

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE, ANTE UN APARTAMIENTO DEL FLUJO DE CALOR QUE PRODUCE SOLUCION ANALITICA.

Ricardo Lozano, María del S. Vilte y Angélica Boucíguez

*Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta. Av. Bolivia 5150 – Salta, Argentina.
Tel 0387 –4255424. e-mail: lozanor@unsa.edu.ar; mvilte88@gmail.com; bouciga@unsa.edu.ar*

Palabras claves: cambio de fase, solución analítica, flujo de calor.

Resumen: Se presenta el estudio del comportamiento de la solución al problema de Stefan, cuando una material de cambio de fase es sometida a un flujo de calor, que se aparta de aquel que produce solución analítica. Se obtienen las temperaturas en el interior de la sustancia de cambio de fase y la posición de la frontera libre, para la situación en que se encuentre expuesta a un flujo de calor del tipo $q_0/(t+t_0)^{1/2}$; para diferentes valores de t_0 . En especial cuando éste valor es cero, el problema presenta solución analítica. Se analizan los apartamientos de esta solución de acuerdo a los diferentes valores de t_0 , cotejando éstos con las cotas dadas por Sherman. Los resultados obtenidos muestran que para valores pequeños de t_0 , los resultados se apartan levemente de los que corresponden a la solución exacta, mientras que para valores grandes de t_0 , el flujo es prácticamente constante y los resultados se apartan significativamente de los correspondientes al caso en que $t_0=0$.

1 INTRODUCCION

El comportamiento de sustancias que presentan cambio de fase ha sido estudiado y conceptualizado por Stefan, (1889a, 1889b) por lo que tales problemas llevan su nombre. En particular, éstos presentan solución analítica bajo condiciones bastante restrictivas: unidimensionalidad, geometría semi-infinita, propiedades termofísicas constantes, temperatura inicial uniforme, temperatura constante impuesta en el borde fijo, o bien flujo de calor inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. (Alexiades y Solomon, 1993); ambas condiciones de contorno resultan equivalentes (Bouciguez et al, 2006)

En este trabajo, se evalúa el comportamiento de un material de cambio de fase, cuando es sometido a flujos de calor que se apartan de aquel que produce solución analítica; esto es de la forma $q_0/(t+t_0)^{1/2}$; para diferentes valores de t_0 . Se han considerado valores de $t_0=0.001, 0.01, 0, 1, 10, 100, 1000$ y 10000 seg. Obsérvese que cuando $t_0=0$, el flujo es el que corresponde a la solución analítica. Se estudia también el comportamiento de la posición de la interfase de acuerdo a las cotas dadas por Sherman (1971) para su localización.

En la Figura 1 se presenta un esquema del material de cambio de fase al inicio del proceso ($t=0$) y en un tiempo posterior ($t>0$); en ella el eje x , señala la dirección de propagación del calor; mientras que el valor $x=0$, representa el borde fijo; $s(t)$, la posición de interfase, función del tiempo, por ello $x=s(0)=0$, representa su posición inicial. El material se considera semi infinito.

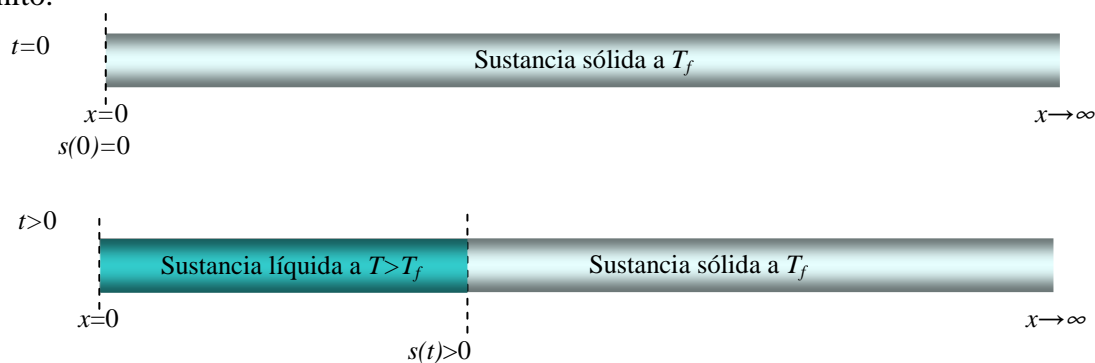


Figura 1: Esquema de la posición inicial del sólido y la posición de la interfase.

En las condiciones señaladas (modelo semi infinito unidimensional y propiedades termofísicas constantes), la sustancia comienza paulatinamente el proceso de fusión, generando el corrimiento de la interfase y la aparición de líquido. La posición de dicha interfase, desconocida a priori, debe determinarse conjuntamente con la temperatura en el líquido emergente; mientras que el sólido permanece a la temperatura de fusión. Este problema se denomina de Stefan a una fase (Alexiades y Solomon, 1993), por el hecho de que solo debe determinarse la temperatura en una de las dos fases físicamente presentes: la líquida.

Por tratarse de un problema a una fase, mientras exista sustancia sólida, puede estudiarse el comportamiento de la sustancia como si el problema fuera semi infinito, razón por la cual, se lo ha considerado así.

