

## DINÁMICA DE BARRAS GRUESAS RECTAS Y CURVAS CON PARÁMETROS VARIANDO FUNCIONALMENTE EN LA SECCIÓN

Carlos P. Filipich<sup>a,b</sup>, Claudia A. Egidi<sup>a</sup> y Marta B. Rosales<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

<sup>b</sup>*CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, cfilipich@gmail.com*

<sup>c</sup>*CONICET, Argentina, mrosales@criba.edu.ar*

**Palabras claves:** material funcional, compuestos, vigas gruesas, vibraciones naturales.

**Resumen.** Se describe y desarrolla dentro de la Resistencia de Materiales (RM) y en forma compacta, la cinemática, las ecuaciones constitutivas y los sistemas de ecuaciones de movimiento (vibración forzada) de barras gruesas rectas y curvas donde los parámetros elásticos y de densidad de las secciones varían funcionalmente. Para plantear las ecuaciones que gobiernan el movimiento de estos tipos estructurales es defensorio el conocimiento del *factor de corte*, que afecta sobremanera los coeficientes de los sistemas diferenciales.

No se incluye en el trabajo pero, puede demostrarse, apoyándose en el denominado *Teorema General*, que basta en cualquier caso resolver barras gruesas *rectas* con adecuados cambios de algunos parámetros físico-geométricos, para hallar la distribución de tensiones tangenciales sobre cada sección y con ella el factor de corte para el sistema estructural que corresponda.

Se decidió como aplicaciones calcular las primeras frecuencias naturales en tres casos. El primero se trata de una barra gruesa *recta* de sección rectangular cuyos parámetros elásticos y de densidad varían con arbitrarias leyes potenciales. El segundo ejemplo aborda la búsqueda de las frecuencias naturales de una barra gruesa *curva* de sección rectangular hueca homogénea, en tanto el tercero encuentra las frecuencias naturales de una barra gruesa *curva* de sección rectangular hueca de material “composite” de dos capas.

## 1 INTRODUCCIÓN

El presente desarrollo basado fundamentalmente en (Filipich, 1991; 2012) consiste en hallar la respuesta dinámica en su plano de piezas gruesas de ejes rectos y circunferenciales de sección transversal uniforme y con, al menos, un eje de simetría contenido en el plano del movimiento y sometidas a cargas arbitrarias variando con el espacio y con el tiempo.

Se trabaja dentro de la Resistencia de Materiales (RM) clásica, cuyas hipótesis más importantes son:

- 1) Las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza antes de la deformación, se mantienen planas durante la misma aunque no necesariamente perpendiculares al eje deformado.
- 2) Las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza antes de la deformación no cambian su forma durante la misma.
- 3) Las tensiones normales actuando sobre elementos de área con normal perpendicular al eje de la pieza son nulas.
- 4) En esta aproximación clásica, de las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio interno que garantizan el equilibrio a la translación que obtenemos de la Mecánica del Continuo, sólo apelamos a la correspondiente al sentido del eje de la pieza.

Se toman en cuenta los aportes energéticos por deformación axial, flexional y por corte así como la energía cinética de cada elemento de masa de la barra curva, por lo cual tendremos influencia en el movimiento tanto de la inercia translacional como rotatoria.

Cuando las secciones de barras rectas gruesas no son homogéneas, la definición clásica de eje neutro, como desarrollaremos, da lugar a que este eje neutro no sea baricéntrico. En cuanto a barras de gran curvatura, el eje neutro, localizado con la misma filosofía, no es baricéntrico, ni para piezas homogéneas (Belluzzi, 1965; Timoshenko y Gere, 1972), tampoco, evidentemente, para secciones no homogéneas.

Al considerar materiales no homogéneos cuyas características físicas varían funcionalmente en las secciones, el radio neutro puede ser mayor o menor que el radio baricéntrico. Particularmente conocemos que, para barras curvas de material homogéneo, el corrimiento del eje neutro se produce hacia el centro de curvatura.

