciones analíticas propuestas en bibliografía clásica como (Gross y Seelig, 2006).

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde un tiempo a la actualidad, en el contexto de las aproximaciones numéricas de Mecánica de Fractura clásica para materiales con comportamiento frágil, se ha comenzado a utilizar masivamente una formulación variacional introducida por Francfort y Marigo (1998). El concepto fundamental de esta propuesta consiste en resolver un problema de minimización de una función energía total. Esta función es la suma de la energía volumétrica de deformación elástica convencional (integrada en todo el cuerpo) más la energía de fractura sobre la superficie completa de la fisura. La propuesta de estos autores considera al camino de fisura como una variable del problema, cuyo resultado surge del proceso de minimización del funcional energía.

El problema así planteado es singular. Cabe aclarar que, a pesar que esta propuesta está basada en el concepto de minimización energética, no tiene fundamentación termodinámica.

En este trabajo, y en conexión con la formulación variacional de dichos autores, se aproxima el problema de fractura frágil considerando al campo de fase como un descriptor morfológico micro mecánico, partiendo de la teoría del continuo con microestructura.

A partir de este contexto teórico, desarrollamos las ecuaciones que gobiernan el problema de inicio y propagación de fisuras realizados por Capriz (1989), Mariano (2002) y Da Silva et al. (2012), en donde se pueden encontrar detalles adicionales, e importantes de la presentación aquí resumizada.

En la siguiente sección se introducen los conceptos fundamentales de la teoría del continuo con microestructura y las consideraciones del campo de fase como descriptor morfológico. Seguido a ésto, introducimos las ecuaciones en la forma débil y la correspondiente implementación numérica.

Finalmente se realizan validaciones del modelo numérico desarrollado y se resuelven ejemplos.

## 2. TEORÍA DEL CONTINUO CON MICROESTRUCTURA

### 2.1. Una aproximación al problema de campo de fase

Consideremos dos descriptores cinemáticos para un sólido  $\mathcal{B}$  que especificamos a continuación: *i*) la ubicación espacial  $\mathbf{x}$ , de una partícula material inicialmente en la posición  $\mathbf{X}$ , y dada por:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}$$

Donde  $t$  es el tiempo y  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos. El segundo descriptor *ii*) es el campo de fase  $d(\mathbf{X}, t)$ , considerado en este contexto como una variable microestructural:  $d \in [0, 1]$ , significando con  $d = 1$ , al material completamente agotado y con  $d = 0$ , el material completamente virgen.

Como hipótesis de partida asumimos que la ecuación constitutiva del material depende de  $\nabla d$ . Particularmente la energía libre se define con los siguientes argumentos:  $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \nabla d)$ . Esta dependencia requiere que se consideren interacciones mecánicas tipo fuerza generalizada  $\kappa$  y microtensiones  $\boldsymbol{\eta}$ , que generan potencia a través de  $\dot{d}$  y  $\nabla \dot{d}$ . La ecuación de potencia externa resulta:

$$\mathcal{P}^{ext} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \kappa \dot{d}) \, d\mathcal{B} + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \dot{d}) \, d\Gamma \quad (1)$$

Con:  $\mathbf{b}$ , fuerza volumétrica externa;  $\mathbf{t}$ , tracciones impuestas en la frontera;  $\kappa$ , microfuerza volumétrica externa y  $\boldsymbol{\eta}$ , microtracción generalizada.

En este contexto la potencia interna  $\mathcal{P}^{int}$  podemos escribirla como:

$$\mathcal{P}^{int} = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \pi \dot{d} + \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d}) \, d\mathcal{B} \quad (2)$$

Donde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\boldsymbol{u}}$ , es la velocidad de deformación;  $\boldsymbol{\sigma}$ , Tensor convencional de Tensiones de Cauchy;  $\boldsymbol{\xi}$ , vector de microtensiones internas y  $\pi$ , la microfuerza interna.

Aplicando el Principio de Trabajos Virtuales para todo  $\dot{\boldsymbol{u}}$  y  $\dot{d}$  admisibles, podemos escribir la igualdad:

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int}$$

Reemplazano las definiciones (1) y (2), en esta igualdad:

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \kappa \dot{d}) \, d\mathcal{B} + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \eta) \dot{d} \, d\Gamma = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \pi \dot{d} + \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d}) \, d\mathcal{B} \quad (3)$$

Considerando arbitrariamente  $\dot{d} \equiv 0$ ;  $\forall \dot{\boldsymbol{u}}$  admisible en la ecuación (3) y aplicando el teorema de la divergencia tenemos:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, d\mathcal{B} - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \dot{\boldsymbol{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, d\Gamma = 0 \quad (4)$$

Aplicando idéntico razonamiento con  $\dot{\boldsymbol{u}} \equiv 0$ ;  $\forall \dot{d}$ ; admisible en (3), nos queda:

$$\int_{\mathcal{B}} (\kappa \dot{d} + \pi \dot{d} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \dot{d}) \, d\mathcal{B} - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \dot{d} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \eta \dot{d} \, d\Gamma = 0 \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5), se puede concluir que :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \text{ en } \mathcal{B}, \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \pi + \kappa = 0 \text{ en } \mathcal{B}, \quad \eta = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma \quad (6)$$

La ecuación (6-a) es la ecuación convencional de Cauchy en forma local (despreciando las fuerzas de inercia), (6-b) la ecuación de equilibrio de tracciones en el borde del cuerpo, la (6-c), resulta ser el balance de fuerzas microscópicas local y la última de éstas, representa el equilibrio de micro tracciones generalizadas en el contorno del cuerpo.

De ahora en más, asumiremos que no existen microfuerzas impuestas externamente, luego  $\kappa = 0$ .

El segundo principio de la termodinámica ver [Gurtin et al. \(2010\)](#), para este caso se puede escribir como:

$$\dot{\varphi} - \mathcal{P}^{int} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \nabla d) - \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \pi \dot{d} - \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d} \leq 0 \quad (7)$$

Válido para todo proceso termodinámicamente admisible. De esta desigualdad se puede determinar que:

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \varphi = \boldsymbol{\sigma} \quad - \partial_d \varphi = \pi_a \quad \partial_{\nabla d} \varphi = \boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

Siguiendo la idea de [\(Da Silva et al., 2012\)](#), escribimos la microfuerza  $\pi$  como la suma de dos términos:

$$\pi = \pi_a + \pi_r$$

En donde  $\pi_r \neq 0$  sólo en si  $\dot{d} = 0$ . De este modo,  $\pi_r$  puede ser considerada como una microfuerza reactiva y no produce potencia. Por lo que, cualquier valor arbitrario de  $\pi_r$  es termodinámicamente admisible.