A fin de simplificar los cálculos, se ha tomado la temperatura de fusión en 0°C , por tanto, los valores obtenidos, corresponden al valor en que se ha elevado la temperatura por encima de la de fusión. Para los flujos de calor considerados, el frente de fusión se desplaza sin deformación, por lo que el problema puede resolverse en forma unidimensional, considerando que la transferencia de calor dentro del material es solo conductiva (Alexiades y Solomon,

1993; Zerroukat y Chatwin, 1994; Lock, 1996; Hamdan y Al-Hinti, 2004)

2 FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA Y MODELO DE CALCULO

El problema numérico a resolver resulta completamente descrito por la ecuación de difusión del calor en la fase líquida, el balance de energía en la interfase, esto es, la ecuación de Stefan y las correspondientes condiciones iniciales y de borde (Alexiades y Solomon, 1993). Se ha considerado que la sustancia se encuentra expuesta a un flujo de calor, proveniente desde el extremo $x=0$.

Sea $u(x,t)$ la temperatura, función de la posición x y el tiempo t , en el interior de la sustancia; $s(t)$ la posición de la interfase como función del tiempo, la que en $t=0$ se encuentra en $x=s(0)=0$. Los parámetros físicos del material de cambio de fase son: ρ la densidad, k la conductividad térmica, c el calor específico, L el calor latente de fusión y $\alpha=k/(\rho c)$ la difusividad térmica, los que se consideran constantes. El problema resulta descrito por las ecuaciones (1) a (6), siendo τ el tiempo total de cálculo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < t < \tau \quad 0 < x < s(t) \quad (1)$$

$$\rho L \frac{ds(t)}{dt} = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(s(t),t)} \quad 0 < t < \tau \quad (2)$$

$$u(s(t),t) = 0 \quad 0 < t < \tau \quad (3)$$

$$u(x,0) = 0 \quad (4)$$

$$s(0) = 0 \quad (5)$$

$$q(t) = \frac{q_0}{\sqrt{t+t_0}} = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} \quad 0 < t < \tau \quad (6)$$

La ecuación (1) es la de difusión en el líquido, que determina la distribución de temperatura en él, la (2) es la de Stefan, que da el balance de energía en la interfase, mientras que las (3) - (6) son las condiciones iniciales y de borde. La (3) señala la condición de borde en la frontera libre, que implica la continuidad en la temperatura, las (4) y (5) son las condiciones iniciales para la temperatura (igual a la de fusión) y posición de la interfase, respectivamente; mientras que la (6) expresa el flujo de calor al que se halla expuesto el material de cambio de fase. Como se dijo anteriormente, se ha considerado $t_0=0.01, 0.1, 0, 1, 10, 100, 1000$ y 10000 seg.

Tales flujos se presentan en la Figura 2, en ella el flujo que produce la solución exacta corresponde al valor $t_0=0$, marcado en color rojo. Se aprecia que para valores de $t_0 \leq 1000$ seg ($\cong 1/4$ hr), a poco de iniciado el cálculo, los flujos se asemejan mucho al que produce la solución exacta, mientras que para valores de t_0 mayores a éste, el flujo resulta prácticamente constante.

En la Tabla 1, se presentan los valores de tales flujos para los diferentes valores de t_0 , al inicio del proceso y al cabo de 1, 6, 12, 24, 48 y 72 horas. Se observa que, a estas horas, los flujos con mayor valor de t_0 se apartan de los demás, aunque puede inferirse que, para tiempos mayores, todos alcanzarán prácticamente el mismo valor. Sin embargo, la cantidad de energía recibida por la sustancia, durante todo el proceso es notablemente diferente, lo que ocasionará una distribución de temperatura y posición de la interfase también diferente.

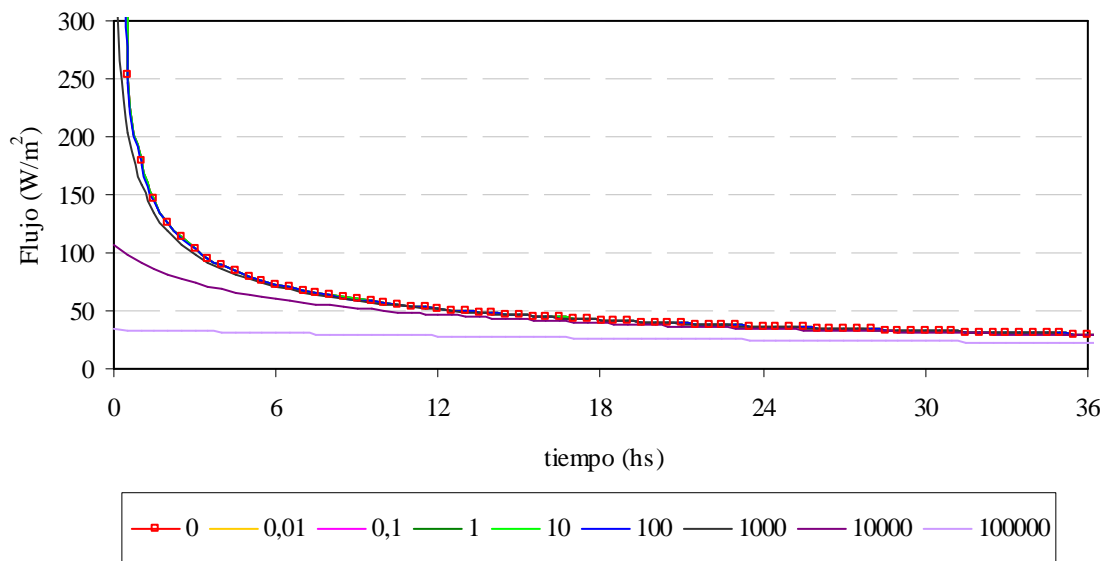


Figura 2: Distintos flujos de calor, producidos por los diferentes valores asignados a t_0 .

