

## **ESTUDIO NUMÉRICO – EXPERIMENTAL DE UN PROCESO DE SOLIDIFICACIÓN**

**Ricardo F. Lozano y María del S. Vilte**

*Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150 - 4400 Salta,  
Argentina, [lozanor@unsa.edu.ar](mailto:lozanor@unsa.edu.ar), <http://www.unsa.edu.ar>*

**Palabras Claves:** Cambio de fase, Solidificación, Frontera libre, Problema de Stefan.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el estudio numérico – experimental de un proceso de solidificación. Una columna de agua, inicialmente líquida a la temperatura de fusión, pierde calor por convección y radiación a través de la superficie libre superior en un recinto refrigerado; iniciándose un proceso de cambio de fase que forma una capa de hielo a partir de la superficie libre del agua mientras el agua líquida permanece a la temperatura de fusión. Se midieron las temperaturas del aire y de las paredes de este recinto para calcular las transferencias de calor mencionadas. Se plantea un modelo matemático del problema y se lo resuelve numéricamente para obtener el campo térmico y el espesor del hielo. El acuerdo entre los valores medidos y calculados del espesor del hielo en la experiencia realizada es satisfactorio.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los procesos de difusión presentan múltiples aplicaciones en una gran variedad de disciplinas: física, ingeniería, medicina, etc, (Tarzia, D., 2000) por lo que su estudio resulta de especial interés. Estos procesos responden a una ecuación de tipo parabólico, sujeta a determinadas condiciones iniciales y de contorno. Los límites del dominio de definición del problema pueden ser estancos (frontera fija) o variar en el tiempo. Cuando esto último ocurre, se puede conocer la ley con la que éste cambia (frontera móvil) o bien, ser ésta una incógnita adicional del problema (frontera libre).

Gran parte de los problemas abordados por las disciplinas señaladas responden a esta última situación. En ellos debe resolverse la ecuación de difusión conjuntamente con la que llevará a determinar la posición de la frontera libre. En estos casos se dice que se trata de un Problema de Stefan. (Alexiades y Solomon, 1993). Un ejemplo típico de estos procesos es el cambio de fase de primer orden, donde la incógnita en la ecuación de difusión es la temperatura y el balance de energía en la interfase provee la relación necesaria para determinar el avance de la frontera.

En este trabajo se analiza el proceso de solidificación de una columna de agua líquida que inicialmente está a 0 °C. La condición de borde en la superficie superior es la de flujo de calor convectivo y radiativo. Se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones que describen el proceso, lo que permite obtener el campo térmico en la región sólida de la columna y la posición de la interfase sólido-líquido en cada instante.

Se presentan además los resultados de una experiencia realizada para medir la posición de la frontera sólido - líquido en el proceso de congelación de una columna de agua y se comparan con los obtenidos numéricamente. La sustancia utilizada es agua dada su disponibilidad y la facilidad de operar con ella. El agua constituye la sustancia de cambio de fase, más popularmente utilizada, sobre todo en procesos de refrigeración y de transporte de sustancias químicas y farmacológicas, por lo que este trabajo contribuirá a dar algunos lineamientos para su utilización en el acondicionamiento térmico, cuando sea necesaria la estabilización en temperaturas próximas a 0°C. Los métodos aplicados en este trabajo pueden ser empleados con algunas modificaciones para el proceso de fusión y extenderse a cualquier otra sustancia.

## 2 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Una columna de agua inicialmente líquida a la temperatura de fusión,  $T_f$ , a la presión de una atmósfera, pierde calor por convección y radiación a través de la superficie libre superior, mientras que el flujo de calor a través de las superficies lateral cilíndrica e inferior plana, es nulo. Como consecuencia de la pérdida de calor, el agua se congela desde arriba y la columna se divide, en principio, en tres partes cuya longitud cambia con el tiempo, una líquida a la temperatura de fusión en la parte inferior, otra sólida con temperatura no uniforme en la parte superior y una tercera en la cuál coexisten líquido y sólido llamada interfase.

En el caso del agua, bajo las condiciones de congelación de esta experiencia, la interfase, que llamaremos frontera móvil, aparece localmente plana y de espesor despreciable por lo que se la puede considerar una superficie desde el punto de vista macroscópico y es la suposición que se adoptó al plantear el modelo matemático del problema y que se observó experimentalmente. El proceso de solidificación de la columna de agua se muestra en la figura 1, donde se indica la superficie libre de la muestra y para un instante de tiempo las regiones correspondientes a las fases sólida y líquida, como así también la posición de la interfase  $s(t)$ .

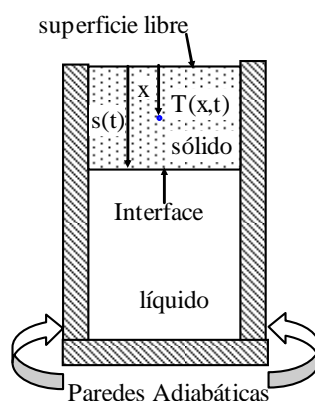


Figura 1: Esquema del proceso de solidificación de la columna de agua.

