

MODELO MATEMATICO DESCRIPTIVO DE LA TRANSFERENCIA DE MASA EN UN PROCESO DE FREIDO POR INMERSION

Luis T. Villa^a Ricardo F. Lozano^b y Angélica C. Boucíguez^b

^aInvestigador CONICET. INIQUI – Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Salta.
Av. Bolivia 5150 – Salta, Argentina. Tel 0387 –4258617 e-mail: villal@unsa.edu.ar.

^bFacultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta. Av. Bolivia 5150 – Salta, Argentina.
Tel 0387 –4255424. e-mail: lozanor@unsa.edu.ar; acbouciguez@gmail.com.

Palabras claves: freído por inmersión, desorción de humedad, frontera móvil.

Resumen: El proceso de freído de papa natural por inmersión profunda involucra la transferencia simultánea de calor y materia, en el que tiene lugar la desorción de humedad y la entrada de aceite a través de su superficie. La descripción matemática de tal proceso se expresa mediante un sistema de ecuaciones que involucran ambos fenómenos, los que se encuentran acoplados entre sí. Para el caso específico de la primera etapa del proceso de freído (10-110seg), denominada de burbujeo vigoroso, se presenta en este trabajo, la formulación de un modelo matemático descriptivo de la dinámica del frente de desorción de humedad libre, el que se resuelve numéricamente. Los resultados obtenidos muestran que la posición de dicho frente es adecuada al problema físico en cuestión.

1 INTRODUCCION

El freído por inmersión profunda de papa natural involucra la transferencia simultánea de calor y materia. El proceso se encuentra descrito por un sistema de ecuaciones que involucran ambos fenómenos los que se encuentran acoplados entre sí, y las correspondientes condiciones de contorno e iniciales.

En el proceso, existe una etapa previa de precalentamiento del sólido papa cuya duración es del orden de 10 seg. A continuación, tiene lugar la denominada primera etapa (comprendida aproximadamente entre 10 y 110seg), durante la cual se produce un burbujeo vigoroso, por vaporización del agua libre desorbida en la muestra.

Diversos autores, (Farkas et al., 1996; Krokida et al., 2000) han realizado aportes respecto a la problemática de esta etapa, para lo cual postularon distintas hipótesis en cuanto al planteo del problema. Asimismo, en un artículo previo (Villa et al., 2011a) se han reportado conclusiones interesantes en lo referente al análisis de un modelo matemático consistente en un problema de valor inicial (PVI) y de frontera libre descriptivo del proceso simultáneo de transferencia de calor y materia, que tiene lugar en la primera etapa del freído por inmersión de porciones de papa natural en aceite caliente.

En un trabajo posterior, se resolvió numéricamente el problema mediante un modelo matemático simplificado del original propuesto con anterioridad, lo que permitió transformar el PVI y de frontera libre, en otro de PVI y frontera móvil (Villa et al., 2011b). Se confrontaron también los resultados obtenidos con datos experimentales disponibles, encontrándose un buen acuerdo.

En la Figura 1, se ilustra esquemáticamente el proceso físico que tiene lugar durante dicha etapa del proceso de freído, motivo de los trabajos anteriores y del presente. Se ha trabajado con bastones de papa natural, cortados en forma de prisma.

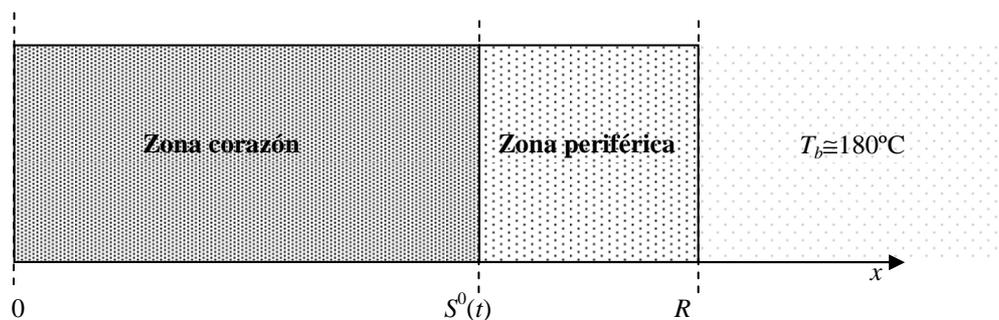


Figura 1: Esquema de la etapa de burbujeo vigoroso del freído ($t > t_1$)

En la Figura 1, t_1 denota el tiempo de precalentamiento necesario para llevar la superficie de la porción de papa, a la temperatura de ebullición del agua, este tiempo es de aproximadamente 10 seg; R el semiespesor del prisma de papa natural sometido a freído, T_b la temperatura del baño de aceite donde se sumerge la muestra a freír. La función real $S^0 = S^0(t)$, de la variable independiente t , da la posición instantánea del frente de desorción de humedad libre de la muestra, para cada $t > t_1$. La muestra empieza a desorber en la superficie de contacto $x=R$, entre el prisma y el aceite una vez que ha transcurrido el tiempo t_1 , por tanto, $S^0(t_1) = R$.