		tiempo desde el inicio (hs)						
		0	1	6	12	24	48	72
t_0 (seg)	0	infinito	178,71	72,96	51,59	36,48	25,79	21,06
	0,001	339068,90	178,70	72,96	51,59	36,48	25,79	21,06
	0,01	107225,00	178,70	72,96	51,59	36,48	25,79	21,06
	0,1	33906,89	178,70	72,96	51,59	36,48	25,79	21,06
	1	10722,30	178,68	72,95	51,59	36,48	25,79	21,06
	10	3390,69	178,46	72,94	51,58	36,48	25,79	21,06
	100	1072,23	176,27	72,79	51,53	36,46	25,79	21,06
	1000	339,07	158,09	71,32	51,00	36,27	25,72	21,02
	10000	107,22	91,94	60,32	46,49	34,53	25,08	20,67
	100000	33,91	33,31	30,75	28,33	24,84	20,53	17,89

Tabla 1: Flujo de calor para distintos valores de t_0 a las 0, 1, 6, 12, 24, 48 y 72 hs.

El problema solamente tiene solución analítica cuando $t_0=0$ seg. Por tanto, para los demás valores de t_0 , sólo puede resolverse numéricamente. Para ello se ha estructurado un programa de computación en lenguaje *Mathematica* (Wolfram, 2011), utilizando diferencias finitas implícitas, que calcula para cada paso temporal, la posición de la interfase y la distribución de temperaturas en el interior de la sustancia. Sin embargo, la posición de frontera libre, debe estar comprendida entre un valor máximo y otro mínimo, tal como fuera formulado por Sherman (1971).

El esquema de resolución numérica se ajusta al presentado por Nochetto (1984), el mismo requiere cierta regularidad en la frontera $s(t)$, en particular que sea siempre creciente, situación que se cumple en la mayor parte de los problemas de frontera libre y en éste en particular. La condición de Stefan, dada por la ecuación (2) es equivalente a la siguiente condición integral, expresada en (7) (Tarzia, 1984)

$$s(t) = \frac{E(t)}{\rho L} - \frac{c}{L} \int_0^{s(t)} u(x,t) dx \quad \text{con} \quad E(t) = \int_0^t q(z) dz \quad (7)$$

Dado que se trata de un problema de fusión, la función temperatura $u(x,t)$ del problema (1)

a (6) es positiva, por lo que $E(t)/\rho L$, establece una cota superior a los valores alcanzados por la frontera para el flujo $q(t)$.

Los cálculos se han realizado utilizando el lenguaje de programación *Mathematica*. Se ha designado con Δx a la distancia entre dos nodos consecutivos en el espacio y con Δt al incremento temporal. El índice i se utiliza para el espacio y el j para el tiempo. Llamando $N(j)$ a la parte entera de $(s(j)/\Delta x)$, el problema discreto consiste en hallar las $N(j)+1$ temperaturas $u(i,j+1)$ y la posición de la frontera $s(j+1)$ en el instante $(j+1)$, las que son solución del sistema formado por las ecuaciones (8) a (11).

La (8) es la discretización de la ecuación de difusión en diferencias finitas implícitas, que expresa las temperaturas en los nodos interiores. ($1 \leq i \leq N(j) - 1$).

$$\alpha \frac{(u(i-1, j+1) - 2u(i, j+1) + u(i+1, j+1)))}{(\Delta x)^2} = \frac{(u(i, j+1) - u(i, j))}{\Delta t} \quad (8)$$

En la proximidad de la frontera libre $s(t)$, la discretización conduce a la ecuación (9), la que resulta de discretizar la ecuación diferencial (1) cuando los puntos pivotaes no están uniformemente espaciados y se supone un comportamiento cuadrático de $u(x,t)$ en la proximidad de $s(j+1)$, donde la temperatura $u(x,t)=0$, tal como lo expresa la ecuación (2).

$$\frac{u[N(j), j+1] - u[N(j), j]}{\Delta t} = \left(\frac{2\alpha}{\Delta x} \right) \cdot \left(\frac{u[N(j)-1, j+1]}{s(j+1) - (N(j)-1)\Delta x} - \frac{u[N(j), j+1]}{s(j+1) - N(j)\Delta x} \right) \quad (9)$$

En el borde fijo la discretización conduce a la ecuación (10):

$$q(j+1) = -k \frac{u(1, j+1) - u(0, j+1)}{\Delta x} \quad (10)$$

La discretización de la ecuación (7) para la posición de la interfase, conduce a la ecuación (11)

$$s(j+1) = \frac{E(j+1)}{\rho L} - \frac{c}{L} \Delta x \sum_{i=1}^{N(j)-1} u(i, j+1) - \frac{1}{2} [s(j+1) - (N(j)-1)\Delta x] \cdot u(N(j), j+1) \quad (11)$$

Con las ecuaciones (8) a (11) se realiza un proceso iterativo que resuelve el sistema lineal (8) a (10), para las $N(j)+1$ temperaturas, a partir de un valor inicial dado para $s(j+1)$ y luego se calcula nuevamente $s(j+1)$, utilizando la ecuación (11), con los temperaturas calculadas en el paso anterior, hasta que el valor de $s(j+1)$ prácticamente no cambie. Para este cálculo se utiliza la función *Fixed Point*, disponible en el *Math*. De esta forma la malla se modifica agregando uno ó más nodos si se verifica que $(N(j)+1) \Delta x < s(j+1)$. El intervalo temporal considerado para el cálculo es $\Delta t=300\text{seg}$, mientras que el espacial es $\Delta x=1\text{mm}$.