Se generaliza el procedimiento de solución, abordando secciones múltiplemente conexas (con huecos) lo que, en general, dificulta las expresiones que nos dan la distribución de las tensiones tangenciales, y, consecuentemente, la determinación del factor de corte, parámetro fundamental de esta teoría. En efecto, este parámetro se encuentra a través de un enfoque energético que depende del tensor de tensiones actuante. A su vez, esta problemática está ligada fuertemente a la relación constitutiva entre el esfuerzo de corte y las relaciones cinemáticas de deformación. Esta relación constitutiva junto con la distribución de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo de corte  $Q$  y el factor de corte son algunos de los aportes destacados del presente trabajo.

Agreguemos que la propuesta constitutiva señalada se justifica teóricamente, para arribar sin argumentos retóricos ni omisiones, a la relación definitiva.

Por tratarse de una teoría lineal –deformaciones de pequeña magnitud relativa, ecuaciones constitutivas lineales, y ecuaciones de equilibrio esencialmente lineales– es muy cómodo, con energía de deformación cuadrática y homogénea, utilizar el Teorema de Hamilton para hallar el sistema diferencial de movimiento y sus correspondientes Condiciones de Borde (CB). Como se observará en su deducción se presenta un inevitable acople dinámico entre inercia flexional y axial del cual no se puede afirmar a priori que sea ni necesaria ni numéricamente despreciable. (Este acople no existe para barras rectas gruesas homogéneas (Vigas Timoshenko)).

El uso de la RM y secciones uniformes permite obtener un sistema diferencial en función de la coordenada axial a coeficientes constantes en las tres componentes básicas del campo

de desplazamientos que gobierna el movimiento de las barras gruesas, sea el material homogéneo o no el sistema formalmente siempre es el mismo; sólo deben modificarse los coeficientes que dependen de la forma de la sección y/o la calidad del material utilizado y especialmente, y de acuerdo a la distribución de tensiones tangenciales que conlleva la dependencia fundamental del factor de corte.

Debido a que el factor de corte, como señalamos, es un valor primordial en el estudio que nos ocupa al considerar el aporte energético de todos los tipos de deformación incluyendo la de corte, entendemos que conviene extendernos unas pocas líneas sobre esta problemática. No existe en la bibliografía uniformidad ni de criterios ni de valores para el factor de corte. Nuestra deducción se basa en la energía elástica complementaria de deformación, que para materiales Hookeanos y teoría clásica de deformación coincide con la energía potencial elástica almacenada por el sistema durante una deformación genérica. Desde este punto de vista hallamos para cualquier caso el factor de corte. Sin embargo ciertas discrepancias ya se presentan en barras rectas. Por ejemplo en la referencia (Timoshenko y Gere, 1972) para una sección rectangular de material homogéneo (acero) se adopta el valor  $m = 1.177$  cuando energéticamente sabemos que para igual caso obtenemos 1.2. En las referencias (Mindlin, 1951; Cowper, 1966) exclusivamente para barras curvas se presentan todavía valores distintos. En la referencia (Romanelli, 1979) se puede hallar una extensa discusión sobre el tema. La cuestión se complica aún más cuando –como veremos en los próximos ítems– el factor de corte no sólo depende de la forma de la sección, sino de la distribución de los módulos de Young y de elasticidad transversal y en barras curvas todavía del radio de curvatura de la pieza. En las referencias (Davis *et al.*, 1972; Rossi y Laura, 1989) se incluyen varias alternativas para el caso de barras curvas en el contexto de lograr coincidencia entre estados elásticos planos y la RM. Nosotros coherentemente utilizamos el encuadre energético especialmente basado en la distribución de las dos componentes de tensiones tangenciales. Evidentemente deben satisfacer condiciones de equilibrio interno y las condiciones de reciprocidad tanto en las fronteras externas como internas de una sección con huecos y/o las condiciones de continuidad entre capas de diversos materiales que conforman una sección no homogénea (en realidad siempre se trata de condiciones de reciprocidad de las tensiones tangenciales de dirección normal a la frontera). Esta búsqueda puede constituir una tarea algebraicamente engorrosa.

