

SENSITIVITY COMPUTATIONS USING PERTURBATIVE METHODS FOR SHALLOW WATER EQUATIONS

Ariel Fraidenraich*, Pablo M. Jacovkis, Fernando R. Lima*****

*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Av. Paseo Colón 850 (1063) Buenos Aires, Argentina.
e-mail: afraide@fi.uba.ar

**Departamento de Computación e Instituto de Cálculo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria (1428) Buenos Aires, Argentina.
e-mail: jacovkis@dc.uba.ar

***Centro Regional de Ciências Nucleares, Comissão Nacional de Energia Nuclear
Rua Cônego Barata, 999, Tamarineira, 52110-120, Recife, PE, Brasil.
e-mail: falima@cnen.gov.br

Key words: Shallow Water Equations, Sensitivity Analysis, Perturbative Methods, Mass Lumping Finite Element Technique.

Abstract. *We applied the perturbative theory to perform sensitivity analysis of the shallow water equations. The numerical solution of these equations was found via the mass lumping finite element technique. Then, the adjoint system of the shallow water equations was derived for the one-dimensional case and the expression of the sensitivity coefficient of a generic functional with respect to a generic parameter (Chézy resistance coefficient, solitary wave amplitude and bed channel slope) was obtained, using the differential formalism. The sensitivity of the mean functional, representing the first approximation of the velocity and the depth, was analyzed with regard to these parameters. Results of the sensitivity coefficients obtained via the perturbative methodology satisfactorily matched the values computed by the direct method, i.e., by means of the direct solution of the shallow water equations changing the values of input parameters for each considered case.*

1 INTRODUCCION

El flujo unidimensional de aguas poco profundas en un canal abierto es representado por las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicas casilineales de Saint-Venant de la hidrodinámica; ver por ejemplo¹. La solución numérica puede ser hallada, por ejemplo, por medio de la metodología “mass lumping” de elementos finitos^{2, 3, 4}. La teoría perturbativa se aplica para realizar estudios de sensibilidad en muchos modelos economizando tiempos computacionales. Esta teoría se utilizó en problemas de reactores nucleares; de hecho, el análisis adjunto de sensibilidad del código RELAP5/PANBOX2/COBRA3 (R/P/C) que contiene muchas decenas de ecuaciones diferenciales acopladas incluyendo problemas de cambios de fase es cuidadosamente descrito en⁵ o en⁶. Este código es un gran trabajo que representa un importante y muy útil desarrollo tendiente a establecer un código de propósito general para el análisis de escenarios de accidentes posibles, como Cacuci y Ionescu-Bujor dicen en sus trabajos^{7, 8}.

Pueden ser mencionadas otras aplicaciones de estudios de sensibilidad; por ejemplo en⁹ los estudios de sensibilidad se aplican a sistemas de cañerías. Además, Burg¹⁰ usa el análisis discreto de sensibilidad para el diseño y optimización de contracciones y expansiones en canales en regímenes supercríticos. Nuestro objetivo es aplicar esta metodología (perturbativa) para otros problemas en dinámica de fluidos. En¹¹ implementamos un análisis de sensibilidad adjunto a la ecuación de transporte de contaminantes. La implementación del análisis de sensibilidad se generaliza a la ecuación de Burgers no lineal; ver¹². Hasta donde conocemos, no existen referencias de aplicación de la metodología perturbativa aplicada al estudio de parámetros físicos en aguas poco profundas. El mencionado trabajo de Burg, por ejemplo, usa en la metodología de análisis de sensibilidad discreto un algoritmo que optimiza el espacio del gradiente de las funciones de forma, y su metodología reduce el costo computacional de estimación y diseño del espacio vectorial de gradiente de las funciones de forma, pero no lo aplica al análisis de parámetros físicos.

También aplicamos esta metodología al estudio de propagación de la onda viscosa cinemática, como se puede ver en¹³. La propuesta de este trabajo es estudiar el comportamiento de las ecuaciones de aguas poco profundas unidimensionales en canales abiertos considerando canales prismáticos de sección rectangular con términos fuentes y condiciones iniciales perturbadas. Utilizamos la propagación de la onda solitaria porque de esta manera es posible comparar los resultados numéricos con los dados por Zienkiewicz y sus colegas en¹⁴. Luego aplicamos el formalismo diferencial para realizar análisis de sensibilidad a las ecuaciones de aguas poco profundas unidimensionales.

Para cuantificar la altura h y la velocidad u se consideró un funcional: el valor promedio en el dominio espacial-temporal. Para implementar el método perturbativo se calcularon los operadores adjuntos, la ecuación adjunta con sus condiciones de borde, y la forma general del concomitante bilineal.

Con estas herramientas analizamos las variaciones del funcional promedio de las alturas y velocidades respecto a los siguientes parámetros: coeficiente de resistencia, de amplitud de la onda solitaria y pendiente de fondo del canal. La variación del funcional (velocidad y altura promedio) con respecto al punto de referencia se cuantificó de dos formas distintas: a) directamente, a través de una nueva solución del problema de aguas poco profundas y b) determinando los llamados coeficientes de sensibilidad. Este último procedimiento es más rápido y eficiente; el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento físico del problema es resuelto una sola vez. Como resultado, obtenemos los coeficientes de sensibilidad de primer orden utilizando el método perturbativo. En la próxima sección discutimos el modelo matemático y su procedimiento de discretización. En la sección 3 presentamos el análisis de sensibilidad y una deducción detallada de la ecuación adjunta. En la sección 4 presentamos los resultados y sus discusiones. En la sección 5 se elaboran las conclusiones.

2 METODOLOGÍA

Ahora estudiamos la solución del sistema acoplado de masa y cantidad de movimiento en un medio fluido que satisface la ecuación de incompresibilidad de masa.