El proceso iterativo se inicia, calculando la posición de la interfase a partir de la ecuación (7), en la que solo sobrevive el primer término, ya que en el segundo, se encuentran las temperaturas que inicialmente son nulas.

A los efectos del cálculo se han tomado los valores de las propiedades térmicas, de grasas orgánicas de origen animal de fácil adquisición en el comercio local, medidas en laboratorio: $\rho=800 \text{ kg/m}^3$; $k=0.22 \text{ W/m}^2 \text{ K}$; $L=120 \text{ kJ/kg}$ y $c=1600 \text{ J/kg K}$.

3 RESULTADOS OBTENIDOS Y ANALISIS DE LOS MISMOS.

En las Figuras 3 y 4, se presentan, respectivamente, la posición de la frontera y las temperaturas en el borde expuesto al flujo de calor, en el material de cambio de fase.

La Figura 3 muestra la evolución temporal de la interfase, para $t_0 \geq 100$, ya que para valores

menores de t_0 ésta coincide prácticamente con los valores arrojados por la solución exacta.

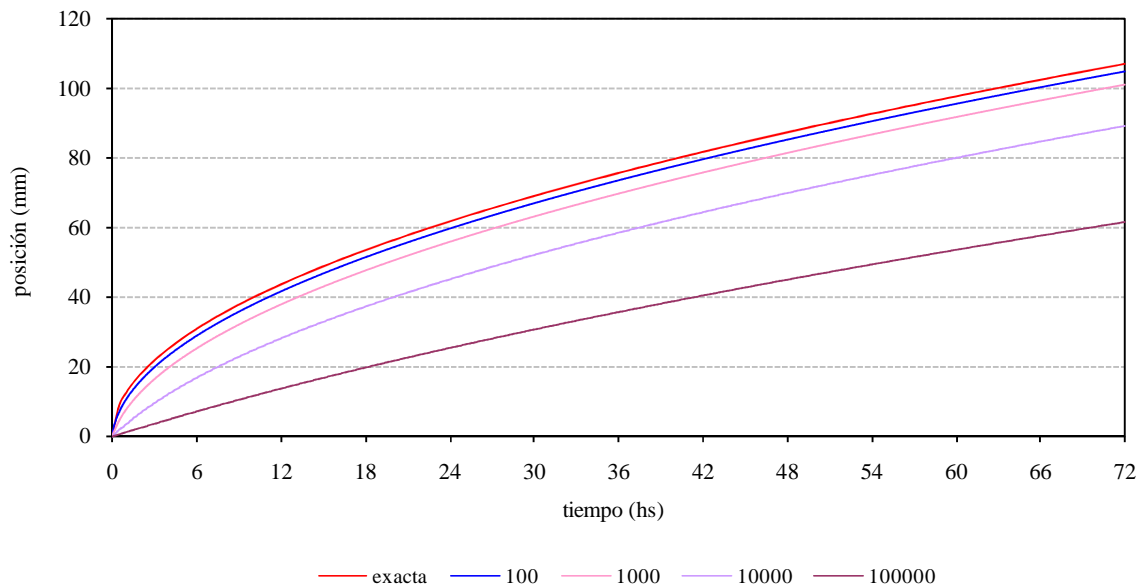


Figura 3: Posición de la interfase en función del tiempo, para distintos flujos ($t_0=0$ y $t_0 \geq 100$ seg).

Se observa que para $t_0 \geq 1000$ seg, la posición de la frontera se aparta de la que arroja la solución analítica, siendo éste más significativo para $t_0 = 10000$ y 100000 seg, presentando esta última un perfil prácticamente lineal.

La Figura 4 muestra la temperatura en el borde expuesto al flujo de calor, en función del tiempo, para $t_0 \geq 100$ seg, puesto que al igual que ocurre con la posición de la interfase, para $t_0 < 100$ seg las temperaturas son prácticamente iguales a 10°C , esto es el valor de la solución exacta; mientras que para valores de $t_0 = 10000$ y 100000 seg, al cabo de 72 horas, la temperatura en el borde fijo es de 8 y $4,8^\circ\text{C}$, respectivamente.