Todavía, alguna bibliografía (Jong-Shyong y Lieh-Kwang, 2004; Howson y Jemah, 1999; Kim y Lee, 2008), toma un factor de corte único – $m = 6/5$  ó  $m = 20/17$ – aún para secciones no homogéneas con materiales funcionalmente graduados.

Se cuenta con RM desde hace más de un siglo y medio y este enfoque para afrontar problemas de gran complejidad que en principio permiten ser abordados más o menos sencillamente y lograr una notable precisión de resultados. Una herramienta 3D daría lugar a un planteo numérico típicamente complicado y con un empleo de gran tiempo computacional. De todas maneras resolver –en esta caso barras gruesas no homogéneas– por medio de la presente teoría, permitirá siempre calibrar con relativa simplicidad las aludidas aproximaciones bi o tridimensionales. Esta propiedad de la RM de poder convalidar resultados estrictamente numéricos como los que provienen de diferencias finitas o elementos finitos, es fundamental y aumenta el sentido ingenieril y la plena actualidad de la teoría clásica de RM que nos ocupa. En el presente desarrollo nos ocupamos del cálculo de frecuencias naturales.

Sería imposible enumerar la cantidad de trabajos basados en la RM dentro de la ingeniería estructural. Este divulgado marco justifica y motiva la búsqueda de las ecuaciones generales de movimiento de barras gruesas (Filipich, 2012). No está demás aclarar que estas teorías incluyen como caso particular las ecuaciones de movimiento de la teoría de barras rectas y curvas delgadas conocidas como de Bernoulli–Euler.

Se presentan tres ejemplos: Vibraciones naturales de barras gruesas rectas de sección rectangular con parámetros funcionalmente graduados con una ley potencial. varias condiciones de vínculo y diversas relaciones de altura; vibraciones naturales de barras gruesas curvas de sección rectangular hueca homogénea de espesor constante en ménsula y con varias relaciones de curvatura y de espesor y vibraciones naturales de barras gruesas curvas en ménsula de sección rectangular hueca con dos capas (*Acero–Cerámica*) y con varias relaciones de curvatura. En todos los casos, se hallan las frecuencias naturales que dependen de la distribución de las tensiones tangenciales y con ésta del factor de corte. Está previsto que durante la presentación en este Congreso se reporten, en los casos posibles, comparaciones con resultados obtenidos a partir de modelos de elementos finitos.

## 2 PRESENTACIÓN DE LOS MODELOS. PLANTEO GENERAL

### 2.1 Hipótesis, definiciones y propiedades.

En la [Figura 1](#) se muestran elementos estructurales genéricos. Dos puntos especiales deben tenerse en cuenta: el centroide  $G$  (baricentro geométrico) y el punto  $D$  por donde pasará el eje neutro  $z$  una vez definida la condición correspondiente para su ubicación. La coordenada  $y_G$  se mide desde  $G$  sobre el eje de simetría. La sección en general múltiplemente conexas, tiene al menos un eje de simetría que coincide con el plano de movimiento. Las fronteras ( $\mathcal{C}$ ):  $z = F(y_G)$  que encierran al dominio de interés y/o a los huecos, deben estar definidas por funciones aunque no necesariamente biyectivas ni analíticas.

Trabajaremos dentro de la RM. Las inhomogeneidades consideradas en este trabajo sólo se presentan en cada sección plana transversal pero son invariables con la coordenada espacial.