## 2.2. Especificación para la función de energía libre

Consideramos ahora una función para  $\varphi$  de la forma:

$$\varphi = \frac{1}{2}g(d)\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^- + f(d) + \frac{G_c\ell}{2} |\nabla d|^2 \quad (9)$$

Con  $\mathbb{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ ; el tensor elástico Hooke, en cuya expresión,  $\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros de Lamé,  $\mathbf{1}$  el tensor identidad de orden 2 e  $\mathbf{I}$  el tensor identidad de orden 4.

Las componentes positivas y negativas del tensor de deformaciones, se definen como:

$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \langle \varepsilon_i \rangle_+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^- = \langle \varepsilon_i \rangle_- \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ; siendo  $\langle \rangle$  los corchetes de MacAulay y toman el valor del argumento si es positivo o cero si negativo.

$G_c$  es la energía de fractura por unidad de área de fisura (sus dimensiones son:  $[Nm/m^2]$ ) y  $\ell$  es un parámetro de orden del modelo de campo de fase cuya dimensión es una longitud ( $[m]$ ).

Los primeros dos términos de la ecuación (9), denotan la densidad de energía de deformación elástica, con  $g(d)$  función del daño y que verifica que:

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 0, \quad g(1)' = 0$$

En el presente trabajo definimos esta función como:  $g(d) = (1 - d)^2$ . Los últimos dos términos de (9) se pueden, interpretarse como la energía cohesiva regularizada en el ancho  $\ell$  de la fisura. Siendo:  $f(d) = G_c d^2 / 2\ell$ .

De manera completa, (9) queda finalmente:

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 - d)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^- + \frac{G_c d^2}{2\ell} + \frac{G_c \ell}{2} |\nabla d|^2 \quad (10)$$

Reemplazando la expresión (10) en las ecuaciones de estado (8), éstas se reescriben como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (1 - d)^2 \mathbb{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \mathbb{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^- \\ \pi_a &= [(1 - d)\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+] - G_c d / \ell \\ \boldsymbol{\xi} &= G_c \ell \nabla d \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo que la ecuación de balance (6-c) se reescribe, como:

$$\nabla \boldsymbol{\xi} + \pi = G_c \ell \Delta d - \frac{G_c d}{\ell} + (1 - d)\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \pi_r = 0 \quad (12)$$

Donde hemos introducido el Laplaciano:  $\Delta(\cdot) = \nabla \cdot (\nabla(\cdot))$ . Además, en (10) se debe considerar que  $\pi_r = 0$  para  $\dot{d} > 0$  y  $\pi_r$  es tal que verifica automáticamente (12) cuando  $\dot{d} = 0$ , la forma que toma  $\pi(t)$  se esquematiza en la Figura 1.

La ecuación (12) se considera la ecuación de gobierno para el campo de fase. Su resolución se puede llevar a cabo adicionando condiciones de borde adecuadas. Las condiciones de borde adicionales, pueden ser de dos tipos: i)  $\pi = 0$  en  $\Gamma$ , siendo  $\Gamma$  el contorno de  $\mathcal{B}$ , o bien; ii)  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0$ , lo que es equivalente a definir:  $\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $\Gamma$ . Para todos los casos que hemos desarrollado en este trabajo, optamos por el segundo tipo de condiciones de contorno para el campo de fase.

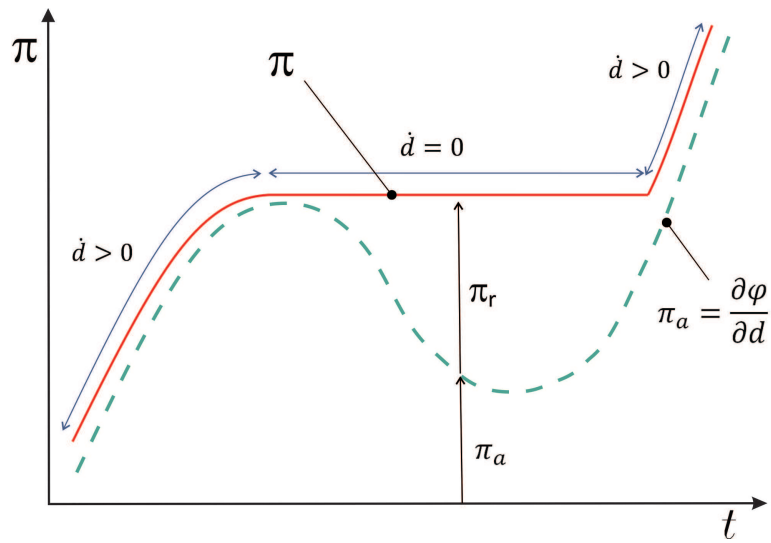


Figura 1: Esquema de la función  $\pi(t)$ .  $\pi_r = 0$  para  $\dot{d} > 0$  y  $\pi_r$  arbitraria para  $\dot{d} = 0$

### 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA 1D

Resolvemos el problema de fractura 1D (barra) utilizando las ecuaciones de campo de fase. A tal fin seguimos el trabajo [Borden et al. \(2011\)](#). Las ecuaciones para el problema 1D de una barra sometida a tensiones (asumimos que la deformación uniaxial es positiva, con lo que  $\varepsilon = \varepsilon^+$ ) impuestas en sus extremos, se escriben como sigue:

i) Ecuación de equilibrio (6-a) especificada para el caso 1-D:

$$\sigma_{,x} = 0 \tag{13}$$

Donde utilizamos la notación  $(\cdot)_{,x} = \frac{d(\cdot)}{dx}$

ii) Ecuación del campo de fase (12)

$$\frac{G_c}{\ell} (d - \ell^2 d_{,xx}) = (1 - d) E \varepsilon^2 \tag{14}$$

iii) Ecuación constitutiva (11-a):

$$\sigma = (1 - d)^2 E \varepsilon \tag{15}$$

más las condiciones de borde según lo comentado arriba, (en este caso ambas condiciones de borde son:  $d_{,x} = 0$  y  $\sigma^h$  en ambos bordes de la barra). Además, en cualquier caso, la ecuación de equilibrio determina que la tensión es constante a lo largo de la barra.