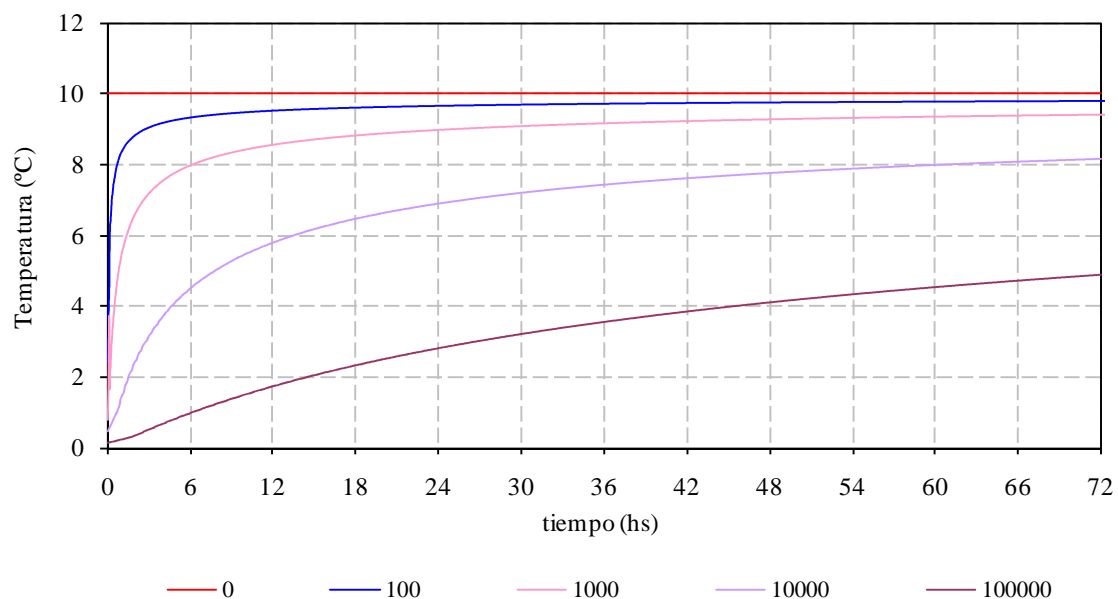


Figura 4: Temperatura en el borde fijo en función del tiempo, para distintos flujos ($t_0=0$ y $t_0 \geq 100$ seg).

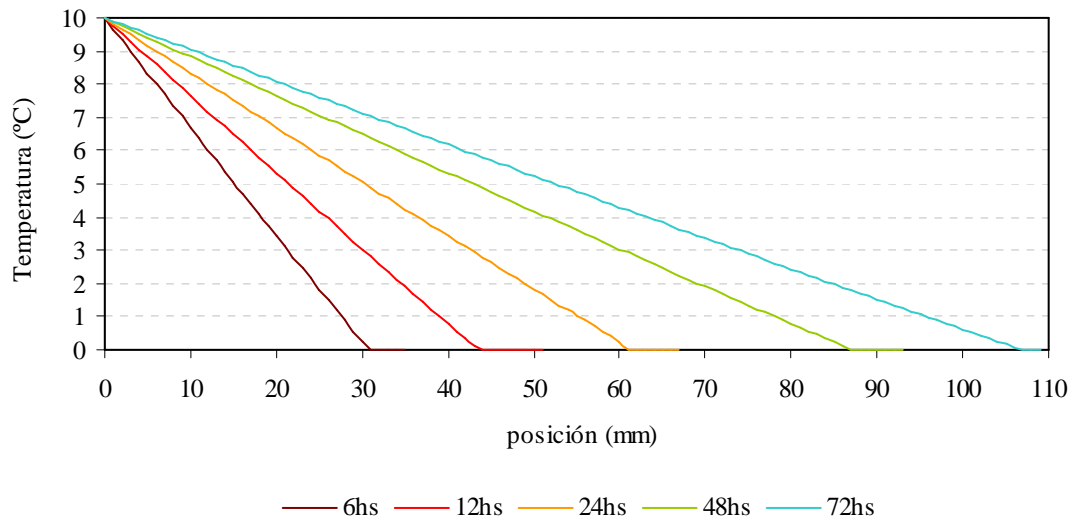


Figura 5: Temperatura en función de la posición, para $t_0 = 0$ (exacta)

En la Figura 6 se presentan las temperaturas en el interior de la sustancia de cambio de fase, en función de la posición, para $t_0 = 100$ seg.

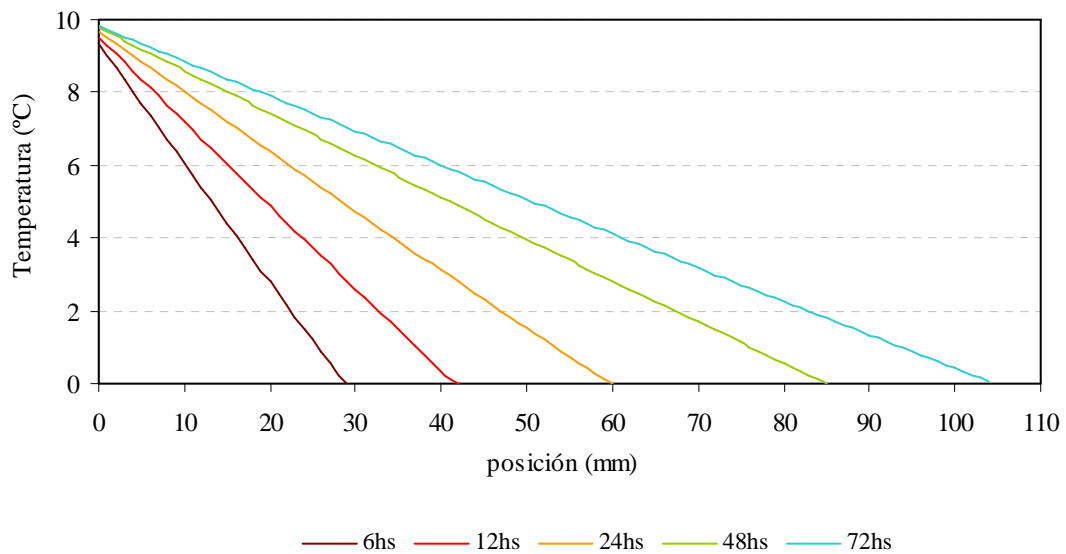


Figura 6: Temperatura en función de la posición, para $t_0 = 100$

En la Figura 7 se presentan las temperaturas en el interior de la sustancia de cambio de fase, en función de la posición, para $t_0 = 10000$ seg.

En la Figura 8 se presentan las temperaturas en el interior de la sustancia de cambio de fase, en función de la posición, para $t_0 = 100000$ seg.