Se ha observado experimentalmente (Villa, 2006) que el frente de desorción de humedad libre alcanza el centro de la porción prismática, en forma simétrica desde ambos laterales, en aproximadamente 110 seg.

2 MODELO MATEMATICO DESCRIPTIVO DE LA PRIMERA ETAPA

Como se ha señalado en Villa et al. (2011a) para tal etapa se ha formulado el modelo descriptivo del proceso, el que está sujeto a las siguientes ecuaciones (1) a (11). Ellas modelan la evolución de la temperatura y la concentración, ambos fenómenos acoplados por la ecuación (3). Para resolver la dinámica del frente de desorción de humedad libre no es necesario obtener ni el perfil de concentración, ni el de temperatura, en el dominio de interés ($S^0(t) \leq x \leq R$); en consecuencia tampoco es necesario tener en cuenta el acople entre ambas funciones. Asimismo, la ecuación (4) expresa la condición inicial antes de que comience la etapa de desorción de humedad libre.

$$\rho_s C_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad t > t_1 \quad 0 < x < R \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \quad t > t_1 \quad (2)$$

$$k_s \frac{\partial T}{\partial x}(R, t) - \Delta H \cdot D \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) = h[T_b - T(R, t)] \quad t > t_1 \quad (3)$$

$$T(x, t_1) = Q(x) \quad 0 \leq x \leq R \quad (4)$$

$$C(x, t) = C_0 \quad t > t_1 \quad 0 \leq x \leq S^0(t) \quad (5)$$

$$C(x, t_1) = C_0 \quad 0 \leq x \leq R \quad (6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad t > t_1 \quad S^0(t) \leq x \leq R \quad (7)$$

$$C(S^0(t), t) = C_0 \quad t > t_1 \quad (8)$$

$$-AD \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) = \omega_v \quad t > t_1 \quad (9)$$

$$(C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} = -D \frac{\partial C}{\partial x}(S^0_+(t), t) \quad t > t_1 \quad (10)$$

$$S^0(t_1) = R \quad (11)$$

Donde: A es el área de la superficie lateral (m^2); C_s , la capacidad calorífica efectiva del sólido papa ($J/kg \ K$); C , C_0 y C^0 las concentraciones volumétricas de humedad: libre, inicial libre e inicial total en la papa, respectivamente (todas en kg/m^3); D el coeficiente global de difusividad de humedad (m^2/s); k_s la conductividad térmica de la papa ($W/m \ K$); R el semi-espesor de la porción de papa (m); ΔH , el calor de vaporización del agua a $100^\circ C$ (J/kg); ρ_s la densidad de la papa (kg/m^3); h el coeficiente convectivo global de transferencia de calor ($W/m^2 \ K$); S^0 la posición del frente de desorción de humedad (m); ω_v la velocidad de vaporización; T_b la temperatura del baño de aceite y $t_1=10$ seg, el tiempo en que comienza la etapa de burbujeo.

3 FORMULACION DEL PVI PARA EL FRENTE DE DESORCION

Denominando $M=M(t)$ al contenido en peso de humedad libre desorbida en el frente de desorción: $x=S^0(t)$ con sede en la zona periférica, ($S^0(t) \leq x \leq R$), al tiempo t , se encuentra que está dado por la expresión (12)

$$M(t) = 4L \left[R \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx + S^0(t) \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \right] \quad (12)$$

Siendo, R el semiespesor y L el largo del prisma de papa. Teniendo presente las ecuaciones (5) a (11), a partir de (12) se obtiene

$$\frac{dM(t)}{dt} = 4L \left[-C_0(R + S^0(t)) + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \right] \frac{dS^0(t)}{dt} \quad (13)$$