El flujo de calor, a través de la superficie libre, varía con el tiempo pero su sentido no se invierte, por lo que la temperatura en cada punto del sólido desciende continuamente y la frontera avanza sin detenerse. Se supone que el flujo de calor en la superficie superior del agua es uniforme, las superficies horizontales en el hielo son isotérmicas, y la interfase sólido-líquido es una superficie horizontal, a la temperatura de fusión. Las líneas de flujo de calor, perpendiculares a las isotermas, son verticales y paralelas, por lo tanto el campo de temperatura en el sólido es función de una coordenada espacial y del tiempo.

La temperatura en el sólido se encuentra entre la temperatura de fusión y la de la superficie libre, en contacto con el ambiente refrigerado; mientras que la fase líquida originalmente presente permanece a la temperatura de fusión. Queda planteado así, un problema de conducción de calor unidimensional en un sólido.

Otras suposiciones realizadas en el planteo matemático del problema fueron: transferencia de calor isotrópica y solamente por conducción en el interior del material, calor latente y propiedades termofísicas constantes. La radiación y la convección entran en el problema de conducción como condiciones de borde. Como la temperatura de la superficie libre no está especificada los procesos de conducción, convección y radiación son interdependientes.

Las propiedades físicas del agua en la fase sólida (hielo) supuestas constantes, se presentan en la tabla 1:

Propiedad	Valor Numérico
Densidad ( $\rho$ )	916.4 kg/m <sup>3</sup>
Calor latente ( $L$ )	333,4 10 <sup>3</sup> J/kg
Calor específico ( $c$ )	2040 J/kg K
Conductividad térmica ( $k$ )	2,25 W/m K
Temperatura de fusión ( $T_f$ )	273 K
Difusividad térmica ( $\alpha$ )	1,2 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s

Tabla 1: Propiedades físicas del hielo.

## 2.1 Descripción de la experiencia

La realización experimental de este problema consistió en congelar agua preenfriada a 0 °C contenida en varios recipientes aproximadamente cilíndricos (diámetro 12 cm y altura 5 cm). El recipiente con el agua se pone en el espacio frío de un refrigerador en forma de prisma recto cuyas dimensiones son: ancho  $B = 42$  cm, alto  $A = 35$  cm y profundidad  $C = 42,5$  cm

como se muestra en la siguiente figura.

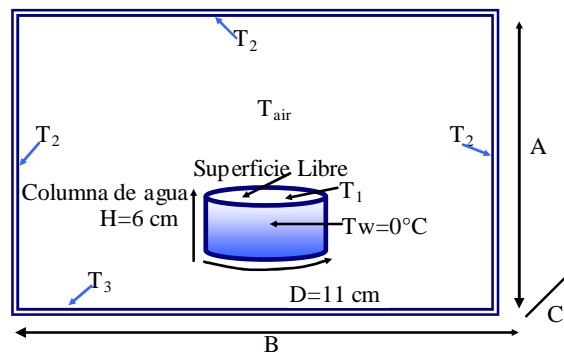


Figura 2: Dimensiones y condiciones del experimento.

En la figura 2 se presenta un esquema de las dimensiones y condiciones del problema. La nomenclatura usada para indicar las dimensiones y condiciones térmicas de la experiencia se detalla a continuación:

- A: altura del recinto térmico
- B: el ancho del recinto
- C: la profundidad del recinto
- H: la altura del recipiente que contiene el agua
- D: diámetro del recipiente
- T1: temperatura de la superficie libre
- T2: temperatura de las paredes del recinto
- T3: temperatura del piso del recinto
- Tair: temperatura del aire en el interior del recinto
- Tw: temperatura del agua en la fase líquida
- T: campo de temperatura en la fase sólida

Las paredes del recinto están constituidas por metal en el exterior, aislante térmico al medio y placas metálicas en el interior. Las emisividades de las superficies interiores de las paredes del recinto y del hielo supuestas constantes se presentan en la Tabla 2.

Material	Emisividad hemisférica total
Hielo	0,92
Superficies metálicas interiores	0,6

Tabla 2: Emisividades de los materiales considerados.

Las temperaturas del aire y de las paredes del recinto están por debajo de la temperatura de fusión del agua. Las paredes superior y laterales son adiabáticas en tanto que se extrae calor del recinto a través de la pared inferior lo que causa que las temperaturas desciendan con el tiempo. En estas condiciones la superficie libre del agua pierde calor por radiación a las paredes y por convección al aire del recinto y recibe calor por conducción desde sólido.

En las condiciones de la experiencia realizada estos procesos dan lugar en la masa de agua a la formación de una corteza sólida que encierra un núcleo líquido que permanece a la temperatura de fusión. La superficie exterior de esta corteza adopta la forma del recipiente y la superficie libre es plana. El espesor de dicha corteza aumenta con el tiempo a medida que

avanza el proceso de solidificación.

## 2.2 Justificación del modelo unidimensional

De la corteza sólida, se enfoca la atención en la placa superior que tiene forma de cilindro recto de espesor  $s$  y radio  $R$ . A una distancia suficiente del borde se mostrará que la componente radial,  $q_r$ , del vector flujo de calor es despreciable con respecto a la componente vertical,  $q_z$ . Sea  $R$  el radio interior del recipiente que contiene el agua, entonces  $r = (R - d)$ , es el radio de un cilindro que encierra una región sólida donde las líneas de flujo de calor son rectas verticales. Para estimar esta distancia que se denota por  $d$  se realiza el siguiente análisis.