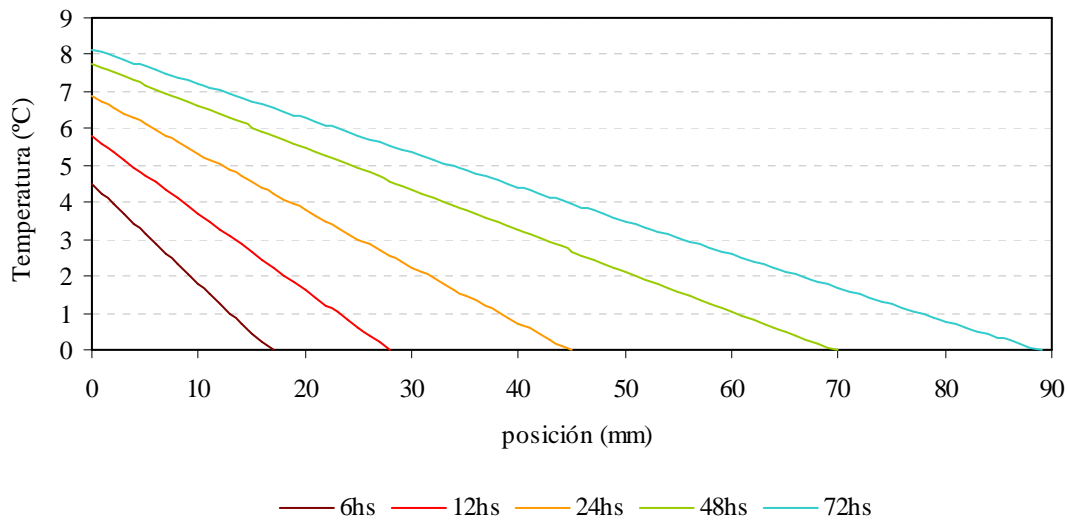


Figura 7: Temperatura en función de la posición, para $t_0 = 10000$

Comparando las temperaturas, presentadas en las Figuras 5 a 8, se observa que: a medida que t_0 aumenta, las curvas correspondientes a los distintos tiempos (6, 12, 24, 48 y 72 hs) se apartan del valor de 10 °C en el borde fijo. Para $t_0=100$ seg, a las 6 hs, se encuentra en 9,3 °C en $x=0$ y a medida que transcurre el tiempo la temperatura en esta posición, tiende 10 °C. Para $t_0=10000$ y 100000 seg, los valores de temperatura en $x=0$ presentan valores sustancialmente diferentes. Estas diferencias también se aprecian en el interior de la sustancia ($x>0$). Por otra parte, en las mismas figuras se aprecia que el valor de x , para el cual la temperatura se anula, corresponde a la posición de la interfase en ese tiempo.

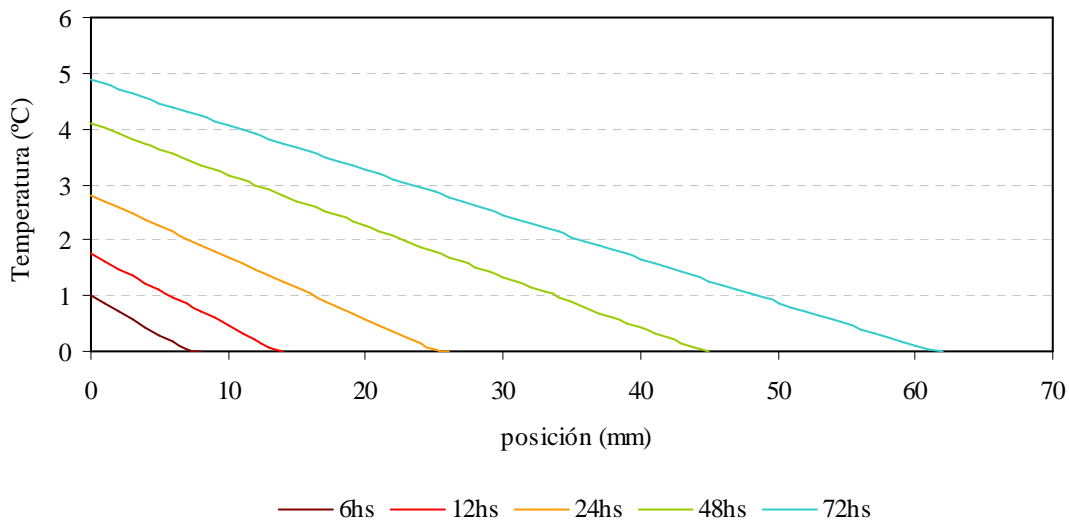


Figura 8: Temperatura en función de la posición, para $t_0 = 100000$

En la Tabla 2 se presentan los valores alcanzados por las temperaturas al cabo de 72 horas, para diversas posiciones respecto del borde fijo desde $x=0$ a 110 mm, de 10 en 10 mm; siempre que el valor de la temperatura sea distinto de cero.