#### 3.1. Caso homogéneo

Analizamos el caso de la barra homogéneamente deformada e identificamos los campos con el supraíndice “h”. Para este caso:  $d^h_{,x} = d^h_{,xx} \equiv 0$ , y de la ecuación (14) resulta:

$$\frac{G_c}{\ell} d^h = (1 - d) E (\varepsilon^h)^2 \tag{16}$$

Despejando de esta ecuación  $d^h$  e introduciendo en (15), se obtiene la respuesta  $\sigma^h(\varepsilon^h)$  que determina este modelo. Diversas curvas  $\sigma^h(\varepsilon^h)$  se muestran en la Figura 2. Los valores críticos  $\sigma_{max}^h$  y  $\varepsilon_{max}^h$  mostrados en esas curvas resultan:

$$\sigma_{max}^h = \frac{3\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{G_c E}{\ell}} \quad ; \quad \varepsilon_{max}^h = \sqrt{\frac{G_c E}{3E\ell}} \quad (17)$$

En la misma Figura se remarca la sensibilidad de la respuesta  $\sigma^h(\varepsilon^h)$  con los parámetros  $G_c$  y  $\ell$ .

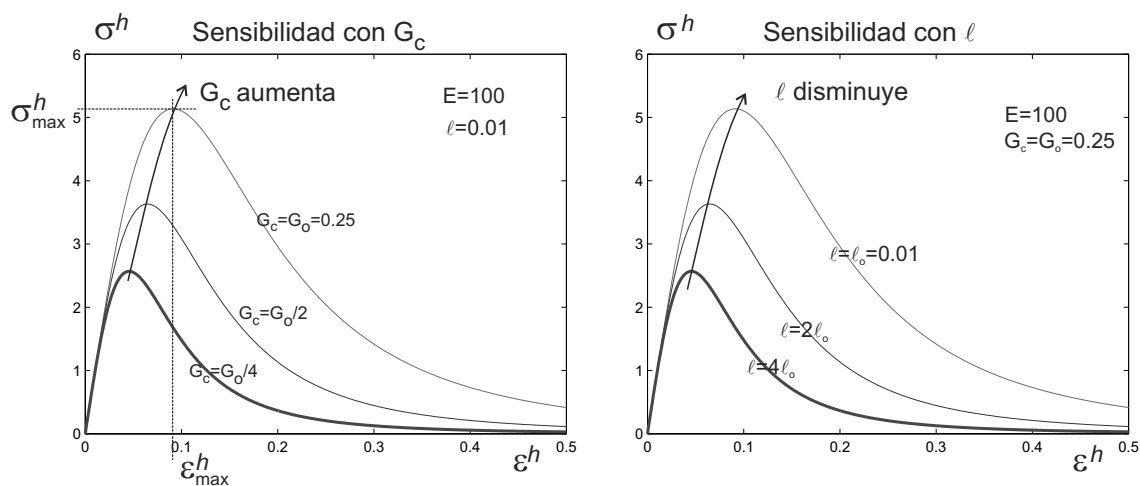


Figura 2: Análisis de sensibilidad de las curvas  $\sigma$  vs.  $\varepsilon$  variando los parámetros  $G_c$  y  $\ell$

Notamos, que el aumento de  $G_c$ , manteniendo fijos los otros parámetros del material, no implica en una disminución de la pendiente poscrítica de la respuesta  $\sigma^h(\varepsilon^h)$ , lo que contrasta significativamente con la respuesta de modelos de fractura alternativos tipo cohesivos.

De (16) podemos expresar  $\varepsilon^h$  como una función explícita de  $d^h$ , e introducirla en el modelo constitutivo, resultando:

$$\sigma^h = \sqrt{\left(\frac{G_c E}{\ell}\right) d^h (1 - d^h)^3} \quad (18)$$

Esta expresión es utilizada en la próxima SubSección para derivar la respuesta de una barra no-homogénea.

### 3.2. Caso no-homogéneo

Utilizando la ecuación (15), la expresión (14) se puede reescribir como:

$$\frac{G_c}{\ell} d - \frac{\sigma \varepsilon}{(1-d)} - (G_c \ell) d_{,xx} = 0 \quad (19)$$

Multiplicando esta expresión por:  $d_{,x}$ , derivando (15) respecto a  $x$  e igualando a cero por la ecuación de equilibrio: (13), y finalmente operando, se obtiene la expresión:

$$\left( \frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - (d_{,x})^2 \right)_{,x} = 0 \quad (20)$$

que resulta en:

$$\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - (d_{,x})^2 - k = 0 \quad (21)$$

el término  $k$  es una constante que se puede evaluar considerando la condición de borde para  $x \rightarrow \infty$ . En este caso, utilizamos  $d_{,x}(\infty) = 0$ , con lo que  $d \rightarrow d^h$  y siendo  $d^h$  un valor constante. De la solución que determinamos para la barra homogénea (en este caso hay que considerar que en el infinito los campos tienden a ser homogéneos y por lo tanto la solución de la SubSección previa, prevalece), podemos considerar la tensión:  $\sigma^h(d^h)$  que está asociada con  $d^h$ , y que por lo tanto será el valor de la tensión de equilibrio que se impone en la barra:  $\sigma = \sigma^h$  para todo  $x$ . Con lo cual, evaluando (21) en  $x \rightarrow \infty$ , obtenemos:

$$k = \frac{(d^h)^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{(\sigma^h)^2}{(1-d^h)^2} \quad (22)$$

Y de (21) despejamos  $d_{,x}$  e integramos, como sigue:

$$x(d^*) = \int_{d_0}^{d^*} \left( \frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - k \right)^{-1/2} \partial d \quad (23)$$

La expresión  $\partial d$  se interpreta en este caso como el diferencial de  $d$ . El límite inferior de la integral  $d_0$ , con  $d_0 \geq d^h$ , es el valor de  $d$  en el centro de la barra y tal que define  $d_{,x} = 0$  en  $x = 0$ , que se asume como la segunda condición de borde para resolver (19). Por experimentación numérica se puede observar que para  $d \in [d^h, d_0]$  la función:

$$\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - k \geq 0 \quad (24)$$

y fuera de ese intervalo, la función es negativa. De este modo, la integral (23) determina la coordenada  $x$  del punto de la barra que tiene un valor de  $d = d^*$ . Esta función se representa en la Figura 3 para distintos valores de  $d^h$  que se han tomado como dato para evaluar la integral (23). La tensión de la barra,  $\sigma^h(d^h)$ , en cada caso es un porcentaje de la tensión máxima  $\sigma_{max}^h$  definida mediante la ecuación: (17). Este porcentaje se define a través del parámetro:  $\beta = \sigma^h(d^h)/\sigma_{max}^h$  que también identifica cada curva de la Figura 3.