Entonces si  $E = E(y_G, z)$ ,  $G = G(y_G, z)$  y  $\rho = \rho(y_G, z)$  son respectivamente el módulo elástico o de Young, el módulo de elasticidad transversal o de corte y la densidad, imponemos que

$$\begin{aligned} E &= E(y_G, z) = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) & (a) \\ G &= G(y_G, z) = G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) & (b) \\ \rho &= \rho(y_G, z) = \rho_0 \cdot \varphi_3(y_G, z) & (c) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $E_0$ ,  $G_0$  y  $\rho_0$  valores arbitrarios de referencia. Por la simetría adoptada se verifica que

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G, -z); \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

Observemos adicionalmente que las funciones  $\varphi_j(y_G, z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) no son necesariamente analíticas.

En el presente trabajo, de acá en adelante las abreviaturas BGR y BGC corresponderán respectivamente a barras gruesas rectas y barras gruesas curvas.

El campo de desplazamientos (componentes del vector desplazamiento) adoptado para un punto genérico  $P$  de la barra curva gruesa recta o curva respectivamente será ([Filipich, 1991](#)):

BGR	BGC
$u_P = \underline{u}(x, y_G, t) = u(x, t) + \theta(x, t) \cdot y$	$u_P = \underline{u}(\alpha, y_G, t) = u(\alpha, t) + \theta(\alpha, t) \cdot (R - r) \quad (a)$
$v_P = \underline{v}(x, y_G, t) = v(x, t)$	$v_P = \underline{v}(\alpha, y_G, t) = v(\alpha, t) \quad (b) \quad (3)$
$w_P = \underline{w}(x, y_G, t) = 0$	$w_P = \underline{w}(\alpha, y_G, t) = 0 \quad (c)$

Por  $t$  indicamos la coordenada temporal y a su vez como  $u = u(\cdot, t)$  al desplazamiento axial en  $D$ , como  $v = v(\cdot, t)$  al desplazamiento transversal en sentido de  $y$  en  $D$  (en realidad por hipótesis 2 de la Introducción es único para toda la sección) y  $\theta = \theta(\cdot, t)$  al giro flexional alrededor del eje  $z$  pasante por  $D$  que en general no coincidirá con el giro del eje. Por hipótesis el desplazamiento  $w$  en sentido de  $z$  en nulo. O sea estamos considerando aportes axiales, flexionales y por corte.