Posición (mm)	Valor de t_0 (seg)									
	100000	10000	1000	100	10	1	0	0,1	0,01	0,001
0	4,88	8,15	9,41	9,81	9,94	9,98	10,00	10,00	10,00	10,00
10	4,07	7,21	8,45	8,86	8,99	9,03	9,04	9,04	9,04	9,04
20	3,26	6,27	7,50	7,90	8,03	8,07	8,09	8,08	8,08	8,08
30	2,46	5,34	6,55	6,95	7,08	7,12	7,13	7,13	7,13	7,13
40	1,67	4,42	5,60	6,00	6,13	6,17	6,18	6,18	6,18	6,18
50	0,88	3,50	4,66	5,05	5,18	5,22	5,24	5,23	5,23	5,23
60	0,10	2,58	3,72	4,11	4,24	4,28	4,29	4,29	4,29	4,29
70	0	1,68	2,79	3,18	3,30	3,34	3,36	3,36	3,36	3,36
80	0	0,78	1,87	2,25	2,38	2,42	2,43	2,43	2,43	2,43
90	0	0	0,96	1,34	1,46	1,50	1,51	1,51	1,51	1,51
100	0	0	0,06	0,43	0,55	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60
110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 2: Temperaturas para los flujos de calor estudiados, al cabo de 72 hs de iniciado el cálculo.

Se observa que para valores de t_0 altos la distribución de temperaturas en el interior de la sustancia es notablemente distinta a la obtenida para valores pequeños de t_0 ; siendo además la temperatura en el borde fijo, sustancialmente menor.

También se ha comparado la posición de la frontera libre, en los casos en los que no existe solución analítica ($t_0 \neq 0$), respecto de las cotas dadas por Sherman (1971), las que para el caso en que la excitación se deba a un flujo de calor están dadas por la ecuación (12). Cuando el flujo de calor es el que arroja solución analítica, ésta coincide con la cota superior. Es un hecho general que la posición de la interfase, se encuentra muy próxima a la cota superior; estando ésta notoriamente separada de la inferior.

$$\frac{Q(t)/\rho L}{1+(2/L)\|q\|\sqrt{ct/\pi k\rho}} \leq s(j+1) \leq \frac{Q(t)}{\rho L}, \quad \text{siendo } Q(t) = \int_0^t q(z)dz \quad \text{y } \|q\| \text{ el supremo de } q(t) \quad (12)$$

Como muestra de las cotas mencionadas, se presentan en la Tabla 3 para valores de $t_0 = 1, 10$ y 100 seg, al tiempo inicial y al cabo de 1, 6, 12, 24, 36, 48, 60 y 72 hs de iniciado el cálculo.

t (hs)	$t_0 = 1$ seg			$t_0 = 10$ seg			$t_0 = 100$ seg		
	inferior	calculo	superior	inferior	calculo	superior	inferior	calculo	superior
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,69	12,32	13,18	1,88	11,88	12,72	4,02	10,73	11,35
6	0,71	30,62	32,61	2,12	30,19	32,13	5,61	28,87	30,67
12	0,72	43,36	46,21	2,18	42,93	45,73	6,02	41,65	44,25
24	0,72	61,40	65,44	2,22	60,97	64,96	6,39	59,68	63,46
36	0,73	75,26	80,19	2,24	74,83	79,71	6,55	73,50	78,21
48	0,73	86,92	92,63	2,25	86,50	92,15	6,65	85,19	90,65
60	0,73	97,22	103,60	2,26	96,79	103,11	6,72	95,45	101,61
72	0,73	106,52	113,50	2,26	106,10	113,02	6,77	104,76	111,52

Tabla 3: Posición de la frontera y cotas de Sherman para $1 \leq t_0 \leq 100$

Las posiciones de las distintas interfases, se encuentran entre las cotas, superior e inferior dadas por Sherman, estando más próximas a la cota superior. A modo ilustrativo se presenta en la Figura 9 la posición de la frontera libre en función del tiempo y las cotas superior e inferior obtenidas de acuerdo a la ecuación (12), para $t_0 = 1000$ seg, en la que efectivamente se aprecia que la posición de la interfase, se encuentra más próxima a la cota superior.

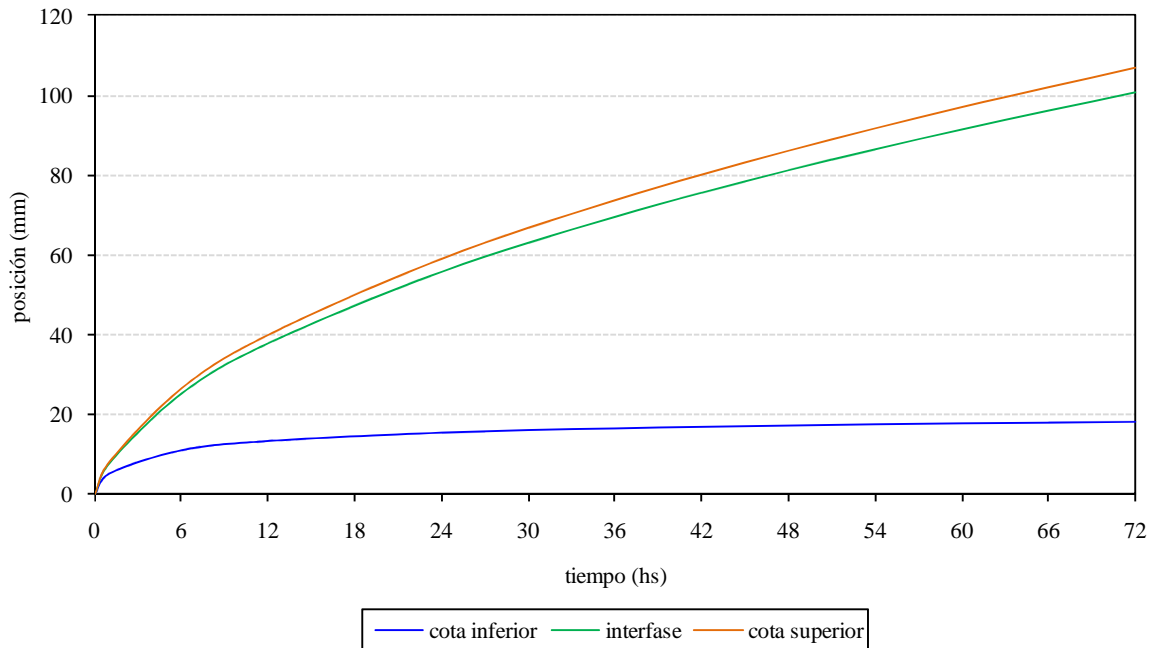


Figura 9: Posición de la frontera libre, cotas inferior y superior cuando $t_0 = 1000$ seg.