Sea  $\Delta T_r$  la máxima diferencia térmica en la dirección radial. Como la temperatura máxima en el hielo es  $0^\circ\text{C}$  y la mínima,  $T_L$ , que ocurre en la pared lateral es negativa en grados Celcius,  $\Delta T_r = 0 - T_L = |T_L|$ . La distancia mínima en que ocurre esta diferencia es  $d$ . Por lo tanto, el máximo flujo radial es:

$$q_r \approx k \frac{\Delta T_r}{d} = k \frac{|T_L|}{d} \quad (1)$$

Si se denota por  $s$  al espesor de la placa de hielo y  $T_1$  a la temperatura de la superficie libre, el orden de magnitud de la componente vertical resulta

$$q_z \approx k \frac{\Delta T_z}{s} = k \frac{|T_1|}{s} \quad (2)$$

Sea  $|T_L| = a |T_1|$  entonces la condición  $q_r < q_z$  implica  $d > (a s)$ . Si se estima que la temperatura en la pared lateral es  $-1^\circ\text{C}$  y en la superficie libre  $-0,5^\circ\text{C}$  ( $a = 2$ ). El valor promedio de los espesores de hielo medidos en la experiencia es  $0,02$  m por lo que resulta  $d > 0,04$  m. Con un recipiente de  $0,11$  de diámetro, el radio de la región donde el flujo radial es menor que el flujo vertical es de  $0,015$  m. A medida que el espesor del hielo aumenta el radio de esta región disminuye.

## 3 ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROCESO

### 3.1 Transferencia convectiva

Para calcular la transferencia de calor por convección se emplea la ley de enfriamiento de Newton dada por la ecuación (3):

$$q = h_c (T_1 - T_{\text{air}}) \quad (3)$$

donde  $q$  es el flujo de calor local en ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) y  $T_1$  es la temperatura del agua en la superficie expuesta. Se utiliza un flujo de calor promedio válido para toda la superficie de interés. Para gases y convección natural,  $h_c$  ( $\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$ ) el coeficiente de transferencia de calor, se encuentra entre 1 y 10 (Bejan, 1993). Para una placa horizontal de las dimensiones utilizadas y en las condiciones de la experiencia realizada,  $h_c = 5,2 \text{ W}/\text{m}^2 \text{K}$  según el programa [Heat Transfer de B. Young y A. F. Mills. \(1995\)](#).

### 3.2 Transferencia radiativa

La transferencia de calor por radiación entra en el problema de conducción como una condición de borde no lineal y depende del intercambio radiativo en el recinto. Para su análisis

se emplea el modelo difusivo-gris con medio no participante, lo que implica que cada una de las superficies consideradas es:

a. Gris y emisor difuso.

La emisividad es independiente de la dirección de propagación de la radiación emitida y de su frecuencia, por lo que sus propiedades de emisión están suficientemente descritas por la emisividad hemisférica total:

$$\varepsilon(\hat{T}) = \frac{E(\hat{T})}{E_b(\hat{T})} \quad (4)$$

$$E_b(\hat{T}) = \sigma \hat{T}^4 \quad (5)$$

donde  $\hat{T}$  es la temperatura absoluta y  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$  la constante de Stefan-Boltzmann. E y  $E_b$  denotan los poderes emisivos hemisférico total de la superficie y de cuerpo negro respectivamente. Se asume que tienen un valor constante en el rango de temperaturas del experimento.

b. Absorbedor difuso.

El flujo de calor radiante total que incide sobre el elemento de área desde todas las otras superficies que pueden verlo, es llamado la irradiación total y se denota por G ( $\text{W/m}^2$ ). La radiación que incide sobre un elemento de superficie es en parte reflejada, en parte transmitida y en parte absorbida.

$$G = \alpha G + \rho G + \tau G \quad (6)$$

Donde  $\alpha$ ,  $\rho$  y  $\tau$  denotan respectivamente la absorptividad, la reflectividad y transmitividad de la superficie. La ecuación (6) implica:

$$1 = \alpha + \rho + \tau \quad (7)$$

En el caso de un material opaco, la transmitividad es nula y la ecuación (7) resulta:

$$1 = \alpha + \rho \quad (8)$$

La absorptividad de la superficie es independiente de la dirección de la radiación incidente y como la diferencia entre las temperaturas de las superficies en cuestión es moderada, puede aplicarse la ley de Kirchhoff por lo que resulta:

$$\alpha(\hat{T}) = \varepsilon(\hat{T}) \quad (9)$$

c. Reflector difuso y opaco, por lo que la reflectividad,  $\rho$ , está dada por:

$$\rho(\hat{T}) = 1 - \alpha(\hat{T}) \quad (10)$$

En este modelo es aplicable el concepto de factor de forma geométrico,  $F_{ij}$ , que es el cociente entre la radiación que saliendo de la superficie i es interceptada por la superficie j, y la radiación que sale de la superficie i, en todas direcciones. El valor del factor de forma está entre 0 y 1. Las siguientes relaciones entre factores de forma se usan en el desarrollo posterior.