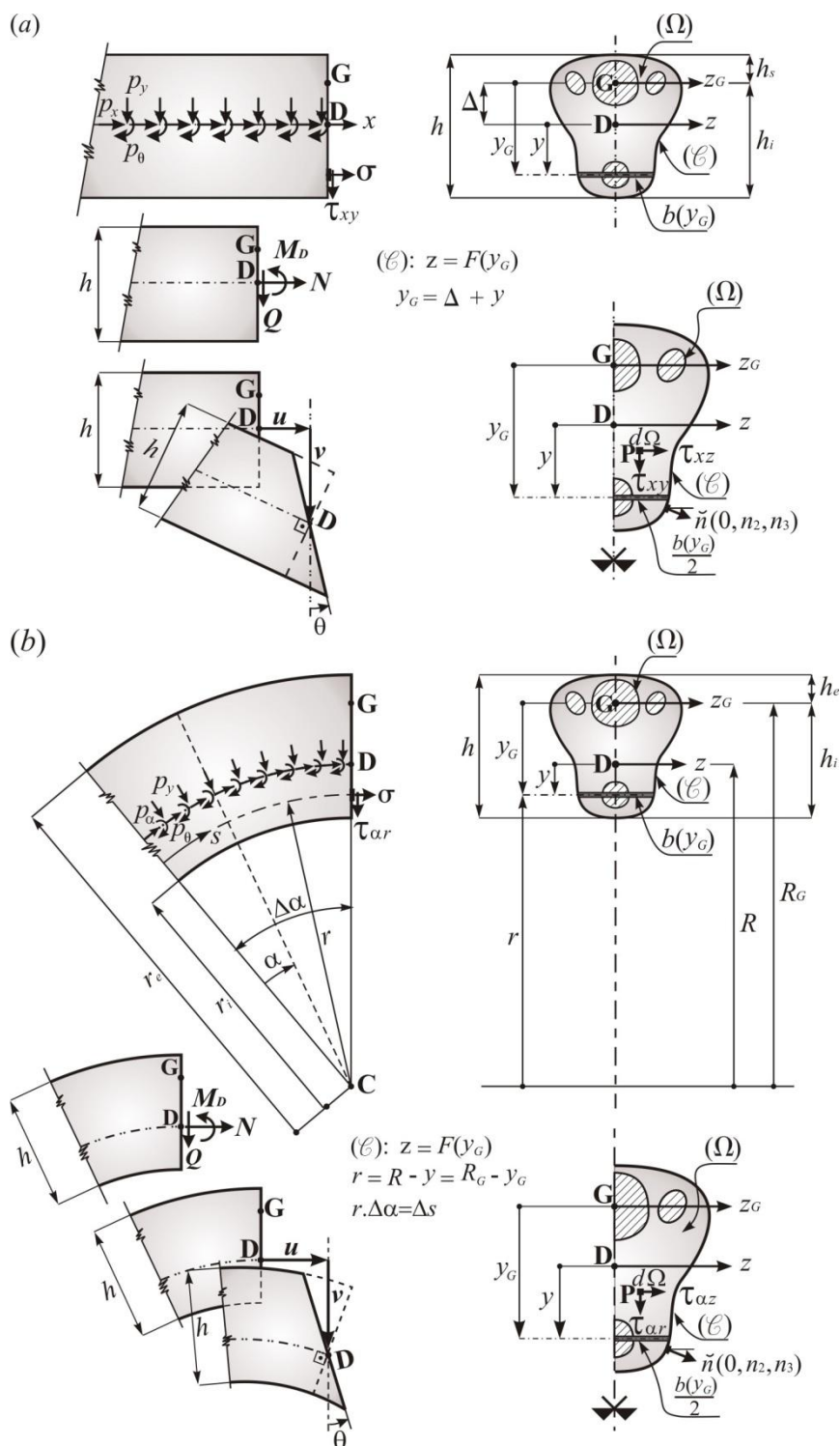


Figura 1: (a) Barras gruesas rectas (b) Barras gruesas curvas

Entonces, dentro de la RM, las únicas componentes del tensor lineal de deformación en coordenadas rectangulares y polares calculadas a través de las relaciones cinemáticas valen para el punto típico  $P$ :

BGR	BGC
$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x}$	$\varepsilon = \varepsilon_\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_P}{\partial \alpha} - \frac{v_P}{r}$ (a)
$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x}$	$\gamma = \gamma_{\alpha r} = \gamma_{r\alpha} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_P}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_P}{\partial r} + \frac{u_P}{r}$ (b) (4)
$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w_P}{\partial z}$	$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{z\alpha} = \frac{\partial w_P}{\partial z}$ (c)

De acuerdo a las expresiones (3) e introduciendo el acento para indicar derivadas respecto de la variable espacial tendremos que:

BGR	BGC
$\varepsilon = u' + y \cdot \theta'$	$\varepsilon = \frac{1}{r} \cdot [u' - v + \theta' \cdot (R - r)]$ (a)
$\gamma = \theta + v'$	$\gamma = \frac{1}{r} \cdot [u + v' + R\theta]$ (b) (5)
$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$	$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{z\alpha} = 0$ (c)

La convención de signos adoptada es la siguiente:  $\varepsilon > 0$  cuando las fibras se alargan y  $\gamma > 0$  cuando el ángulo entre las fibras radial y tangencial se incrementa (esto es debido a la convención de signo adoptada para  $\theta$ ).