4 CONCLUSIONES

El método de resolución numérica utilizado resulta confiable; así como el lenguaje de empleado, el que con las funciones propias que posee, facilita la realización del programa. Este ha sido utilizado con anterioridad y admite cualquier flujo de calor expresado como una función definida del tiempo, a condición de que éste sea siempre entrante (o saliente). (Lozano y Boucíguez, 2009).

De los resultados obtenidos para los flujos de calor estudiados ($q_0/(t+t_0)^{1/2}$), se observa que:

- ✓ Los flujos de calor correspondientes a valores de $t_0 \leq 10$ seg son prácticamente iguales a aquel que produce la solución analítica, (esto es $t_0 = 0$); mientras que para valores de $t_0 \geq 100$ seg, los flujos se diferencian significativamente, resultando prácticamente constante a partir de valores de $t_0 > 10000$ seg.
- ✓ La energía recibida por el material de cambio de fase, es notablemente diferente para los flujos estudiados, en especial cuando el valor de t_0 supera los 100 seg.
- ✓ La posición de la frontera libre resulta prácticamente igual a la arrojada por la solución exacta ($q_0/t^{1/2}$), cuando $t_0 < 100$ seg; a partir de este valor, a medida que t_0 aumenta la posición de la interfase se aleja de tales valores.
- ✓ Las temperaturas en el borde fijo son prácticamente iguales a 10 °C, esto es el valor de la solución exacta para $t_0 < 100$ seg; mientras que para valores mayores de t_0 la temperatura en el borde fijo es menor.
- ✓ La distribución de temperaturas en el interior de la sustancia presenta un comportamiento similar para los diferentes valores t_0 .

Todo ello indica que el valor de t_0 se torna significativo cuando éste supera los 100 seg.

En cuanto a las cotas de Sherman, se observa que, en todos los casos, las posiciones de las interfases calculadas se encuentran entre los valores establecidos por ellas y más próximas a la cota superior.

De todo lo expuesto, puede decirse que cuando un flujo de calor se aparta ligeramente de

aquel que posee solución analítica, esto es para valores de $t_0 < 100$ seg, la distribución de temperaturas y la posición de la interfase, resultan similares a las de esta solución, pudiendo entonces estimarse estos valores por cálculo directo de la solución exacta.

5 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se desarrolló en el marco de los Proyectos de Investigación N° 1886 y N° 2095 del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta, a quien se agradece su financiamiento.

REFERENCIAS

- Alexiades, V.; Solomon, A. *Mathematical Modeling of Melting or Freezing Processes*, Hemisphere Publishing Corporation, A Member of the Taylor & Francis Group, 1993.
- Boucíguez, A; Lozano, R y Lara, M. *Some Considerations Regarding The Exact Solution in The One Phase Stefan Problem* Revista Engenharia Térmica. (RETERM) ABCM. Vol. 5 N° 01, 35 – 39, 2006.
- Hamdan, M y Al-Hinti, I. Analysis of Heat Transfer During the Melting of a Phase Change Material. *Applied Thermal Engineering*, N° 13: 1935 - 1944, 2004.
- Lock, G. On the Freeze Occlusion Water, Freezing and Melting *Heat Transfer in Engineering*, Hemisphere, New York, 199 - 221, 1991.
- Lozano, R y Boucíguez, A. *Análisis de Sustancias de Cambio de Fase con Frente de Fusión Inicial Sometidas a un Flujo de Calor Constante*. Mecánica Computacional. Asociación Argentina de Mecánica Computacional. Vol. XXVIII: 3079 - 3091, 2009.
- Nochetto, R. Una Introducción General a la Resolución Numérica del Problema de Stefan Unidimensional. *Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*. Universidad Nacional de Rosario, N° 11: 143 -166, 1984.
- Stefan, J. (1889a) *Ueber die theorie der eisbildung, insbesondere ueber die eisbildung im Polarmeer*. *Zit.Akad.Wiss.Wien, Math.Cl.*, 98, pp.965-983.
- Stefan, J. (1889b) *Uber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*. *Zit. Akad. Wiss. Wien, Math.Cl.*, 98, pp.473-484.
- Sherman, B. (1971) *Free Boundary Problems for the Heat Equation in Which the Moving Interface Coincides Initially with the Fixed Face*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 33, pp. 449 - 466.
- Tarzia, D. (1984) *Seminario sobre Problemas de Stefan y sus Aplicaciones*. Cuaderno N° 11. Instituto de Matemática "Beppo Levi", Universidad Nacional de Rosario.
- Wolfram, S. *Mathematica 8, Version Number 8.0.4.0*. Wolfram Research Inc. © 2011.
- Zerroukat, M y Chatwin, C. *Computational Moving Boundary Problems*. John Wiley & Sons Inc., 1994.