La superficie de contacto $x=R$, entre el prisma de papa y el aceite caliente, constituye el sumidero de materia por vaporización para $M(t)$. Por otra parte, teniendo presente la ecuación (9) y realizando el balance de materia se tienen las ecuaciones (14) a (16)

$$\frac{dM(t)}{dt} = 4LD(R + S^0(t)) \frac{\partial C}{\partial x}(S^0(t), t) - AD \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) \quad (14)$$

$$-D \frac{\partial C(S^0(t), t)}{\partial x} = (C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} \quad (15)$$

$$\omega_v(t) = 4R^2L(\rho_s - C^0) \frac{K_x}{60} (X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60) \quad (16)$$

Siendo $\omega_v(t)$, la velocidad de vaporización de humedad libre al tiempo t (Krokida, et al, 2000). Llevando (9) y (15) a (14) se obtiene la ecuación (17)

$$\frac{dM(t)}{dt} = -4L(R + S^0(t))(C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} - \omega_v(t) \quad (17)$$

Reemplazando la expresión de dM/dt , dada por (13) y de $\omega_v(t)$ dada por (16), a partir de (17) resulta la expresión del PVI buscado para la posición del frente de desorción de humedad libre, dada por la ecuación (18)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS^0}{dt} = \frac{-4R^2L(\rho_s - C^0)(K_x/60)(X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60)}{(C^0 - 2C_0)(S^0(t) + R) + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx} \\ \\ S^0(t_1) = R \end{array} \right. \quad (18)$$

Donde X_0 , denota el contenido inicial de humedad en la muestra, el que se obtiene experimentalmente; X_e , el contenido de humedad cuando se alcanza el equilibrio y K_x es la constante cinética de velocidad de pérdida de humedad libre. Los coeficientes X_e y K_x se toman de lo reportado por Krokida, et al, (2000), para un proceso de freído en condiciones similares.

Introduciendo los parámetros a , b , d y l ; dados por:

$$a = R^2(\rho_s - C^0)b(X_0 - X_e) \quad b = (K_x/60) \quad (19)$$

$$d = (C^0 - 2C_0) \quad l = Rd \quad (20)$$

Remplazando tales parámetros, en el PVI planteado en (18), este resulta expresado por la ecuación (21)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS^0}{dt} &= \frac{-a \exp(-bt)}{dS^0(t) + l + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx} = f(x,t, S^0(t)) \\ S^0(t_1) &= R \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Denotando ahora con $\varphi = \varphi(t)$ a la función definida como:

$$\varphi(t) = \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \quad (22)$$

Aplicando la Regla de Leibniz a (22), se tiene:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_{S^0(t)}^R \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} dx + C(R,t) \frac{dR}{dt} - C(S^0(t),t) \frac{dS^0}{dt} \quad (23)$$

En la que el segundo término del miembro derecho es nulo por ser R constante. Seguidamente, utilizando, en (23) las ecuaciones pertinentes del modelo en cuestión para describir la etapa de burbujeo vigoroso, resulta la expresión (24):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{8LR} 4R^2 L (\rho_s - C^0) (K_x/60) (X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60) - C(S^0(t),t) \frac{dS^0}{dt} \quad (24)$$

La que, en función de los parámetros definidos en las ecuaciones (19) y (20) y las ecuaciones (21) y (22), resulta dada por la expresión (25).

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{2R} a \exp(-bt) + C^0 \frac{a \exp(-bt)}{S^0(t)d + \varphi(t) + l} \quad (25)$$

Con el procedimiento explicitado precedentemente, se arriba al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acoplado simultáneo, satisfecho por las funciones incógnitas $S^0(t)$ y $\varphi(t)$, dadas por (26)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS^0}{dt} &= \frac{-a \exp(-bt)}{S^0(t)d + l + \varphi(t)} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left(\frac{C^0}{S^0(t)d + l + \varphi(t)} - \frac{1}{2R} \right) a \exp(-bt) \\ S^0(t_1) &= R \\ \varphi(t_1) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

4 RESOLUCION DEL PVI PARA EL FRENTE DE DESORCION.

Al abordar el procesamiento numérico del problema se presenta un contratiempo de carácter práctico, consistente en el hecho de que la evolución dinámica de las funciones incógnitas $S^0(t)$ y $\varphi(t)$, en el PVI dadas por (26), son de órdenes de magnitud temporal muy diversos. En efecto, la función $S^0(t)$ tiene una escala de tiempo comprendida entre 10 y 110 seg; mientras que la $\varphi(t)$, tiende asintóticamente a su valor máximo en el orden de 10seg.