2.1 Modelo teórico

El flujo unidimensional de aguas poco profundas en un canal prismático abierto con sección rectangular puede ser escrito como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h u)}{\partial x} = 0 \equiv m_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + g \frac{\partial (h + H_b)}{\partial x} + \frac{u|u|}{c^2 h} = 0 \equiv m_2, \quad (2)$$

donde $h = h(x, t)$ es la altura medida desde el fondo del canal, $u = u(x, t)$ es la velocidad longitudinal, g es la aceleración de la gravedad, c es el coeficiente de resistencia de Chézy, x es la coordenada longitudinal y t es el tiempo. Si $H_b = H_b(x)$ es la altura (fija) de fondo, medida desde un plano constante de referencia, y si estamos interesados en las fluctuaciones $\eta = \eta(x, t)$ desde una superficie constante S , $H_b(x) + H(x) = S$, donde $H(x)$ es la altura desde el fondo hasta una superficie de valor constante, y $h(x, t) + \eta(x, t) = H(x)$; además, amp es la amplitud de la onda solitaria (ver Figura 1) y $m = (m_1, m_2)$ representa el sistema diferencial implícito.

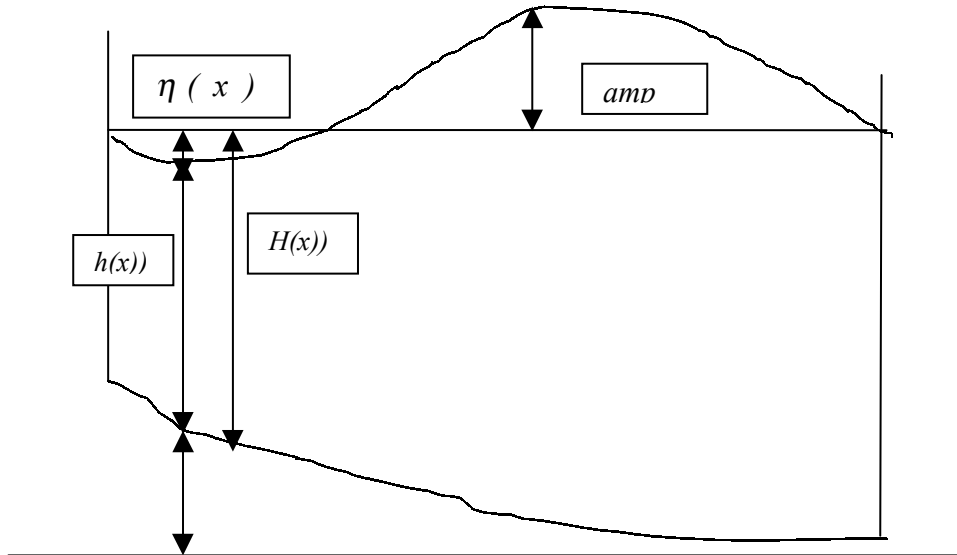


Figura 1. Perfil longitudinal del canal

con la siguiente variación de fondo

$$H(x) = ip \left(1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right), \quad (3)$$

donde L es la longitud del canal abierto e ip es el parámetro de variación de fondo.

Las condiciones de borde e iniciales del problema son:

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= \varphi_1(x) & 0 < x < L, \\ u(x, 0) &= \varphi_2(x) & 0 < x < L, \\ u(0, t) &= \varphi_3(t) & 0 < t, \\ \eta(L, t) &= \varphi_4(t) & 0 < t, \end{aligned} \quad (4)$$

donde φ_1 , φ_2 , φ_3 y φ_4 son funciones convenientes. En realidad, suponemos conocido el campo de velocidades como condición de borde a la izquierda y las fluctuaciones de las alturas a la derecha, pero otras combinaciones de las condiciones de contorno son posibles, siempre y cuando – para flujo subcrítico – se asigne una condición de contorno en cada extremo del segmento longitudinal modelizado.

3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Consideremos el funcional respuesta dado por $R = \langle S^+ \phi \rangle$ (5)

donde R es el funcional respuesta, S^+ es el término fuente de la ecuación diferencial adjunta, $\langle \cdot \rangle$ es el producto interno definido en un adecuado espacio funcional y ϕ es la variable en estudio. Los valores promedios de alturas y velocidades en dicho espacio funcional son definidos, respectivamente, por

$$\phi_m = \frac{1}{LT} \iint_{x,t} h(x,t) dt dx, \quad \phi_m = \frac{1}{LT} \iint_{x,t} u(x,t) dt dx; \tag{6}$$

como se puede ver en¹⁵, las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir

$$m = H_0 \phi = 0, \tag{7}$$

donde H_0 es un operador no lineal que aplicado a ϕ reproduce las ecuaciones (1) y (2). Derivando las ecuaciones (1) y (2) con respecto al parámetro genérico p_i , (ver^{6, 16, 17, 18}) se obtiene

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_i} = \frac{\partial h/i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((uh)/i), \tag{8}$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial p_i} = \frac{\partial u/i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(0.5 \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + g \frac{\partial (h-H)/i}{\partial x} + \left(\frac{2uu/i}{c^2 h} \frac{u}{|u|} - \left(\frac{u^2 h/i}{c^2 h^2} \right) \frac{u}{|u|} \right)$$

$(\cdot)/i$ es la derivada parcial de la función (\cdot) respecto del parámetro independiente p_i .

Escrito en la notación condensada de las derivadas de Fréchet^{9, 19} para describir la aproximación lineal utilizada, que se corresponde con la matriz jacobiana, se tiene

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + h \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ g \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - \left(\frac{u^2(\cdot)}{c^2 h^2} \right) \frac{u}{|u|} & u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{2u(\cdot)}{c^2 h} \frac{u}{|u|} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\underline{\underline{H}} \underline{\phi} = \underline{S}(i) = - \frac{\partial m}{\partial p_i}, \tag{10}$$

$\frac{u}{|u|}$ es el signo de la velocidad dentro de cada elemento y es considerado constante en el elemento.