## 4. PRINCIPIO VARIACIONAL E IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

### 4.1. Principio Variacional

En las secciones anteriores introducimos y presentamos las ecuaciones de gobierno para el problema de campo de fase en el contexto del continuo con microestructura.

Introduciendo ahora un método de residuos ponderados para evaluar la ecuaciones (4) y (5), y reemplazando las relaciones (6) en cada una de éstas tenemos:

$$\int_{\mathcal{B}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \delta \mathbf{u} d\mathcal{B} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \delta \mathbf{u} d\mathcal{B} + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (25)$$

$\forall \delta \mathbf{u} \in H^1_{(\mathcal{B})} / \delta \mathbf{u}|_{\Gamma \delta u} = \bar{\delta} u$ ; y  $\delta \dot{\mathbf{u}} \in H^1_{(\mathcal{B})} / \delta \mathbf{u}|_{\Gamma \delta u} = 0$ .

La ecuación (5) nos queda como:

$$\int_{\mathcal{B}} \pi \delta d d\mathcal{B} + \int_{\mathcal{B}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \delta d d\mathcal{B} = 0 \quad (26)$$

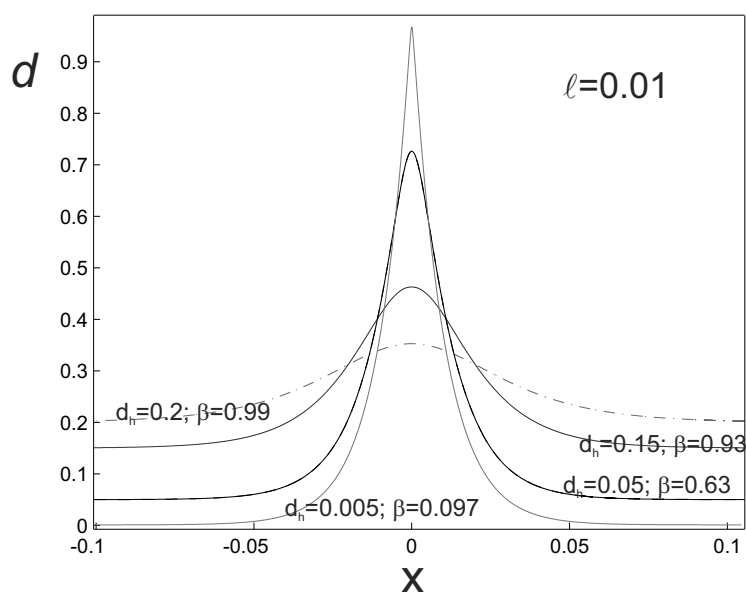


Figura 3: Distribución del campo de fase  $d$  para diferentes valores de  $\sigma(d_h)$

Debilitando el segundo término y reemplazando las definiciones (11), llegamos a:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[ ((G_c \ell \nabla d) \nabla \delta d) - \left( (1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \pi_r - \frac{G_c d}{\ell} \right) \delta d \right] d\mathcal{B} = 0 \quad (27)$$

$\forall \delta d \in H^1_{(\Omega)}$

Las ecuaciones (25) y (27) nos dan la forma variacional del problema de campo de fase.

## 4.2. Implementación Numérica

Consideramos ahora  $\delta \mathbf{u} \in V_0$ , donde  $V_0$  es el espacio de funciones de test suficientemente suaves y homogéneas en el contorno; y aproximamos por el método de elementos finitos el campo virtual de desplazamientos  $\delta \mathbf{u} = N^I \delta \hat{\mathbf{u}}^I$ , con  $N^I$  la función de forma estándar asociada al nodo  $I$ . E introducimos esta aproximación en la ecuación (25). Realizando las operaciones de montajes elementales la podemos escribir en forma discreta como:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \nabla N^I \delta \hat{\mathbf{u}}^I d\mathcal{B} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} N^I \delta \hat{\mathbf{u}}^I d\mathcal{B} + \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} N^I) \delta \hat{\mathbf{u}}^I d\mathcal{B} \quad (28)$$

Utilizamos la misma técnica para aproximar  $\delta d$  por el método de elementos finitos con  $\delta d = N^I \delta \hat{d}^I$ , quedando la ecuación (26), escrita en forma discreta como:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[ \left( (G_c \ell \nabla d) (\nabla N^I) \delta \hat{d}^I \right) - \left( (1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \pi_r - \frac{G_c d}{\ell} \right) N^I \delta \hat{d}^I \right] d\mathcal{B} = 0 \quad (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29), permiten resolver el problema de campo de fase en forma numérica. A tal fin se utiliza un esquema por etapas ("staggered") en el que primero se resuelve el campo de desplazamientos a través de (28), luego se calcula el término  $\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \pi_r$  y se reemplaza en la ecuación (29). Para ambos campos  $(\mathbf{u}, d)$  escogemos aproximaciones determinadas por elementos finitos del tipo cuadriláteros bilineales (interpolaciones de igual orden). De esta forma, las funciones de forma  $N^I$  son las estándar de ese tipo de elemento finito.



## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Presentamos ahora algunos ejemplos numéricos resueltos a través de las ecuaciones (28) y (29).

A continuación damos tres ejemplos para analizar la potencialidad del método de campo de fase en distintos aspectos. En el primer ejemplo realizamos un análisis de convergencia para el caso unidimensional comparando la solución numérica con la obtenida analíticamente. En el segundo ejemplo validamos la implementación realizada, a través del cálculo de la carga, de rotura para un caso mostrado en el trabajo de Miehe et al. (2010).

Finalmente, en el tercer ejemplo, comparamos los resultados para la carga última en una probeta compacta normalizada con el resultado analítico teórico mostrado en bibliografía clásica de mecánica de fractura.

### 5.1. Ejemplo 1 - Análisis de convergencia 1-D

Este ejemplo está direccionado a analizar, la solución numérica de la ecuación (14) a través de un análisis de convergencia para los campos  $u$  y  $d$ .

Consideremos una barra de longitud  $L$  y resolvemos en ella el problema de fractura 1-D, con las ecuaciones descriptas en el apartado 3 de este trabajo.

La solución analítica se obtuvo para  $E = 100(GPa)$ ,  $\nu = 0$ ,  $G_c = 1(kN/mm)$ ,  $d_h = 0,05$  y valores de  $\ell = 0,01$  y  $\ell = 0,005$ .