De acuerdo a la Ley de Hooke al aceptarse por hipótesis que  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son nulas, las componentes de tensión valdrían:

$$\begin{aligned} \sigma &= E(y_G, z) \cdot \varepsilon = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) \cdot \varepsilon \quad (a) \\ \tau &= G(y_G, z) \cdot \gamma = G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) \cdot \gamma \quad (b) \end{aligned} \quad (6)$$

Como sabemos la expresión constitutiva (6b) no se considera dentro de la aproximación que nos ocupa. Por ahora tampoco tenemos forma de hallar  $\tau_{,z}$  que en general no es nula. Su expresión surgirá del planteo del equilibrio interno en sentido axial.

La convención que aceptamos para las tensiones tangenciales son positivas cuando actuando sobre un elemento de área de la sección con normal saliente positiva (coordenada espacial creciente), tienen respectivamente las direcciones de las coordenadas  $y$  y  $z$ . En cuanto a la tensión normal  $\sigma$  es positiva cuando actuando sobre un elemento de área de la sección con normal saliente positiva tiene igual dirección (tracción).

## 2.2 Esfuerzo Axial y Momento Flector. Ubicación del origen $yz$

Para simplificar el proceso algebraico es conveniente ubicar el eje neutro  $z$  que pasa por el punto  $D$  bajo una clásica condición que indicamos a continuación.

Sean  $N$  y  $M_D$  el esfuerzo axial y el momento flector reducido al eje neutro definidos como:

$$N = \iint_{\Omega} \sigma \, d\Omega \quad ; \quad M_D = \iint_{\Omega} \sigma \cdot y \, d\Omega \quad (7)$$

siendo  $\Omega$  el área de la sección y  $d\Omega$  un elemento de área que vale:

$$d\Omega = dy \, dz = dy_G \, dz = b(y_G) \, dy_G \quad (8)$$

Introducimos

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ \alpha_j^\infty \equiv \int_{-h_s}^{h_i} \lambda(y_G) \cdot y^j dy_G \quad (j=0,1,2) \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ \alpha_j^R \equiv \int_{-h_e}^{h_i} \frac{\lambda(y_G) \cdot y^j}{R_G - y_G} dy_G \quad (j=0,1,2) \end{array} \quad (9)$$

donde definimos “ancho material” como:

$$\lambda(y_G) \equiv \lambda^R(y_G) \equiv \lambda^\infty(y_G) \equiv \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \varphi_1(y_G, z) dz \quad (10)$$

Siendo por definición  $\lambda(y_G) > 0$  se verifica que  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_2 > 0$ .

Si el material tiene Módulo de Young homogéneo, entonces  $\varphi_1(y_G, z) = 1$  y  $\lambda(y_G) = b(y_G)$

Las expresiones (7) se reescriben como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ N = E_0(\alpha_0^\infty u' + \alpha_1^\infty \theta') \\ M_D = E_0(\alpha_1^\infty u' + \alpha_2^\infty \theta') \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ N = E_0[\alpha_0^R(u' - v) + \alpha_1^R \theta'] \\ M_D = E_0[\alpha_1^R(u' - v) + \alpha_2^R \theta'] \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (11)$$

Para  $N \neq 0$  y  $M_D \neq 0$  el eje paralelo al  $z$  donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  pasa a una distancia  $y = a$  del eje  $z$  que vale como puede inferirse de (5a):

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ a = -\frac{u'}{\theta'} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ a = -\frac{u' - v}{\theta'} \end{array} \quad (12)$$

o todavía por (11) como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ a = \frac{\alpha_2^\infty N - \alpha_1^\infty M_D}{\alpha_1^\infty N - \alpha_0^\infty M_D} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ a = \frac{\alpha_2^R N - \alpha_1^R M_D}{\alpha_1^R N - \alpha_0^R M_D} \end{array} \quad (13)$$

Hemos definido el eje neutro general para el caso de flexión compuesta. Es tradicional, sin embargo (recordar la definición para barras rectas), denominar al eje neutro como aquel eje  $z$  donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  cuando  $N = 0$ . Fijamos entonces el origen  $D$  bajo la condición siguiente:

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad N = 0 \quad (14)$$

Por (13) deducimos que debe ser

$$\alpha_1^\infty = \alpha_1^R = 0 \quad (15)$$

Cabe destacar que la condición (15) es una extensión natural de la teoría de barras rectas homogéneas (en cuyo caso el eje neutro es baricéntrico y el momento estático de los elementos de área de la sección respecto de dicho eje es nulo).