Para una superficie plana o convexa,

$$F_{ii} = 0 \quad (11)$$

Reciprocidad,

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (12)$$

Para una cavidad, con n superficies

$$1 = \sum_{j=1}^n F_{ij}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Se considera una superficie única a la unión de regiones de dos dimensiones que tiene igual temperatura.

Para estimar la transferencia se hicieron las siguientes simplificaciones:

- Las superficies de las paredes laterales y del techo del recinto se suponen a la misma temperatura y constituyen la superficie cóncava indicada con 2 en la figura 3.
- Dadas las dimensiones del recipiente y del recinto se desprecia el calor que sale a través de las paredes laterales del recipiente. Por lo tanto el esquema geométrico de la experiencia es el siguiente:

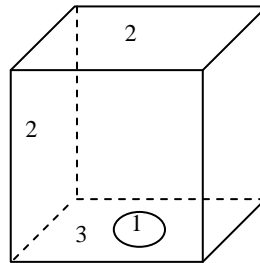


Figura 3: Esquema de la cavidad con tres superficies.

Los valores de las áreas son:  $A_1 = 79 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 77 \times 10^2 \text{ cm}^2$  y  $A_3 = 17 \times 10^2 \text{ cm}^2$ . Con 1 se indica la superficie del hielo y con 3 la superficie del piso.

Los factores de forma son:

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A_1} & 0 \\ \frac{A_2 - (A_1 + A_3)}{A_2} & \frac{1}{A_2} & \frac{A_3}{A_2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,01 & 0,77 & 0,22 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

La radiación que sale de una superficie es la emitida más la reflejada y está asociada a la magnitud que se denota por  $J$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) llamada radiosidad. Para la superficie  $i$  la radiosidad  $J_i$  está dada por:

$$J_i = \rho_i G_i + \varepsilon_i E_{b,i} \quad (15)$$

El flujo neto saliente  $q''$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) desde la superficie  $i$  y que entra a la cavidad es:

$$q_i = J_i - G_i \quad (16)$$

La potencia irradiada total que incide sobre la superficie  $i$ , en el caso de una cavidad con n superficies, es igual a la suma de los flujos radiantes provenientes de todas las superficies que puedan verla y que son interceptados por ella. En la sumatoria se incluye la propia superficie  $i$  cuyo factor de forma es distinto cero en el caso de ser cóncava como la superficie 2 del problema:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^n J_j A_j F_{ji} = \sum_{j=1}^n J_j A_i F_{ij} \quad (17)$$

La segunda igualdad se justifica por la propiedad de reciprocidad. Entonces, cancelando  $A_i$  en la expresión (8) se obtiene la siguiente expresión para la irradiación total sobre la superficie  $i$ :

$$G_i = \sum_{j=1}^n J_j F_{ij} \quad (18)$$

y reemplazando (18) en la ecuación (16) resulta :

$$q_i = \sum_{j=1}^n F_{ij} (J_i - J_j) \quad (19)$$

Combinando las ecuaciones (15) y (18) se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones lineales independientes.

$$J_i = \rho_i \sum_{j=1}^n J_j F_{ij} + \varepsilon_i \sigma \hat{T}_i^4, i=1, \dots, n \quad (20)$$

En el caso del problema planteado de una cavidad con tres superficies resulta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} J_1 - \rho_1 J_2 &= \varepsilon_1 \sigma \hat{T}_1^4, -\rho_2 0,01 J_1 + (1 - \rho_2 0,77) J_2 - \rho_2 0,22 J_3 = \varepsilon_2 \sigma \hat{T}_2^4 \\ -\rho_3 J_2 + J_3 &= \varepsilon_3 \sigma \hat{T}_3^4 \end{aligned} \quad (21)$$

Se resuelve las radiosidades,  $J_i$ , en función de las temperaturas:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma (0,92 \hat{T}_1^4 + 0,073 \hat{T}_2^4 + 0,0066 \hat{T}_3^4) \\ J_2 &= \sigma (0,0056 \hat{T}_1^4 + 0,92 \hat{T}_2^4 + 0,0066 \hat{T}_3^4) \\ J_3 &= \sigma (0,002 \hat{T}_1^4 + 0,37 \hat{T}_2^4 + 0,63 \hat{T}_3^4) \end{aligned} \quad (22)$$

Cuando las temperaturas son conocidas el sistema se resuelve para las  $J_i$  lo que permite el cálculo de los  $q_i$ , de donde se obtiene el flujo de calor neto que sale de la superficie 1 y entra en la cavidad, de acuerdo a la fórmula (19) :

$$q_1'' = \sigma (0,91 \hat{T}_1^4 - 0,84 \hat{T}_2^4 - 0,08 \hat{T}_3^4) \quad (23)$$

La estimación del flujo de calor desde el hielo, considerando al recinto como una cavidad con dos superficies, una muy grande (2) que envuelve a otra convexa (1) está dado por:

$$q'' = \sigma (\hat{T}_2^4 - \hat{T}_1^4) \quad (24)$$

Para el caso considerado, si se supone que  $T_1 = 273$  K la estimación del flujo radiativo con dos superficies es mayor en poco más de  $7 \text{ W/m}^2$  que la estimación de cavidad con tres superficies.