Aprovechando la distribución simétrica de los campos  $d$  y  $u$ , ver (Figura 3), en el análisis sólo se modela la mitad de la barra, hasta una longitud  $L = 10\ell$ .

La solución numérica de la barra se obtiene discretizando el dominio con distintas mallas regulares de elementos finitos Q1 con tamaño  $h$  decreciente, tomando como parámetro para su diseño la relación  $\ell/h$ , como se observa en la Figura 4.

Estas mallas dan como resultado una variación en el tamaño  $h$  entre  $0,0025$  y  $7,81 \times 10^{-5}$ .

El procedimiento para realizar el análisis de convergencia consiste, por un lado en imponer el campo  $u$  obtenido analíticamente; en todos los nodos de la malla. Y con ello, recuperar el campo  $d$  en forma numérica resolviendo la ecuación (29).

Por otro lado se impone el campo  $d$  de la solución analítica en los nodos de la malla y resuelve el campo  $u$  a través de la ecuación (28). De esa manera se obtuvieron las soluciones numéricas de  $d$  y  $u$  en cada una de las mallas.

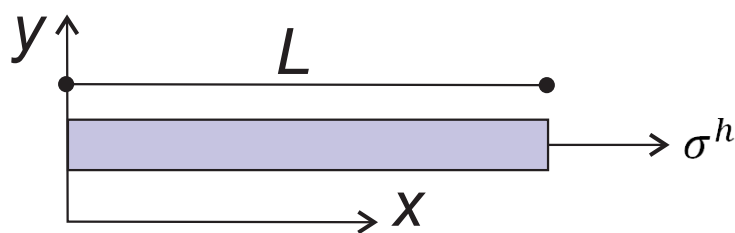
El error relativo entre la solución analítica y numérica se calcula a través de la norma L2 dada por:

$$\|e_u\|_2 = \frac{(\int_x |u_{ex} - u_{num}|^2 dx)^{1/2}}{(\int_x |u_{ex}|^2 dx)^{1/2}}$$

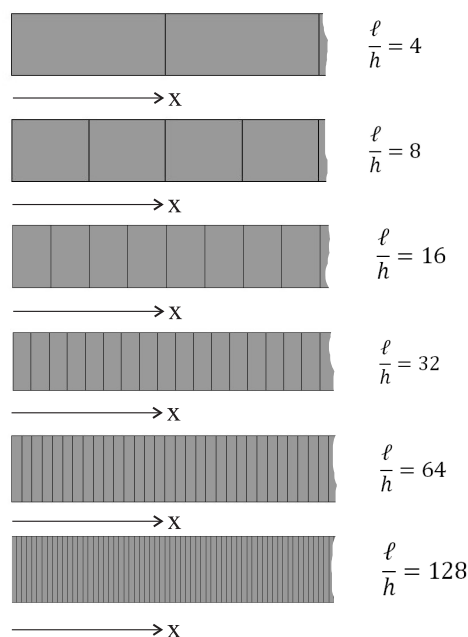
$$\|e_d\|_2 = \frac{(\int_x |d_{ex} - d_{num}|^2 dx)^{1/2}}{(\int_x |d_{ex}|^2 dx)^{1/2}}$$

Donde los subíndices "ex" se refiere a la solución analítica, y "num" a la numérica, respectivamente. En Figura 5 se presentan las curvas en escalas logarítmicas obtenidas en este análisis.

Como se observa en estas curvas, la respuesta para los desplazamientos  $u$  resultan una recta con pendiente 2 como se esperaría del análisis de convergencia teórico del modelo numérico. En cuanto la curva obtenida para el campo  $d$  un comportamiento similar para mallas gruesas, sin embargo, con el refinamiento de la malla, la velocidad de convergencia se pierde. Estimamos que este comportamiento puede tratarse de un caso de bloqueo en la solución del campo de fase.



(a) Esquema del problema



(b) Aspectos de las dif mallas

Figura 4: *a*): Esquema del problema de fractura 1-D resuelto en el ejemplo 1; *b*) Aspecto y relaciones de las distintas mallas utilizadas para obtener la solución numerica del problema esquematizado en *a*)

Si bien estos resultados muestran un cierto bloqueo en el comportamiento numérico de ambas soluciones ( $u$ ,  $d$ ) acopladas mediante las ecuaciones (28) y (29), debemos considerar que otros autores han argumentado lo contrario. Por ejemplo, la tesis de Simone estudia un problema de fractura mediante una aproximación de gradientes. El sistema de ecuaciones que gobiernan el problema, en ese caso, es similar a las ecuaciones (28) y (29). La conclusión que este autor obtiene, es que la aproximación de ambos campos mediante funciones bilineales Q1, del tipo utilizadas en este trabajo, no introduce bloqueo. De ambas conclusiones contradictorias, pensamos que es necesario realizar estudios adicionales para determinar la necesidad de utilizar aproximaciones polinómicas de distinto grado para los campos  $u$  y  $d$ .

## 5.2. Ejemplo 2- Espécimen con entalladura profunda

Consideramos ahora un espécimen compacto con entalladura profunda con la geometría que muestra la Figura 6. Se obtiene la respuesta carga-desplazamiento y se muestran la captura de la fisura a través del campo de fase tal como se reporta en Miehe et al. (2010). Los parámetros mecánicos utilizados son los mismos que en la referencia citada:  $E = 209,99(GPa)$ ;  $\nu = 0,30$  y  $G_c = 2,7 \times 10^{-3}(kN/mm)$ . A fin de ver cómo influye el parámetro  $\ell$  en el modelo de campo de fase, se consideran dos valores de éste:  $0,0375(mm)$  y  $0,0075(mm)$ . La geometría