Observemos que debido a (15):

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ \Delta = \frac{\int_{-h_s}^{h_i} \lambda(y_G) \cdot y_G dy_G}{\alpha_0^\infty} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ R = \frac{\alpha_0^\infty}{\alpha_0^R} \end{array} \quad (16)$$

$\Delta$  y  $R_G - R$  determinan genéricamente el corrimiento del eje neutro respecto del baricéntrico

( $R$  se denomina “radio neutro”) (ver Figura 1).

Introducimos los coeficientes siguientes:

$$A^R = R\alpha_0^R = \alpha_0^\infty = A^\infty ; J^\infty = \alpha_2^\infty ; J^R = R\alpha_2^R \quad (17)$$

Denominamos a  $A^R = A^\infty$  como área material y a  $J^\infty$  y a  $J^R$  como momentos materiales de inercia de la sección correspondiente de una barra gruesa. De esta manera hemos obtenido las expresiones constitutivas de  $N$  y  $M_D$  (ver exp. (11), (15) y (17)):

<p style="text-align: center;">BGR</p> $N = E_0 A^\infty u'$ $M_D = E_0 J^\infty \theta'$	<p style="text-align: center;">BGC</p> $N = \frac{E_0 A^R}{R} (u' - v)$ $M_D = \frac{E_0 J^R}{R} \theta'$	<p>(a)</p> <p>(b) (18)</p>
---	---	----------------------------

y entonces, por (6a) y (18) escribimos que:

<p style="text-align: center;">BGR</p> $\sigma = \varphi_1(y_G, z) \cdot \left( \frac{N}{A^\infty} + \frac{M_D}{J^\infty} y \right)$	<p style="text-align: center;">BGC</p> $\sigma = \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{R}{r} \cdot \left( \frac{N}{A^R} + \frac{M_D}{J^R} y \right)$	<p>(19)</p>
--	--	-------------

con claras similitudes con la expresión clásica de  $\sigma$  para barras rectas homogéneas.

### 2.3 Expresión del Esfuerzo de Corte. Energía de Deformación. Factor de Corte.

Como dijimos la expresión (6b) no se utiliza porque no satisface las condiciones de equilibrio local ni la compatibilidad de deformación pues proviene de una fuerte hipótesis (aunque muy buena) de la RM, y que es la imposición del mantenimiento de secciones planas durante la deformación. Recurrimos entonces a buscar las expresiones de las componentes  $\tau$  ( $\tau_z$  desde ya no aparece siquiera constitutivamente) del tensor de tensiones, por medio de la ecuación de equilibrio interno en sentido del eje. Esta vía nos conducirá, además, a hallar la expresión constitutiva del esfuerzo de corte  $Q \equiv Q_y$ .

En la teoría de barras rectas homogéneas y en la bibliografía clásica, las tensiones tangenciales similares se encuentran por la fórmulas conocidas como de Collignon o de Jouravsky.