3.1 Obtención del operador diferencial y el operador adjunto

Utilizamos las ecuaciones de reversibilidad para hallar la ecuación diferencial adjunta y el concomitante bilineal

$$\langle \underline{\varphi}/i, \underline{S}^+ \rangle = (\underline{\varphi}^* \underline{H} \underline{\varphi}/i)_+ \underline{P}(\underline{\varphi}^*, \underline{\varphi}/i) \quad (11)$$

siendo $H \varphi^* = S^+$ la ecuación diferencial adjunta y $\underline{P}(\underline{\varphi}^*, \underline{\varphi}/i)$ el concomitante bilineal.

De la ecuación (11) con el producto interno natural en este espacio de funciones se tiene

$$\int_{\Omega} [\varphi/i]^T H^* \varphi^* d\Omega + P(\varphi/i, \varphi^*) = \langle H \varphi/i, \varphi^* \rangle, [\varphi/i]_e^T = \begin{bmatrix} \varphi_1/i & 0 \\ 0 & \varphi_2/i \end{bmatrix}_e, \quad (12)$$

$$\langle H \varphi/i, \varphi^* \rangle = \int_{\Omega} [\varphi/i]_e^T \begin{bmatrix} -\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + h \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ -g \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - \frac{u^2}{c^2 h^2} \frac{(\cdot)}{|u|} & \left(u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{2u(\cdot)}{c^2 h} \right) \frac{u}{|u|} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{bmatrix} d\Omega. \quad (13)$$

Entonces lo que se puede hacer es tomar el primer término del segundo miembro de la ecuación (11) e integrarlo por partes. Procediendo así, la ecuación derivada se obtiene al multiplicar el sistema diferencial original dado por las ecuaciones (1) y (2) por la función adjunta, como se ve en la ecuación (11) e integrarla por partes, consiguiendo además de la ecuación diferencial adjunta el concomitante bilineal genérico:

$$\iint_{X,T} \phi_1^* \frac{\partial h/i}{\partial t} dx dt = - \iint_{X,T} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} h/i dx dt + \int_X [h/i \phi_1^*]_0^T dx, \quad (14)$$

$$\iint_{X,T} \phi_2^* g \frac{\partial (h-H)/i}{\partial x} dx dt = -g \iint_{X,T} \frac{\partial \phi_2^* /i}{\partial x} dx dt + \int_T [(h-H)/i g \phi_2^*]_0^L dt, \quad (15)$$

$$I = - \iint \frac{u^2}{c^2 h^2} \frac{u}{|u|} \phi_2^* dx dt + \iint \frac{2u}{c^2 h} \frac{u}{|u|} \phi_2^* dx dt. \quad (16)$$

$$\iint_{X,T} \frac{\partial u/i}{\partial t} \phi_2^* dx dt = - \iint_{X,T} u/i \frac{\partial \phi_2^*}{\partial t} dx dt + \int_{X,T} [u/i \phi_2^*]_0^T dx, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \iint_{X,T} \frac{\partial u^2/i}{\partial x} \phi_2^* dx dt = - \iint_{X,T} u u/i \frac{\partial \phi_2^*}{\partial x} dx dt + \frac{1}{2} \int_{X,T} [u u/i \phi_2^*]_0^L dt. \quad (18)$$

$$\iint_{X,T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} u h \right) \phi_1^* dx dt = - \iint_{X,T} (u h)/i \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} dx dt + \int_T \left[(u h)/i \phi_1^* \right]_0^L dt \quad (19)$$

$$P_1 = \int_X \left[h/i \phi_1^* \right]_0^T dx + \int_X \left[u/i \phi_2^* \right]_0^T dx + g \int_T \left[(h-H)/i \phi_2^* \right]_0^L dt + \int_T \left[h \phi_1^* u/i \right]_0^L dt, \quad (20)$$

$$P_2 = \int_T \left[u h/i \phi_1^* \right]_0^T dt + \int_T \left[u u/i \phi_2^* \right]_0^T dt + \int_T \left[\phi_2^* u/i \right]_0^L dt. \quad (21)$$

Se eliminan el segundo y cuarto término porque se cumplen las siguientes condiciones de borde e iniciales:

$$u(x=0)=0, \quad u(t=T_f)=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial p_i}(x=0) \right] = 0, \quad \phi_1^*(x=L)=0, \quad u(x=0)=0, \quad \phi_2^*(x=L)=0. \quad (22)$$

Finalmente el concomitante bilineal resulta

$$P = - \int_X \phi_1^*(x=0) \frac{\partial h}{\partial p_i}(t=0) dx + \int_T -g \frac{\partial h-H}{\partial p_i}(x=0) \phi_2^*(x=0) dt. \quad (23)$$

X es el dominio espacial de integración y $x=0$ es el origen de coordenadas.

$$P = P_1 + P_2. \quad (24)$$

Se ha seguido el procedimiento similar al tratamiento del trabajo de sistema de tuberías de J. Baliño, F.R.A. Lima y otros⁹ donde se define entre otras cosas el único concomitante de esta manera $P = P_1 + P_2$ correspondientes a las variaciones espaciales y temporales respectivamente, el concomitante tratado como función aditiva y la forma de hallar el sistema adjunto con sus condiciones de borde. Entonces la ecuación adjunta se puede escribir de la siguiente manera como

$$\underline{H}^* T \underline{\phi}^* = \underline{S}^+. \quad (25)$$

El operador adjunto será

$$\underline{H}^{*T} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} & -g \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u^2}{c^2 h} \frac{u}{|u|} \\ -h \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{2u}{c^2 h} \frac{u}{|u|} \right) \end{bmatrix} . \quad (26)$$