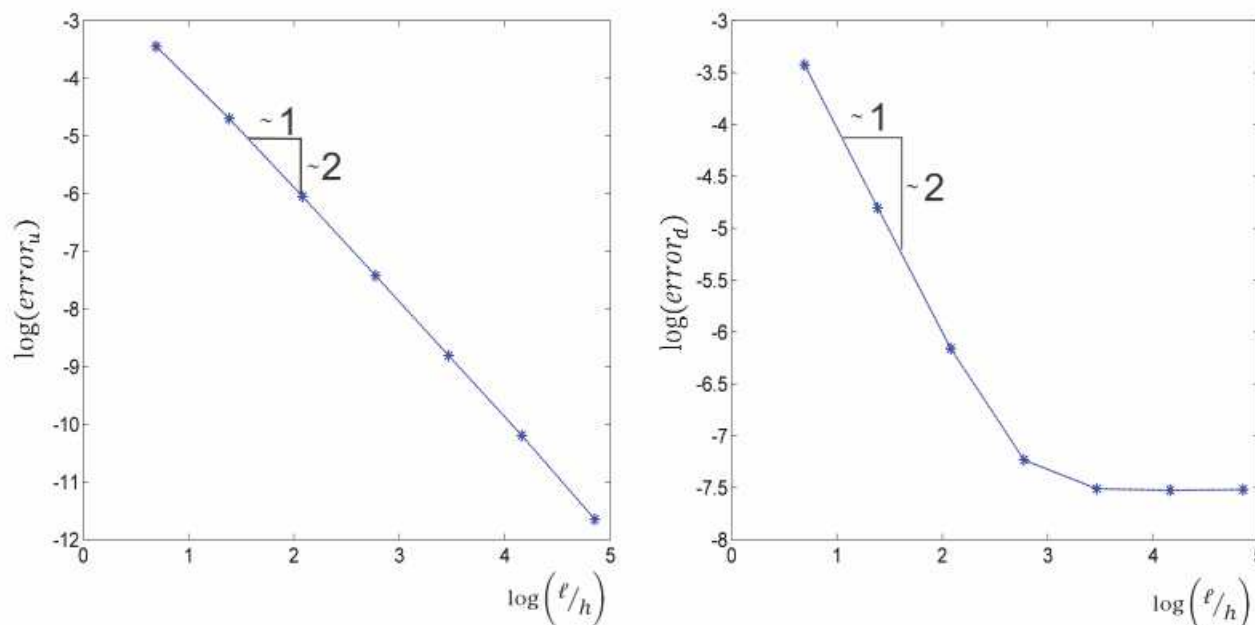


Figura 5: Curvas de error para los campos  $u$  y  $d$  en función de  $h/\ell$

se discretiza con una malla de elementos finitos Q1. En este caso no se utiliza una malla regular en su totalidad, sino que se introducen elementos regulares de tamaño  $h = 1,0 \times 10^{-3}(\text{mm})$  en la vecindad de la punta de la fisura y en la dirección de propagación de la misma. En la Figura 7 se muestran las mallas de elementos finitos utilizada para obtener la solución numérica.

Las condiciones de borde del problema son las que se esquematizan también en la Figura 6: el

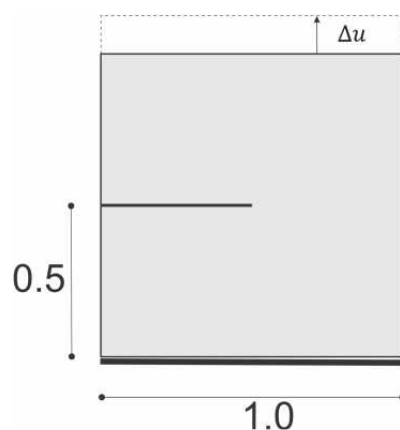


Figura 6: Esquema probeta compacta con entalladura profunda, dimensiones en (mm)

borde inferior permanece fijo y se impone un desplazamiento uniforme en el borde superior. El incremento del desplazamiento impuesto se realiza en una primera etapa  $\Delta u = 1 \times 10^{-5}(\text{mm})$  hasta que el daño  $d$  llega a un valor cercano a 0,70 en la punta de la fisura, luego, se define un incremento de desplazamiento impuesto de valor  $\Delta u = 1 \times 10^{-6}(\text{mm})$ . Con ésto, se logra recuperar la evolución de la fisura hasta llegar a la rotura total.

Las curvas carga-desplazamiento obtenidas para este caso se muestran en la Figura 8, puede

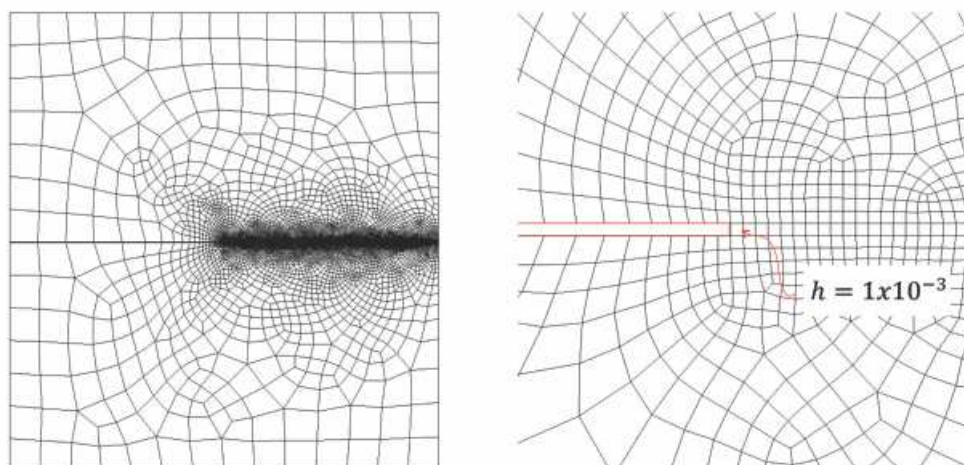


Figura 7: Aspecto de la malla del ejemplo 2, *izq*: malla completa, *der*: tamaño de elementos  $h$  en la punta de la fisura en (mm).

verse la comparación con las curvas obtenidas por [Miehe et al. \(2010\)](#).

Mediante la evolución del campo de fase, mostramos en la Figura 9 la captura de la evolución de la fisura, para ambos valores de  $\ell$  y para los cuatro puntos marcados en la Figura (8).

### 5.3. Ejemplo 3 - Comparación con carga crítica analítica

En este ejemplo, consideramos primeramente la fórmula para determinar el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  de una placa con fisura de borde sujeta a tensión uniaxial (Figura 10), obtenida de [Gross y Seelig \(2006\)](#) y que transcribimos a continuación:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1,12 - 0,23 \left( \frac{a}{b} \right) + 10,60 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 21,70 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 30,40 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] \quad (30)$$

Esta fórmula es válida para las relaciones,  $h/b \geq 1$  y  $a/b \leq 0,60$ .

Se define además el factor intensidad de tensiones crítico  $K_I^c$  como:

$$K_I^c = \sqrt{(E'G_c)}$$

Donde  $G_c$  es la energía de fractura del material y  $E' = E/(1 - \nu)$  para estado plano de deformación (hipótesis que asumimos para resolver el problema).