### 3.3 El proceso de solidificación

De acuerdo con la figura 1 situamos el eje  $x$  en la vertical con el cero en la superficie libre y creciente hacia abajo. Para la masa de agua situada en  $x \geq 0$ , las ecuaciones del proceso de solidificación son (Alexiades y Solomon, 1993; Zerroukat y Chatwin, 1994):

$$\rho c T_t = k T_{xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (25)$$

$$T[s(t), t] = 0, \quad t > 0 \quad (26)$$

$$k T_x[s(t), t] = \rho L \dot{s}(t), \quad t > 0 \quad (27)$$

$$s(0) = 0 \quad (28)$$

(25) es la ecuación de difusión del calor en el sólido, las ecuaciones (26) a (28) son condiciones que determinan la temperatura y posición de la interfase.

$$k T_x|_{(0,t)} = \sigma(0.91 \hat{T}_1^4 - 0.84 \hat{T}_2^4 - 0.08 \hat{T}_3^4) + h_c(T_1 - T_{air}) \quad (29)$$

La ecuación (29), corresponde a la condición de borde de flujo de calor convectivo y radiativo y es no lineal en las temperaturas.

La resolución de este sistema permite hallar la posición de la frontera y el campo de temperatura en el sólido, ( $s(t)$  y  $T(x,t)$ ).

## 4 RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

El método de resolución numérica, empleado en este trabajo, depende para su realización de una condición integral para la posición de la frontera.

Cuando un fluido a la temperatura  $T_s(t)$ , se pone en contacto, con la cara situada en  $x = 0$ , de un cuerpo que se quiere estudiar, la extracción de calor se expresa por:

$$-k T_x(0,t) = h [T_s(t) - T(0,t)], \quad t > 0 \quad (30)$$

En este caso en que la condición en el borde fijo es de flujo convectivo, se puede deducir una expresión implícita para  $s(t)$  a partir de una aproximación analítica al problema de Stefan, conocida como la aproximación cuasiestática (Alexiades y Solomon, 1993), y por analogía con la expresión que se deduce por medio de la fórmula de Green para el caso el que el flujo es una función definida sólo del tiempo (Tarzia D., 1984):

$$s(t) = -\frac{k}{h} + \sqrt{\frac{k^2}{h^2} - 2 \frac{k}{\rho L} \int_0^t [T_s(a) - T_f] da} + \frac{c}{L} \int_0^{s(t)} T(a,t) da \quad (31)$$

La transferencia de calor por radiación desde una superficie, se simplifica a una forma de tipo convectiva, entonces la expresión anterior, particularizada para este problema resulta:

$$s(t) = -\frac{k}{h} + \sqrt{\frac{k^2}{h^2} - \frac{k}{\rho L} \int_0^t [\tau(a) + T_{air}(a)] da} + \frac{c}{L} \int_0^{s(t)} T(\xi,t) d\xi \quad (32)$$

donde  $h$  es el promedio  $h_c$  y  $h_r$ . Para este caso  $T_f = 0$ , se hizo la temperatura de fluido de la ecuación (31) igual al promedio de la temperatura del aire y del valor  $\tau$ . Los valores de  $h_r$  y  $\tau$ , se obtienen de la siguiente forma:

$$(a\hat{T}_1^4 - b\hat{T}_2^4 - c\hat{T}_3^4) = a(\hat{T}_1^4 - \hat{\tau}^4) \quad (33)$$

donde:

$$\hat{\tau} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}\hat{T}_2^4 + \frac{c}{a}\hat{T}_3^4} \quad (34)$$

De esta forma la ecuación (23) queda expresada como:

$$q = h_r (T_1 - \tau) \quad (35)$$

$$\tau = \hat{\tau} - 273 \quad (36)$$

$$h_r = \sigma a (\hat{T}_1^2 + \hat{\tau}^2) (\hat{T}_1 + \hat{\tau}) \quad (37)$$

El esquema numérico de resolución sigue los pasos planteados por [Nochetto \(1984\)](#) que requiere para su implementación cierta regularidad en  $s(t)$ , en particular que sea creciente, situación que se verifica en la mayoría de los problemas de frontera libre y en éste en particular. El sistema de ecuaciones (25) a (29) se discretiza mediante un esquema de diferencias finitas implícitas para la evaluación de la frontera y el cálculo de temperatura en el interior de la sustancia. La resolución incluye un proceso iterativo para la frontera  $s(t)$  hasta su estabilización ([Lozano et al, 2003](#); [Bouciguez et al, 2005](#)).

## 5 DISPOSITIVO EXPERIMENTAL Y MEDICIONES

### 5.1 Medición de la posición de la frontera

Cinco recipientes semejantes conteniendo agua preenfriada a 0 °C se introdujeron en el recinto de un refrigerador como se muestra en la figura 2; a partir de ese instante se inició el conteo del tiempo del ensayo. A fin determinar la posición de la frontera, a determinados intervalos de tiempo, se midió el espesor de la capa sólida que se forma en la parte superior. Para ello en forma sucesiva se sacaron del recinto las cinco muestras en las que se observó una corteza de hielo que rodea un centro de agua líquida a una temperatura de 0 °C. Luego de romper el casquete de hielo se midió con un calibre el espesor de la corteza adyacente a la superficie libre como se muestra en la figura 4.