El término fuente de la ecuación adjunta es la función de peso que interviene en la elección del funcional promedio a variar

$$s_1^+ = \frac{1}{LT}, \quad s_2^+ = \frac{1}{LT} . \quad (27)$$

Los términos fuente de las ecuaciones adjuntas correspondientes a los funcionales promedios de las alturas y velocidades son las funciones de peso correspondiente a la ecuación (6). Luego, las unidades de los términos fuentes dependen de cada funcional adjunto analizado. Las correspondientes unidades de ϕ^* son definidas como aquéllas para las cuales la ecuación diferencial adjunta $\underline{H}^{*} \phi^* = s^+$ es dimensionalmente correcta. Resumiendo, la ecuación diferencial adjunta con sus condiciones de borde y finales queda

$$\begin{aligned} \phi_1^*(x, T) = 0, \quad \phi_2^*(x, T) = 0 & \quad 0 < x < L, \\ \phi_1^*(L, t) = 0, \quad \phi_2^*(L, t) = 0 & \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (28)$$

La elección de las condiciones de borde obedece a dos causas: en $x = L$ las funciones adjuntas deben ser idénticamente nulas y además deben anular la mayor cantidad de términos del concomitante bilineal

$$\frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} - g \frac{\partial \phi_2^*}{\partial x} - \frac{u^2}{c^2 h^2} \frac{u}{|u|} \phi_2^* - S_1^+, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \phi_2^*}{\partial t} = -h \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} - u \frac{\partial \phi_2^*}{\partial x} + \frac{2u}{c^2 h} \frac{u}{|u|} \phi_2^* - S_2^+, \quad (30)$$

donde L es la longitud del canal y T es el tiempo total de simulación.

3.2 Discretización de las ecuaciones adjuntas y análisis de cada término así como también del concomitante bilineal

Plantaremos ahora la discretización de las ecuaciones (29) y (30) con sus condiciones de borde y finales dadas por la ecuación (28). El esquema que se utiliza es el de Lax–Wendoff (esquema explícito en dos semi-pasos). Como el sistema adjunto resulta ser lineal no necesitamos desdoblar dicho operador para su resolución.

El método de los elementos finitos de Galerkin es utilizado en la discretización espacial. Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es necesario introducir un esquema de integración numérico en el tiempo^{2, 3}. El esquema empleado es el de Taylor-Galerkin que utiliza la matriz concentrada sobre la diagonal principal para la resolución directa y la solución del problema adjunto. Para estabilizar el esquema de integración numérica en el tiempo y reducir el efecto de amortiguamiento artificial se utiliza una combinación lineal de matrices, $\bar{\tilde{M}} = e\bar{M} + (1-e)M$, donde $(\bar{\tilde{M}})$ es la matriz de masa selectiva, (\bar{M}) es la matriz concentrada sobre la diagonal, y $M = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$ la matriz de masa de Galerkin. N es la función de forma lineal definida en cada elemento y e es el coeficiente de la combinación lineal utilizada. Estas matrices son ejemplificadas en Kawahara y sus colegas^{2, 3} para problemas de aguas poco profundas. Consideramos 40 elementos con un paso espacial de 4 m; siendo su paso temporal de 0,05 s. Kawahara y sus colegas^{2, 3} utilizaron dicho esquema explícito que evoluciona en dos semipasos temporales, basado en el método de Lax- Wendroff^{2, 3}.

Primer semipaso temporal de t_n a $t_{n+\frac{1}{2}}$

$$\phi_i^{*1(n+\frac{1}{2})} = \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i-1}^{*1(n)} + \left(\frac{2+e}{3}\right) \phi_i^{*1(n)} + \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i+1}^{*1(n)} - \frac{v}{2} \left(-0.5 \phi_{i-1}^{*2(n)} + 0.5 \phi_{i+1}^{*2(n)}\right) - \frac{v}{2} (h_1 \phi_{i-1}^{*2(n)} + (h_{m1} + h_{m2}) \phi_i^{*2(n)} + h_d \phi_{i+1}^{*2(n)}) - \frac{v}{2} (f_i \phi_{i-1}^{*1(n)} + (f_{m1} + f_{m2}) \phi_i^{*1(n)} + f_d \phi_{i+1}^{*1(n)}) - \frac{v}{2} S_1^+ L_e \quad (31)$$

$$\phi_i^{*2(n+\frac{1}{2})} = \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i-1}^{*2(n)} + \left(\frac{2+e}{3}\right) \phi_i^{*2(n)} + \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i+1}^{*2(n)} - \frac{v}{2} (a \phi_{i-1}^{*1(n)} + b \phi_i^{*1(n)} + c \phi_{i+1}^{*1(n)}) - \frac{v}{2} (t_i \phi_{i-1}^{*1(n)} + (t_{m1} + t_{m2}) \phi_i^{*1(n)} + t_d \phi_{i+1}^{*1(n)}) - \frac{v}{2} S_2^+ + \frac{v}{2} (k_i \phi_{i-1}^{*2(n)} + (k_{m1} + k_{m2}) \phi_i^{*2(n)} + k_d \phi_{i+1}^{*2(n)}) \quad (32),$$

donde n es el índice temporal, i es el índice espacial, $v = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ y $\phi_i^{*k(n_i)}$ es la función adjunta asociada a la variable k (1, 2) en el punto espacial i y en el tiempo discretizado n_i .