A través de esta relación y la ecuación (30) podemos determinar la tensión última  $\sigma_u$  y  $P_u$  como:

$$\sigma_u = K_I^c / \left( \sqrt{\pi a} \left[ 1,12 - 0,23 \left( \frac{a}{b} \right) + 10,60 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 21,70 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 30,40 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] \right)$$

$$P_u = \sigma_u A$$

Con  $A$  el área transversal de la placa, unitaria para este análisis.

Con la carga límite analítica, podemos contrastar la solución numérica del mismo problema obtenida a través de (28) y (29). Para este fin se discretizó una placa como la mostrada en la

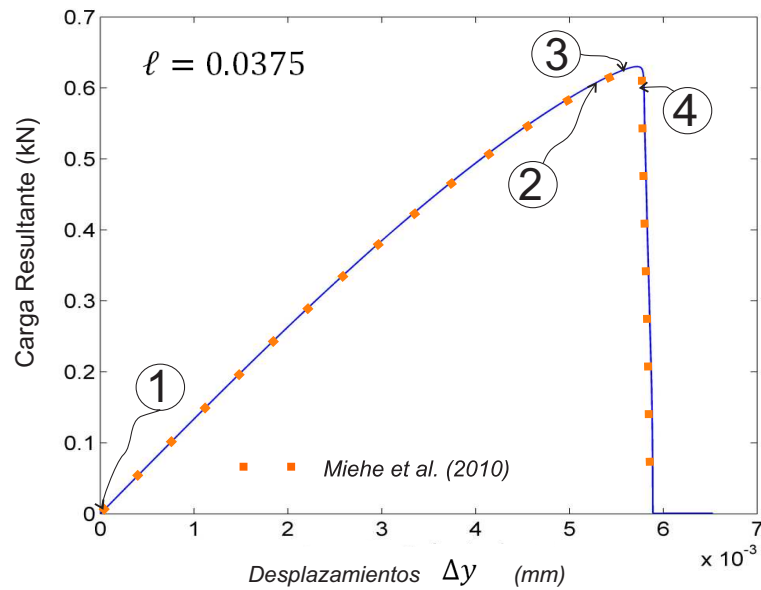
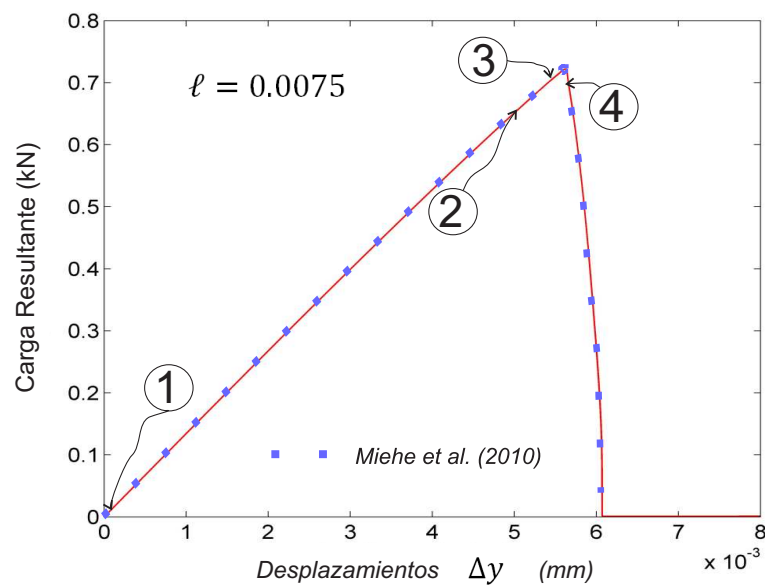
(a)  $\ell = 0,0375(mm)$ (b)  $\ell = 0,0075(mm)$ 

Figura 8: Curvas Carga-Desplazamiento y comparación con valores de referencia. Los estados 1,2 ,3 y 4 son los que se corresponden con los cuadros de la Figura 9

Figura 10 de relación  $h/b = 1,50$ , con tres mallas de elementos finitos Q1. En cada una se introdujo una zona regular en la región cercana a la punta de la fisura . En esta zona se utilizaron mallas regulares con tamaños de elementos finitos,  $h$ , decrecientes. Los tamaños utilizados son  $h = 4 \times 10^{-3}(mm)$ ,  $h = 2 \times 10^{-3}(mm)$  y  $h = 1 \times 10^{-3}(mm)$ , unidades relativas al tamaño de la probeta de lado unitario.

Las propiedades mecánicas del material utilizadas para este ejemplo son las del polimetil metacrilato (PMMA) mostradas en Gomez et al. (2008). Éstas son:  $E = 5,05 (GPa)$ ,  $G_c = 4,62 \times 10^{-4}(kN/mm)$  y relación de Poisson  $\nu = 0,30$ .