En vista de ello, se aplicó una idea consistente en un modelo aproximado a (26), emergente de reemplazar $S^0(t)$ en la ecuación diferencial para $\varphi(t)$, en tal modelo, por una expresión analítica de ajuste de los correspondientes datos experimentales para el frente de desorción $S^0(t)$ (Villa et al., 2011b). De tal forma, se desacoplan las ecuaciones diferenciales en (26) resultando el PVI complementario, dado por (27), para una función aproximante de $\varphi(t)$, que se denota como $v=v(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv(t)}{dt} = \left[-50 + \frac{p}{d(-0.00009t + 0.0009) + v + l} \right] a \exp(-bt) \\ v(0) = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

Consignándose que en (27), el paréntesis $(-0.00009t + 0.0009)$ corresponde a la expresión analítica de ajuste de datos experimentales para $S^0(t)$ (Villa et al., 2011b). Se ha incorporado, también, el valor numérico de $1/2R$, que resulta igual a 50, ya que $R=0.01m$.

Para la resolución numérica del PVI dado por (27), se ha utilizado la función NDSolve, que resuelve numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias y a derivadas parciales, provista por el programa *Mathematica* (Wolfram, 2011). Esta función encuentra soluciones iterativamente, comenzando por un valor particular de la variable independiente, t en este caso, tomando a continuación una secuencia de pasos de modo de cubrir el rango total y entrega las soluciones en forma de un objeto llamado “InterpolatingFunction”, el que al aplicarse a un punto particular t de la variable independiente, entrega un valor aproximado de la función $v(t)$ en tal punto. Este objeto almacena una tabla de valores para $v(t_i)$, para entonces interpolar esta tabla y encontrar un valor aproximado en el tiempo particular requerido.

5 RESULTADOS OBTENIDOS.

Al procesar (27), usando los parámetros: $a = 0.00144$, $b = 0.01$, $d = 436$, $l = 4.7$ y $p = 896.6$, provenientes de datos experimentales para el tipo de papa utilizada (Aguilera, 2002) y los coeficientes de transporte en el proceso de freído (Krokida et al., 2000); resulta la curva $v=v(t)$, presentada en la Figura 2, a partir de cual, se obtiene la función polinómica de ajuste para $v(t)$ dada por la expresión (28).

$$v(t) = 7 \cdot 10^{-7} t^3 - 2 \cdot 10^{-4} t^2 + 4.66 \cdot 10^{-2} t - 0.4359 \quad (28)$$

Insertando la expresión (28) como aproximante de $\varphi(t)$, en la ecuación diferencial para el frente de desorción $S^0(t)$ en (26), resulta el correspondiente PVI complementario que aproxima a la función $S^0(t)$ obteniéndose el PVI expresado por (29)

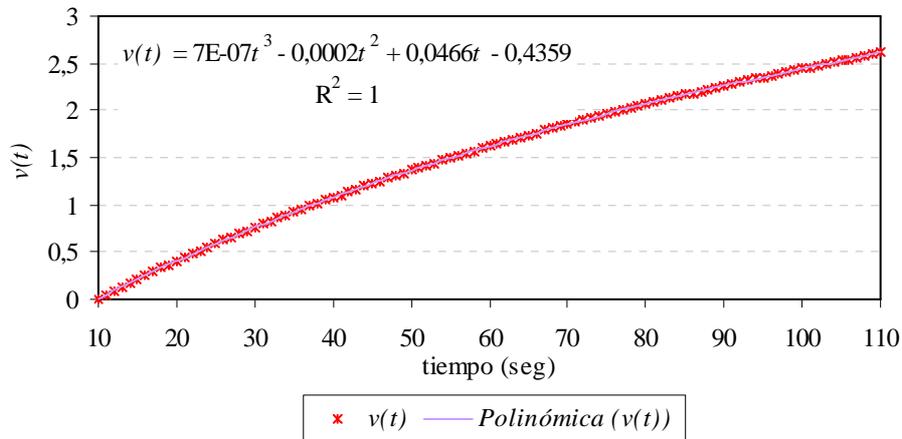


Figura 2: Resultados obtenidos para la función $v(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS^0(t)}{dt} = \frac{-a \exp(-bt)}{S^0(t)d + v(t) + l} \\ S^0(10) = R = 0.01 \end{array} \right. \quad (29)$$

Donde $v(t)$ está dada por la expresión (28).

Al procesar numéricamente el PVI (29), se encuentra la curva representada en la Figura 3, que aproxima el frente de desorción. En la misma, se contrastan los valores obtenidos para la función $S^0(t)$ resultantes de la aproximación aplicada con los valores experimentales, observándose un acuerdo razonable.