Segundo semipaso temporal de $t_{n+\frac{1}{2}}$ a t_{n+1}

$$\phi_i^{*1(n+1)} = \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i-1}^{*1(n)} + \left(\frac{2+e}{3}\right) \phi_i^{*1(n)} + \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i+1}^{*1(n)} - v \left(-0.5 \phi_{i-1}^{*2(n+\frac{1}{2})} + 0.5 \phi_{i+1}^{*2(n+\frac{1}{2})}\right) - v (h_i \phi_{i-1}^{*2(n+\frac{1}{2})} + (h_{m1} + h_{m2}) \phi_i^{*2(n+\frac{1}{2})} + h_d \phi_{i+1}^{*2(n+\frac{1}{2})}) - v (f_i \phi_{i-1}^{*1(n+\frac{1}{2})} + (f_{m1} + f_{m2}) \phi_i^{*1(n+\frac{1}{2})} + f_d \phi_{i+1}^{*1(n+\frac{1}{2})}) - v S_1^+ L_e \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \phi_i^{*2(n+1)} = & \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i-1}^{*2(n+\frac{1}{2})} + \left(\frac{2+e}{3}\right) \phi_i^{*2(n+\frac{1}{2})} + \left(\frac{1-e}{6}\right) \phi_{i+1}^{*2(n+\frac{1}{2})} - v(a \phi_{i-1}^{*1(n+\frac{1}{2})} + b \phi_i^{*1(n+\frac{1}{2})} + c \phi_{i+1}^{*1(n+\frac{1}{2})}) - \\ & -v(t_i \phi_{i-1}^{*1(n+\frac{1}{2})} + (t_{m_1} + t_{m_2}) \phi_i^{*1(n+\frac{1}{2})} + t_d \phi_{i+1}^{*1(n+\frac{1}{2})}) - v(S_2^+ + \frac{v}{2}(k_i \phi_{i-1}^{*2(n+\frac{1}{2})} + (k_{m_1} + k_{m_2}) \phi_i^{*2(n+\frac{1}{2})} + k_d \phi_{i+1}^{*2(n+\frac{1}{2})})) \end{aligned} \quad (34)$$

Los términos cuyos coeficientes son los h corresponden a los de Chézy y los de f son los correspondientes a los convectivos. En la ecuación (32) los t son los que provienen de los términos convectivos y los k son los coeficientes de Chézy de la segunda ecuación de movimiento. Los (a,b,c) son los inducidos por las variaciones topográficas.

3.3 Coeficientes de sensibilidad

El coeficiente de sensibilidad está dado por la expresión

$$S_i = \left\langle \phi^*, S(i) \right\rangle = \phi_1^* S_1(i) + \phi_2^* S_2(i) + P(\phi/i, \phi),$$

donde $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*)$ es el vector funcional adjunto. La primera coordenada está asociada a las alturas y la segunda a las velocidades. $S_1(i)$ y $S_2(i)$ son los términos fuentes correspondientes a la ecuación derivada (10). Los coeficientes de sensibilidad se expresan con respecto a los siguientes parámetros: coeficiente de resistencia de Chézy (c), parámetro de distribución de fondo (ip) y amplitud de la onda solitaria (amp). Su forma es

$$S_1 = \left\langle (\phi_1^*, \phi_2^*), \left(0, \frac{-2u^2}{c^3 h} \frac{u}{|u|} \right) \right\rangle + P(\phi/i, \phi) = \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= \iint \phi_2^* \frac{-2u^2}{c^3 h} \frac{u}{|u|} dx dt + P(\phi/i, \phi), \\ S_2 &= \left\langle (\phi_1^*, \phi_2^*), (0, -g) \right\rangle + P(\phi/i, \phi) = \quad (36) \\ &= \iint_{X, T} -g \frac{2x}{L^2} \phi_2^* dx dt + P(\phi/i, \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= - \int_X \phi_1^*(x=0) \frac{\partial h}{\partial p_i}(t=0) dx + \quad (37) \\ &+ \int_T - \frac{\partial h - H}{\partial p_i}(x=0) \phi_2^*(x=0) dt. \end{aligned}$$

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Solución directa

Para evaluar la solución directa mostrada en la Figura 2 consideramos la entrada de una onda solitaria a un canal abierto de 160 m de longitud. Este problema está utilizado en los trabajos^{2, 4, 14, 20}. A pesar de la longitud elegida, de las características de la resistencia de fondo y de la topografía, que son diferentes, la forma cualitativa de la propagación de la onda solitaria resulta similar. Otra alternativa es obtener la solución por medio de la metodología de "splitting", como se ve en²¹. Se puede resolver la parte lineal por medio de la metodología de "mass lumping", que es una condición inicial para el segundo semipaso temporal. La fricción (en los instantes iniciales) atenúa la onda solitaria más intensamente que en los resultados encontrados por Kawahara y sus colegas^{2, 3, 4} y Zienkiewicz y sus colegas^{14, 20}. Estos efectos responden a la longitud del canal, cuatro veces mayor que los utilizados trabajos de Zienkiewicz y sus colegas. Estas diferencias se ven influenciadas por la concavidad de la distribución de fondo cuadrática. Además de este hecho, consideramos como velocidades iniciales la condición de lago quieto diferente a las condiciones que se adoptan en la literatura previa. Como las velocidades no son importantes se pueden despreciar, como se puede ver en los trabajos previamente mencionados de Zienkiewicz y colegas. Preferimos mantener la longitud del canal igual a 160 m en la dirección opuesta de avance del flujo. La variación de fondo adoptada corresponde a (3). El sistema de ecuaciones considerado está dado por las ecuaciones (1) y (2) con todos los términos no lineales. Las condiciones de borde e iniciales son

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3} a}{2} \left(x - \frac{l}{\alpha} \right) \right), & 0 < x < 160 \text{ m} \\ u(0, t) &= 0, & 0 \leq t \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < 160 \text{ m} \\ \eta(160, t) &= 0 & 0 \leq t \end{aligned} \quad (38)$$