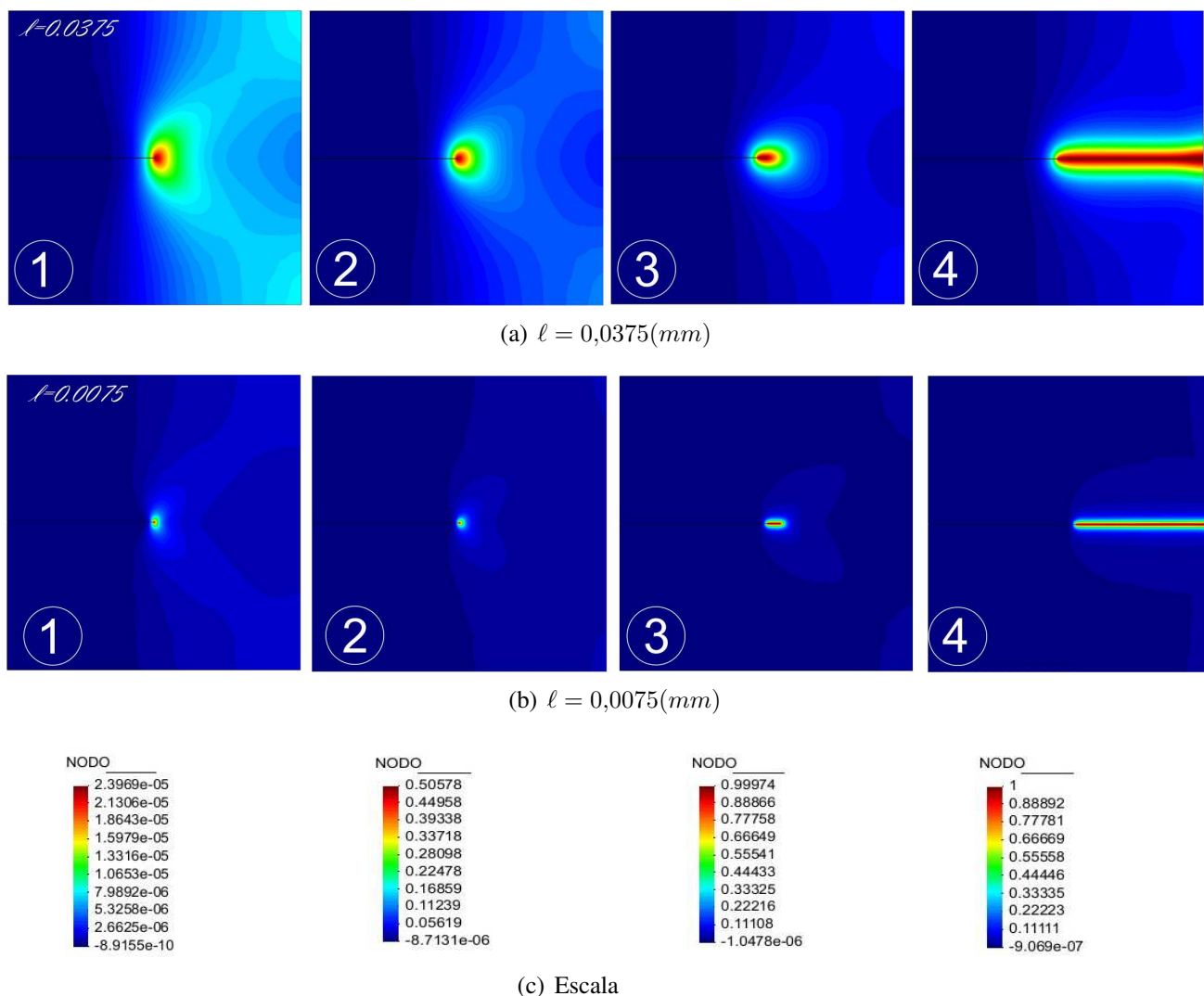


Figura 9: Evolución del campo  $d$ : a)  $l = 0,0375(mm)$ , cuadros de 1 a 4 evolución según las escalas mostradas en c), b) resultados para  $l = 0,0075(mm)$

Se realizó la determinación de  $P_u$  en forma numérica con:  $l = 0,04 (mm)$ ,  $0,02 (mm)$ , y  $0,01 (mm)$ . Los resultados de este análisis se muestran en las curvas de error de la Figura 11.

Se puede observar una tendencia a converger, a medida que se refina la malla en la zona de la punta de la fisura.

## 6. CONCLUSIONES

Hemos introducido la metodología de campo de fase para estudiar el comportamiento de fractura en materiales frágiles y a su vez hemos enmarcado este método dentro de la teoría del continuo con microestructura, lo que permite ver el campo de fase con un criterio relacionado directamente con el modelo constitutivo.

Los análisis realizados indican que este método resulta : por un lado i) muy simple y flexible para capturar diversos modos de falla y propagación de fisuras; ii) pero por otro lado es un metodología que requiere niveles de cálculo extremadamente intensos, y por ende, el costo

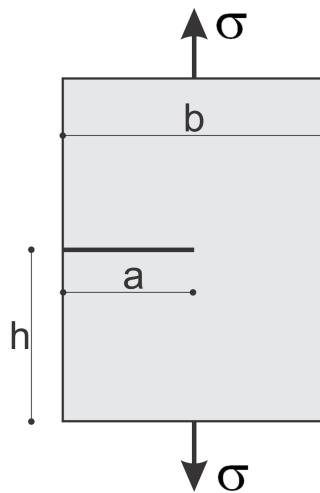


Figura 10: Esquema placa con fisura de borde sometida a tensión uniaxial

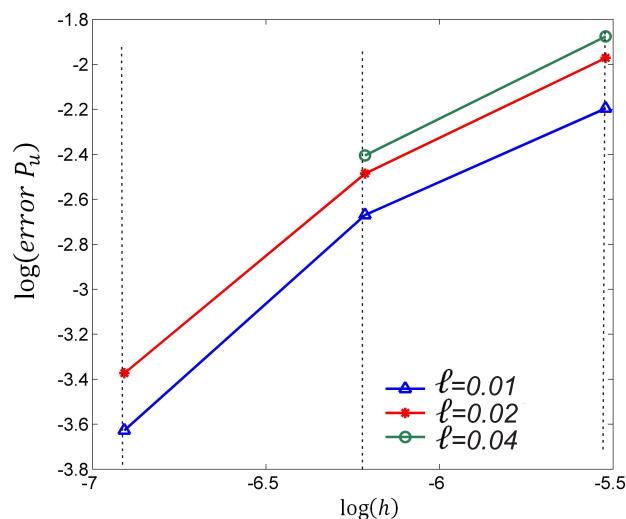


Figura 11: Curvas de error según el refinamiento de las mallas y el parámetro  $\ell$  (en  $(mm)$ ) del modelo de campo de fase

computacional es elevado. Pudimos observar a través de un análisis de convergencia (ejemplo 1), que en la captura del campo de daño  $d$  se presenta un bloqueo para mallas en donde la relación de  $\ell/h$  crece.

Vemos también que una posible utilidad para esta metodología es la de obtener los parámetros fractomecánicos típicos como el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ .

A futuro se estudiará con más detenimiento esta última posibilidad de aplicación fundamental en la mecánica de fricción combinando el campo de fase con otras técnicas, además de hacerse un análisis más exhaustivo en la convergencia del método.

## REFERENCIAS

Borden M.J., Verhoosel C.V., Scott M.A., Hughes T.J.R., y Landis C.M. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *ICES REPORT 11-14, The Institute for Computational*

- Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin, May 2011, 2011.*
- Capriz G. *Continua with microstructure*. Springer Verlag, 1989. Berlin.
- Da Silva M., Duda F., y Fried E. Sharp-crack limit of a phase-field model brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics*, 2012.
- Francfort G. y Marigo J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998.
- Gomez F., Elices M., y Lazzarin P. A generalised notch stress intensity factor u-notched components loaded under mixed mode. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:4819–4833, 2008.
- Gross D. y Seelig T. *Fracture Mechanics With an Introduction to Micromechanics*. Springer, 2006.
- Gurtin E., Fried E., y Anand L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge Univ. Press., 2010.
- Mariano P.M. Multifield theories in mechanics of solids. *Adv. Appl. Mech.*, 38:1–93, 2002.
- Miehe C., Hofacker M., y Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2765–2778, 2010.