Figura 4: Corteza de hielo que contenía agua líquida en su interior. Medición del espesor de la corteza

Se asumió que el error en la medida del espesor es de 0.5 mm. Con los 5 recipientes se obtuvieron 5 medidas de la posición de la frontera en un intervalo 180 minutos.

## 5.2 Medición de temperaturas

Durante la experiencia, se midieron las temperaturas en el centro de las superficies interiores del techo y del piso y del aire del recinto. Para registrar la temperatura del agua se colocó una termocupla en uno de los recipientes a 2 cm del borde y a la mitad de la altura de la columna de agua. Para este fin se emplearon 4 termocuplas de respuesta rápida, protegidas del agua y conectadas a un dispositivo de medición Pasco (PASPORT Temperatura Array PS-2157) vinculado a un visor de pantalla que muestra los valores de temperatura registrados en cada canal del medidor. Las especificaciones del dispositivo de medición son:

Rango de medición  $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $135\text{ }^{\circ}\text{C}$

Precisión:  $0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$

Resolución:  $0.0025\text{ }^{\circ}\text{C}$

Velocidad máxima de muestreo 200 Hz.

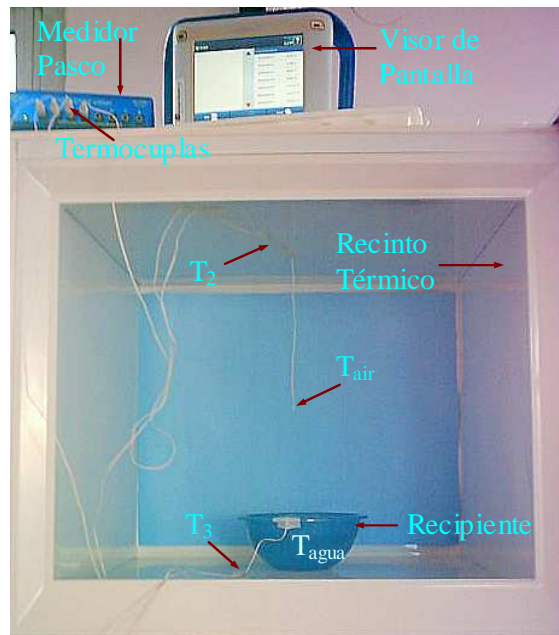


Figura 5: Dispositivo experimental

El registro de las temperaturas se realizó cada 10 minutos durante las 4 horas que aproximadamente duró la experiencia. En la figura 5 se observa el medidor de temperatura con las termocuplas, el recinto térmico y el recipiente que contiene la columna de agua.

## 6 RESULTADOS OBTENIDOS

### 6.1 Medidas Térmicas

En la figura 6 se muestra la evolución temporal de las temperaturas en las superficies interiores de las paredes del recinto: techo ( $T_2$ ) y piso ( $T_3$ ), en el aire ( $T_{air}$ ) y en el interior de la muestra de agua ( $T_w$ ).

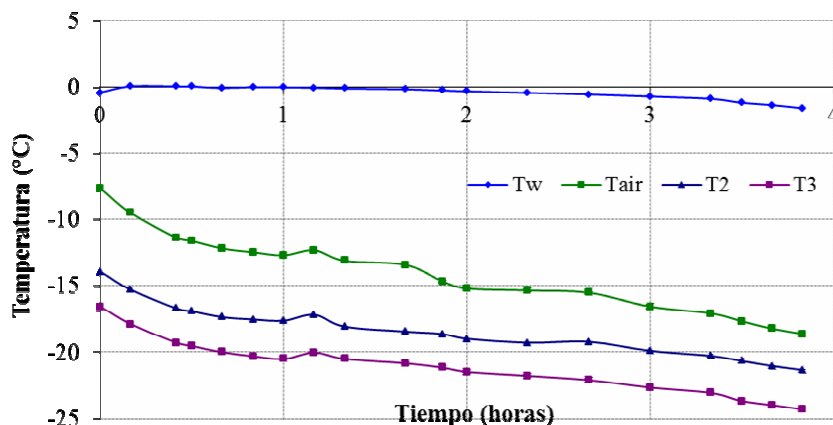


Figura 6: Evolución temporal de las temperaturas

Se observa que la temperatura del agua en el lugar donde está ubicada la termocupla se mantiene en 0° C en las primeras dos horas de la experiencia lo que indica que el agua está líquida a la temperatura de fusión; luego disminuye cuando esa zona se hace sólida. Existe una diferencia de temperatura entre el piso y el techo del recinto de casi 3°C y que permanece constante en el tiempo; esto ocurre también con las demás paredes. El calor sale del recinto a través del piso que está mucho más frío que cualquiera de las paredes del recinto. La diferencia de temperatura entre el aire en el interior del recinto y el piso es de 7 °C y se mantiene constante.