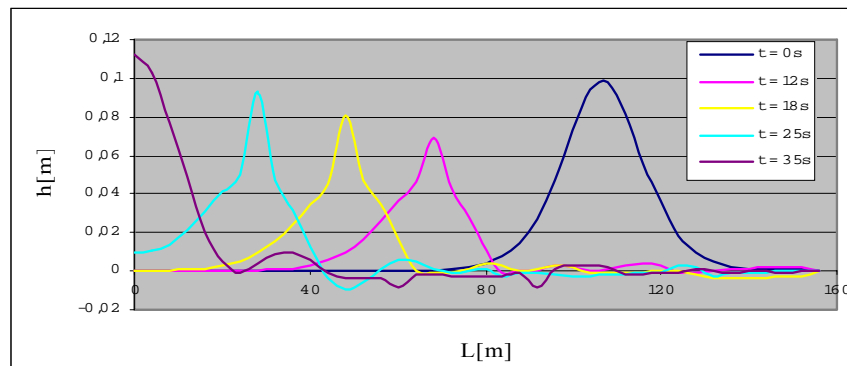


Figura 2. Solución directa

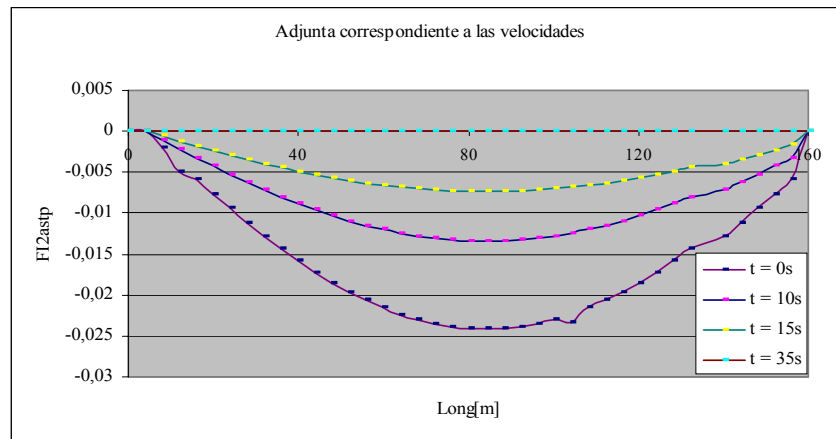


Figura 3. Solución adjunta asociado a las velocidades

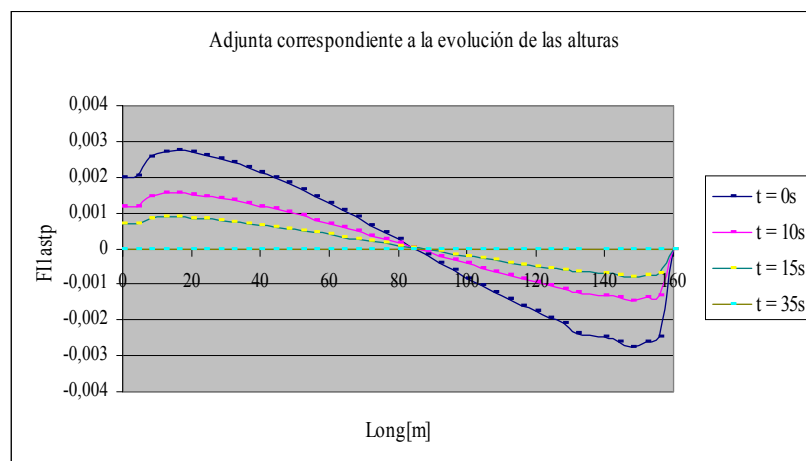


Figura 4. Solución adjunta asociado a las alturas

Tabla 1
Parámetros físicos y geométricos

Tiempo de simulación total	$T = 35,0 \text{ s}$
Longitud del canal	$L = 160,0 \text{ m}$
Coefficiente de resistencia deChézy	$c = 60,0 \text{ m}^{1/2}\cdot\text{s}^{-1}$
Amplitud de la onda solitaria	$amp = 0,1$
Longitud elemental	$\Delta x = 4,0 \text{ m}$
Incremento temporal	$\Delta t = 0,05 \text{ s}$
Coefficiente de variación de fondo	$ip = 1,0$
Aceleración de la gravedad	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Factor de estabilización	$e = 0,675$

La Figura 3 muestra que la solución adjunta que corresponde a las velocidades tiene su máximo positivo en el intervalo espacial 15 m – 25 m y tiene su punto mínimo en el intervalo espacial 120 m – 160 m. En el tiempo $t = 35$ s decae a 0. Presenta pequeños valores cerca del origen y la Figura 4 muestra la solución adjunta que corresponde a las alturas donde se puede ver el máximo (en valor absoluto) en el centro del canal (en $x = 80$ m). Se pueden observar pequeños valores de la solución adjunta cerca de $x = 0$ m.

La Figura 5 muestra la variación del funcional promedio de altura en función de la amplitud inicial de la onda solitaria. Se pueden observar pequeñas divergencias entre los valores calculados por medio de la metodología directa y la perturbativa. Podemos observar el incremento del funcional con el parámetro y una simetría entre las diferencias correspondientes a las dos curvas. En la región izquierda con respecto al punto de referencia (valores iguales a 0,1 m), estas diferencias son más pronunciadas. Esta asimetría muestra una región selecta cerca del punto de referencia para calcular el coeficiente de sensibilidad. El incremento del funcional promedio de las alturas con respecto a este parámetro es un resultado esperado de acuerdo con el principio de conservación de masa.