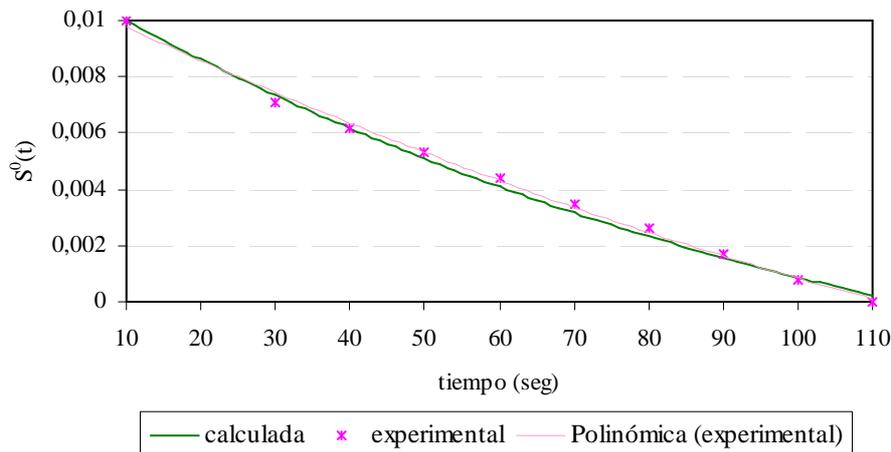


Figura 3: Resultados obtenidos para la función $S^0(t)$ y comparación con los experimentales.

6 CONCLUSIONES

Se presenta, en este trabajo, una contribución al campo de conocimiento relativo a la primera etapa (burbujeo vigoroso) del proceso de freído de papa natural por inmersión en aceite caliente. En efecto, tomando como base la formulación del modelo descriptivo para la etapa de interés, provista en trabajos precedentes, se ha logrado precisamente simular la

dinámica del frente de desorción de humedad libre, mediante un modelo consistente en un problema de valor inicial para un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales: una para la función frente de desorción propiamente dicho y otra para la función definida como la integral del perfil de concentración de materia (agua libre vaporizada) en la zona en que tiene presencia el vapor de agua libre de la papa.

Aún queda abierto, como tema de interés, continuar investigando la estrategia metodológica, de modo de abordar, efectivamente, la resolución numérica del modelo de las dos ecuaciones diferenciales acopladas, mencionadas precedentemente.

A esta altura, como conclusión final, se presentan los resultados emergentes para una función aproximante del frente de desorción buscado. El acuerdo con los datos experimentales es razonablemente bueno.

Para el procesamiento matemático se utilizó el programa *Mathematica*, que presenta un alto nivel de cálculo, resuelve rápidamente y es fácil de implementar. Al poseer rutinas y sub rutinas contenidas en él, se evitan posibles errores de programación, lo que lo hace altamente confiable

7 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se desarrolló en el marco del Proyecto de Investigación N° 1886 del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta, a quien se agradece su financiamiento.

8 REFERENCIAS

- Aguilera, J. *Temas en Tecnología de Alimentos*, Vol. 1, Coedición: Alfaomega, IPN, CYTED, 2002
- Farkas, B, Singh, R y Rumsey, T., Modeling heat and Mass Transfer in Immersion Frying. I. Model Development. II, Model Solution and Verification. *Journal of Food Engineering* **29**, 211 – 248, 1996
- Krokida, M, Oreopoulou, V y Maroulis, Z., Water Loss and Oil Uptake as a Function of Frying Time. *Journal of Food Engineering* **44**, 39 – 46, 2000.
- Villa, L., *Estudio del Freído de Papas por Inmersión Mediante un Modelo de Frontera Libre. Tesis Doctoral*, Doctorado en Ciencias – Area Química, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, 2006
- Villa, L; Gottifredi, J y Boucíguez, A., Some Considerations on a Simultaneous Heat and Mass Transfer Food Process. Model Formulation. *International Review of Chemical Engineering*. Vol. 3, N° 2, 265-271, 2011
- Villa, L; Sanziel, M y Bouciguez, A., Numerical Solution and Validation Concerning a Descriptive Model of a Simultaneous Heat and Mass Transfer Process. *International Review of Chemical Engineering* Vol. 3, N° 4, 493-498, 2011.
- Wolfram, S. *Mathematica 8, Version Number 8.0.4.0*. Wolfram Research Inc. © 2011.