A continuación se presentan las funciones del tiempo (medido en segundos) que aproximan los valores medidos de las temperaturas y que se emplearon en el cálculo numérico:

$$\begin{aligned}
 T_2(t) &= -15,2055 - 0,00065 t - 1,7406 \cdot 10^{-8} t^2 \\
 T_{air}(t) &= -9,26378 - 0,00092 t + 2,04414 \cdot 10^{-8} t^2 \\
 T_3(t) &= -17,9029 - 0,00061 t + 1,25227 \cdot 10^{-8} t^2
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

En la figura 7 se muestran los valores de temperaturas medidos en la superficie del piso del recinto y el ajuste por cuadrados mínimos de dichos valores.

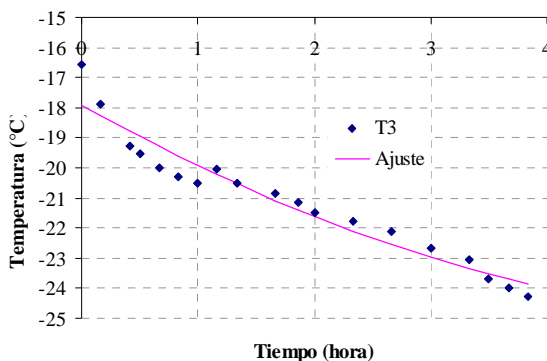


Figura 7: Valores de temperatura medidos en el piso del refrigerador y el ajuste realizado.

## 6.2 Valores de la posición de la frontera: experiencia y cálculo numérico

Los valores medidos durante la experiencia del espesor de la fase sólida en función del tiempo son los que figuran en la Tabla 3 :

Tiempo (min.)	$S_t$ (mm)
0	0
60	6
90	15
120	27
150	37
180	44

Tabla 3: Valores medidos de la frontera en función del tiempo.

Se observaron una interfase sólido-líquido de espesor nulo (no se visualizó zona pastosa) e irregularidades en la cara superior de la corteza: leve inclinación y pequeña ondulaciones que pueden deberse a presiones mecánicas propias del proceso de expansión del agua al congelarse o a flujo de calor no uniforme.

En la figura 8 se grafican los datos experimentales de la posición de la frontera con los resultados numéricos a fin de compararlos. Se observa un acuerdo aceptable dentro del error experimental.

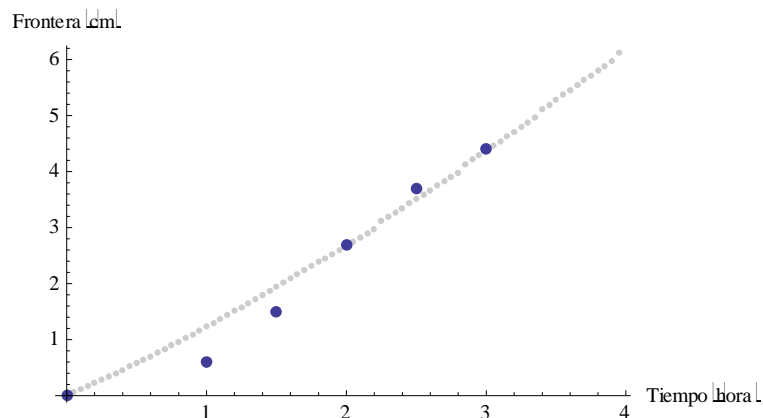


Figura 8: Posición de la frontera: valores medidos (puntos) y calculados (curva gris)

En la figura 9 se presentan los flujos de calor radiativo y convectivo calculados suponiendo que la temperatura de la superficie del hielo es de 0 °C. El flujo de calor radiativo se calculó considerando al recinto como una cavidad con dos y tres superficies. En el caso del modelo con dos superficies una de ellas, a la temperatura  $T_2$ , tiene un área mucho mayor que la superficie libre del hielo.

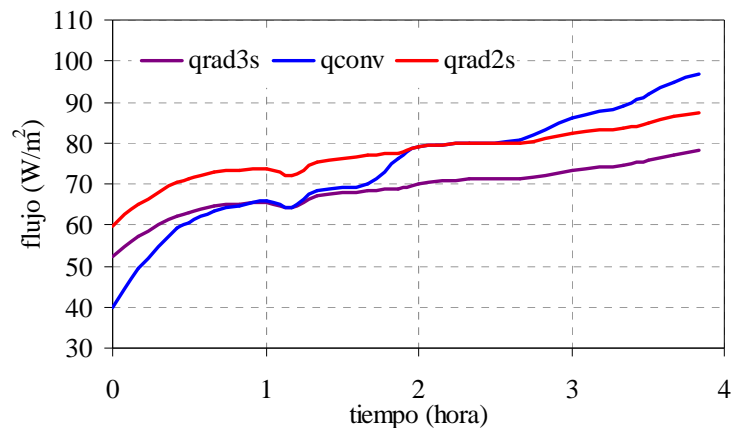


Figura 9: Flujos de calor convectivo y radiativos

Se observa que el flujo radiativo con tres superficies es menor al de dos superficies, en unos  $7 \text{ W/m}^2$  durante todo el proceso.

El flujo convectivo se inicia en  $40 \text{ W/m}^2$  y aumenta con el tiempo. Al cabo de 2 hs. alcanza los  $80 \text{ W/m}^2$  igualando al  $q_{\text{rad}2s}$  y antes de las 3 hs los supera, continuando el crecimiento hasta alcanzar los  $95 \text{ W/m}^2$  a las 3,75 hs.