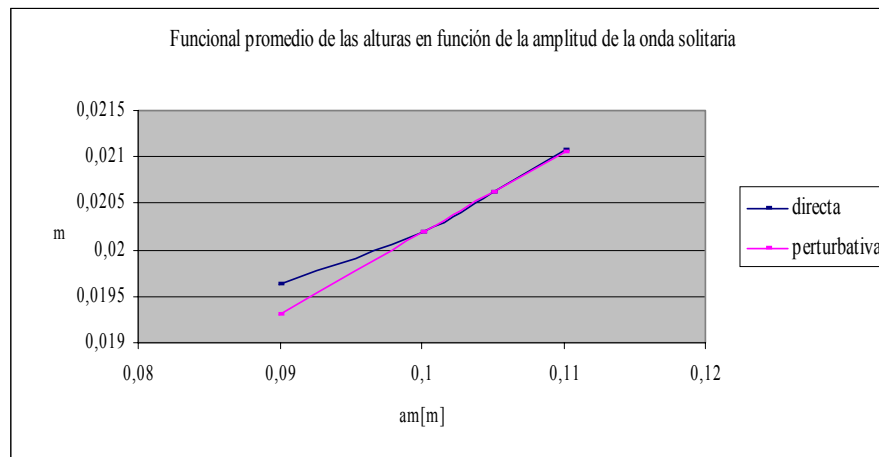


Figura 5 Funcional promedio de las alturas en función de la amplitud de la onda solitaria

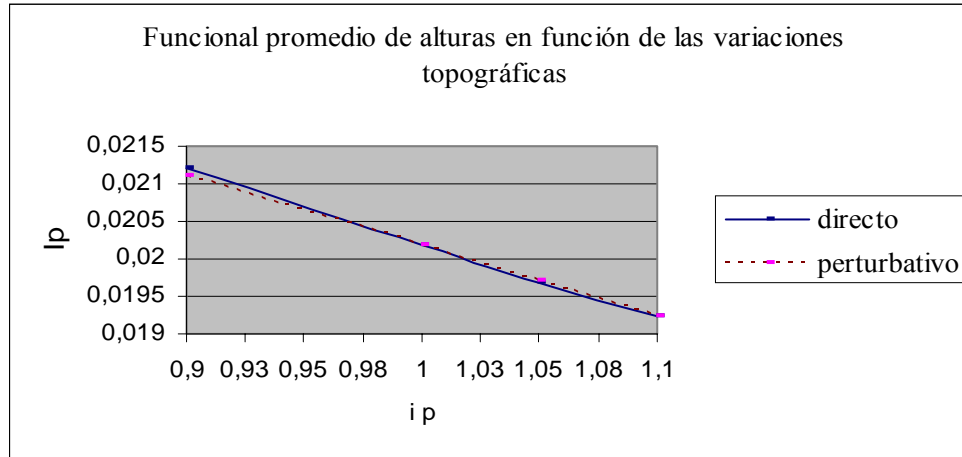


Figura 6 Funcional promedio de las alturas en función de la pendiente de fondo

La Figura 6 muestra el funcional promedio de las alturas que corresponde a la distribución cuadrática de fondo y está dado por $H(x) = ip \left(1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$. Los resultados de ambas metodologías (diferencial y directa) son similares y los resultados son coincidentes en $ip = 1$. El decaimiento característico ocurre cuando la dirección del flujo es contrario a la pendiente positiva de fondo. De acuerdo a los valores calculados y a los índices de curvatura de la función de distribución de fondo, cerca de $ip = 1,1$ se produce un punto de mínimo que significa un cambio de régimen hidrodinámico. Para valores de ip mayores que 1,1 hay una buena correspondencia entre los resultados hallados por las metodologías directa y perturbativa. Las velocidades decrecen rápidamente a 0. Se halla un punto de estancamiento para alturas muy pequeñas (asociadas).

La Tabla 2 muestra los errores en el cálculo de los coeficientes de sensibilidad correspondientes a ambos parámetros en estudio. Como estos coeficientes fueron calculados normalizándolos entonces están adimensionalizados; por consiguiente los errores pueden ser comparados. Los errores en el estudio del cálculo de sensibilidad de la amplitud de la onda solitaria son muy pequeños, y los dos parámetros son importantes para ser considerados en el estudio de sensibilidad. Los signos de los coeficientes de sensibilidad muestran concordancia con el sentido físico.

TABLA 2

Funcionales promedios y coeficientes de sensibilidades

Funcionales	Parámetros	Δp	$(\phi_m)^{dir}$	$(\phi_m)^{dif}$	$(CS)^{dir}$	$(CS)^{dif}$	Errores %
$(\phi_m)_{ref} = 0.020177$	<i>Amp</i>	5%	0,020617	0,0206167	0,436	0,436	0,053
	<i>Ip</i>	5%	0,019695	0,0197071	-0,009358	-0,009364	2,44

5 CONCLUSIONES

Aplicamos la metodología de Taylor-Galerkin para resolver la propagación de la onda solitaria (método directo). Los problemas considerados son: modelo simplificado con fondo horizontal y variación de fondo cuadrático y modelo con todos los términos no lineales y lineales y con variación de fondo cuadrático. Todos estos casos constituyen la validación de la solución directa. Estos resultados fueron comparados con resultados de los artículos^{14, 20, 21, 22} y las comparaciones fueron satisfactorias. Los funcionales estudiados presentan mayor sensibilidad con respecto al coeficiente de variación de fondo. Particularmente vemos que la distribución de fondo y su concavidad tienen una gran influencia en la distribución de la superficie libre. Además, se pudo observar la independencia del funcional promedio con respecto al coeficiente de resistencia de Chézy. Por esta razón no hicimos estudios de sensibilidad respecto a este parámetro. La metodología presentada en este trabajo para estudios de sensibilidad nos permite obtener coeficientes de sensibilidad respecto al funcional promedio sin construir la superficie de respuestas. Entonces, se resuelve una sola vez el problema de aguas poco profundas unidimensional. Concluimos que el funcional promedio de las alturas es muy sensible respecto al parámetro de distribución de fondo y respecto a la amplitud inicial de la onda solitaria. Las sensibilidades son comparables y no hay diferencias. Además, el funcional promedio de las alturas no está afectado por las variaciones de las velocidades y por ende este problema no es suficientemente bueno para estudiar las variaciones del funcional respecto al parámetro de resistencia.

Por otro lado, para continuar estudiando las sensibilidades del funcional promedio de las alturas preferimos estudiar la entrada de una onda simple al canal abierto con distribución de fondo cuadrática. Finalmente es importante destacar que el método de las perturbaciones se puede aplicar a estudios de sensibilidades en situaciones más complejas. Algunos trabajos^{5, 7, 8} son ejemplos de aplicaciones a situaciones muy sofisticadas. Nuestro propósito es continuar con estos estudios para aplicar la metodología perturbativa al problema completo de aguas poco profundas y especialmente para realizar un eficiente ajuste del modelo, que es siempre un difícil problema inverso en hidráulica fluvial y marítima.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq y a la Universidad de Buenos Aires (subsidio I050) y a la Fundación Antorchas por el apoyo financiero.

7 REFERENCIAS

- [1] J. J. Stoker, *Water waves*, Interscience, New York, (1957).
- [2] M. Kawahara, N. Takeuchi y T. Yoshida, “Two step explicit finite element method for tsunami wave propagation analysis”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **12**, 331-351 (1978).
- [3] M. Kawahara y T. Yokoyama, “Finite element method for direct runoff flow”, *Journal of Hydraulics Engineering*, **106**, 519-534 (1980).
- [4] M. Kawahara, H. Hirano y K. Tsubota, “Selective lumping finite element method for shallow water flow”, *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, **2**, 89-112 (1982).
- [5] D. G. Cacuci, “Dimensionally adaptive dynamic switching and adjoint sensitivity analysis: new features of the RELAP5/PANBOX/COBRA code system for reactor safety transients”, *Nucl. Eng. Des.*, **202**, 325-338 (2000).
- [6] D. G. Cacuci, C. F. Weber, E. M. Oblow y J. H. Marable, “Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations”, *Nuclear Science and Engineering*, **75**, 88-110 (1980).
- [7] M. Ionesco-Bujor y D. G. Cacuci, “Adjoint sensitivity analysis of the RELAP5/MODE3.2 two fluid thermal-hydraulic code systems: I. Theory”, *Nucl. Sci. Eng.*, **136**, 59-84 (2000).

- [8] M. Ionesco-Bujor y D. G. Cacuci, “Adjoint sensitivity analysis of the RELAP5/MODE3.2 two fluid thermal-hydraulic code systems: II. Application”, *Nucl. Sci. Eng.*, **136**, 85-121 (2000).
- [9] J. L. Baliño, A. E. Larreteguy, A. C. Lorenzo, A. G. Padilla y F. R. A. Lima, “The differential perturbative method applied to the sensitivity analysis for waterhammer problems in hydraulic networks”, *Applied Mathematical Modelling*, **25**, 1117-1138 (2001).
- [10] C. D. E. Burg, “A design optimization strategy for open-channel flows using discrete sensitivity analysis”, Ph. D. dissertation, Mississippi State University, Starkville, MS, (1999).
- [11] A. Fraidenraich, P. M. Jacovkis y F. R. A. Lima, “Sensitivity computations using first and second order perturbative methods for the advection-diffusion-reaction model of pollutant transport”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, **25**, 9-15 (2003).
- [12] A. Fraidenraich, P. M. Jacovkis y F. R. A. Lima, “Sensitivity computations using perturbative methods for the viscous Burgers equations”, Annals of the VII International Seminar on Recent Advances in Fluid Mechanics, Physics of Fluids and Associated Complex Systems, CD-ROM, Buenos Aires, Argentina, October 17-19, (2001).
- [13] A. Fraidenraich, P. M. Jacovkis y F. R. A. Lima, “Sensitivity Computations of the viscous kinematics wave using perturbative methods”, *International Journal of Heat and Technology (IJH & T)*, **21**, 77-85, (2003).
- [14] O. C. Zienkiewicz, J. Wu y J. A. Peraire, “New semimplicit or explicit algorithm for shallow water equations”, *Journal of Mathematical Modelling and Science Computing*, **1**, 31-49 (1993).
- [15] F. R. A. Lima, A. Gandini, A. Blanco, C. A. B. O. Lira, E. S. G. Maciel, A. C. M. Alvim, F. C. Silva, P. F. F. Melo, W. F. L. França, J. L. Baliño, A. E. Larreteguy y A. Lorenzo, “Recent advances in perturbative methods applied to nuclear and engineering problems”, *Progress in Nuclear Energy*, **33**, 23-97 (1998).
- [16] E. M. Oblow, “Sensitivity theory from a differential viewpoint”, *Nucl. Sci. Eng.*, **59**, 187-189 (1975).
- [17] F. R. A. Lima y A. C. M. Alvim, “Tempera-V2: Um Programa para Análise de Sensibilidade num Canal Refrigerante de Reatores Nucleares”, PEN-139, Programa de Engenharia Nuclear – COPPE/UFRJ, (1986).
- [18] F. R. A. Lima, “Aplicações de métodos perturbativos ao modelo multicanal COBRA IV_1 para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares”, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Brasil (1990).
- [19] D. G. Cacuci, *Sensitivity and uncertainty analysis*, Chapman & Hall/CRC, Vol. 1, (2003).

- [20] O. C. Zienkiewicz y P. A. Ortiz, "Split-characteristic finite element model with shallow water equations", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **20**, 1061-1090 (1995).
- [21] M. Patil y B. V. Rao, "Use of eigenvalue technique in finite element tidal computations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, 953-963, (1997).
- [22] N. Bemansour y L. C. Wrobel, "Numerical simulation of shallow water wave propagation using a boundary element wave equation model", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, 1-15 (1997).