## 7 CONCLUSIONES

La experiencia de congelación de agua en un refrigerador, permite observar y obtener resultados experimentales de uno de los pocos procesos de cambio de fase que se pueden modelar como un problema de Stefan a una fase unidimensional.

La sustancia de cambio de fase utilizada (agua) se encuentra disponible y es fácil de trabajar; asimismo se conocen todos sus parámetros físicos. Su temperatura de fusión se encuentra en una relación adecuada con las temperaturas que pueden alcanzarse en un recinto refrigerado de uso comercial. Considerando las temperaturas involucradas, este diseño es aplicable a otras sustancias cuyas temperaturas de fusión se encuentren entre  $-10$  y  $5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

En la experiencia mediante la elección de un recipiente chato y de boca ancha, se lograron las condiciones para que en la parte central superior de la masa de agua, se desarrolle un proceso de congelación unidimensional. La columna de agua, pierde calor por radiación hacia las paredes del recinto y por convección hacia el aire del recinto, a través de la superficie libre. En las condiciones del experimento los flujos convectivo y radiativo son comparables.

En el cálculo numérico se usaron curvas de temperatura ajustadas por cuadrados mínimos, se linealizó además la expresión del flujo radiativo. El acuerdo entre los valores medidos y calculados del espesor del hielo en función del tiempo es satisfactorio. Esto confirma la validez del método empleado y que las aproximaciones y simplificaciones realizadas son correctas.

En el cálculo de la transferencia de calor por convección se empleó la ley de enfriamiento de Newton y el coeficiente de transferencia de calor se calculó mediante el programa [Heat Transfer de B. Young y A. F. Mills. \(1995\)](#). En el cálculo de la transferencia de calor por radiación, se usó el modelo difusivo-gris con medio no participante con tres superficies: el techo y paredes laterales, el piso y la superficie libre del agua cuyas temperaturas descendieron durante las casi cuatro horas que duró el experimento. Se ignoraron las paredes laterales del recipiente y la presencia de otros recipientes. Con este modelo el flujo de calor

radiativo desde el agua es un 14% menor que en el modelo con dos superficies, lo que justifica su empleo para el cálculo, hecho que también se observa en la figura 9.

El caso de flujo convectivo merece atención especial por ser la forma más práctica y común, de adición o extracción de calor a un cuerpo. También porque la transferencia de calor por radiación desde una superficie, se puede simplificar a un flujo de tipo convectivo lo que se hace en este trabajo. Se presenta una expresión para la posición de la interfase, que se obtiene a partir de la aproximación cuasiestática y que es compatible con el comportamiento asintótico de la posición de la frontera para el problema de Stefan a una fase con condición de borde convectiva. Como la aproximación cuasiestática sobreestima la posición de la interfase, se trata de mejorarla, con la adición de un término que tiene en cuenta el efecto del calor sensible sobre el avance de la frontera móvil.

El lenguaje de programación de alto nivel de Mathematica permite implementar el algoritmo de cálculo con facilidad. Por ejemplo, El proceso iterativo para el cálculo de la posición de la frontera en el paso  $(j + 1)$  a partir de un valor supuesto de  $s(j+1)$  mediante el cual se obtiene otro valor  $s(j+1)$  y que debe continuar hasta que el valor de  $s$  no cambie se realiza con la función FixedPointList.

## REFERENCIAS

- Alexiades, V.; Solomon, A. *Mathematical Modeling of Melting or Freezing Processes*, Hemisphere Publishing Corporation, A Member of the Taylor & Francis Group, 1993.
- Bejan A. *Heat Transfer*. Edited by John Wiley & Sons, Inc. Printed in Canada, 1993.
- Boucíguez, A Lozano, R y Lara, M., Acondicionamiento Térmico de Productos Agrícolas con Sustancias de Cambio de Fase: Caso de flujo de calor constante y exponencial. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*, 8.2, 08.55-08.60, 2005.
- Lozano, R. Boucíguez, A. Lara, M y Villa, L., Comportamiento de la Frontera Libre en Materiales de Cambio de Fase con Condiciones de Flujo de Calor Constante. *Revista Energías Renovables y Medio Ambiente.*, Vol. 12, pág. 49 – 53, 2003.
- Mills, Anthony. *Heat and Mass Transfer*. R.D. Irwin, Inc., 1995
- Nochetto, R., Una Introducción General a la Resolución Numérica del Problema de Stefan Unidimensional. *Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Universidad Nacional de Rosario, pág.143 -166, 1984.
- Swern, D. (1964) *Physical Properties* 1, pp.. III - IV, 1995.
- Tarzia, Domingo A. y Turner C. V., The Asymptotic Behavior for the One-Phase Stefan Problem with a Convective Boundary Condition. *Appl. Math. Lett.* Vol. 9 N°3, 1996.
- Tarzia, Domingo A., Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional. Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi", N° 12, Universidad Nacional de Rosario. 1984.
- Young B. y Mills A. F., *Heat Transfer*. Versión 1.1a. Universidad de California, Los Ángeles. Copyright Richard D. Irwin Inc., 1995.
- Zerroukat, M y Chatwin, *Computational Moving Boundary Problems*. John Wiley & Sons Inc., 1994.