Las ecuaciones de equilibrio interno en ausencia de fuerzas de volumen valen:

<p style="text-align: center;">BGR</p> $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \sigma' = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \sigma' = 0$	<p style="text-align: center;">BGC</p> $r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} + \sigma' = 0$	<p>(20)</p>
--	--	-------------

De estática básica, en ausencia de fuerzas aplicadas, conocemos las expresiones de equilibrio entre esfuerzos característicos:

<p style="text-align: center;">BGR</p> $N' = 0$ $Q' = 0$ $M_D' - Q = 0$	<p style="text-align: center;">BGC</p> $Q' + N = 0 ; \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} = 0 \quad (a)$ $N' - Q = 0 ; \frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} = 0 \quad (b)$ $M_D' - RQ = 0 ; \frac{dM_D}{ds} - Q = 0 \quad (c)$	<p>(21)</p>
---	--	-------------



De esta forma, las derivadas de las expresiones (19) que intervienen en (20) son:

<p>BGR</p> $\sigma' = \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J^\infty} y$		<p>BGC</p> $\sigma' = \varphi_1(y_G, z) \cdot \left(\frac{U}{r} + V\right) \cdot Q \quad (a)$ $V \equiv -\frac{R^2}{J^R} \quad (b)$ $U = -V \left(R + \frac{J^R}{A^R R}\right) (= -V(R_G - \Delta)) \quad (c)$
---	--	--

Vemos que para barras curvas  $U$  depende de  $\Delta$  que proviene de la teoría de barras gruesas rectas; entonces las ecuaciones de equilibrio (20) valdrán:

<p>BGR</p> $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J^\infty} y =$ $= \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J^\infty} (\Delta - y_G)$		<p>BGC</p> $r \cdot \left(\frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z}\right) - 2\tau_{\alpha r} =$ $= -\varphi_1(y_G, z) \cdot \left(\frac{U}{r} + V\right) \cdot Q \quad (23)$
--	--	---

Ahora bien la solución de las ecuaciones diferenciales (23) es en general teóricamente imposible. Baste pensar que tenemos dos funciones incógnitas y una sola ecuación diferencial a derivadas parciales. Para ciertas  $\varphi_1(y_G, z)$  y algunos dominios de integración, será posible hallar una solución viable. Es decir aceptando que la misma existe y es única, hallando una solución de prueba sin constantes libres que verifique (23) y las condiciones de borde, podremos asegurar que es la solución buscada.

Para secciones simples o múltiplemente conexas con materiales funcionales, alguna de las cuales resolveremos, el problema puede no ser directo; la intuición juega un papel determinante y la prueba y error permitirá posiblemente hallar la solución buscada para las tensiones tangenciales.

Por el momento supongamos que conocemos las expresiones de  $\tau$  que satisfacen (23) con sus CB para la sección y la  $\varphi_1(y_G, z)$  asumidas que expresamos como:

<p>BGR</p> $\tau_{xy} = f(y_G, z) \cdot Q$ $\tau_{xz} = g(y_G, z) \cdot Q$		<p>BGC</p> $\tau_{\alpha r} = f(y_G, z) \cdot Q \quad (a)$ $\tau_{\alpha z} = g(y_G, z) \cdot Q \quad (b)$
--	--	--

La finalidad del presente desarrollo consiste en hallar las expresiones de  $f(y_G, z)$  y  $g(y_G, z)$  para cada tipo de barra. Con ellas conocidas el problema está resuelto. Digamos que las  $\tau$  satisfacen la ecuación diferencial de equilibrio (23) y las condiciones de reciprocidad sobre los contornos externos, internos (y aún sobre los comunes cuando por ejemplo  $E(y_G, z)$  varía “a saltos”). Denominando genéricamente como  $\tau_{\bullet n}$  a la tensión tangencial de dirección coincidente con el versor normal a cada contorno, será:

$$\tau_{\bullet n}|_{(\mathcal{E})} = \tau_{\bullet n}|_{(\mathcal{E}_1)} = \tau_{\bullet n}|_{(\mathcal{E}_2)} = \dots = 0 \quad (25)$$

Debido al carácter tensorial del campo tensional se cumple que:

<p>BGR</p> $\tau_n _{(\mathcal{E})} = \tau_{xy} \cdot n_2 + \tau_{xz} \cdot n_3 _{(\mathcal{E})} = \dots = 0$		<p>BGC</p> $\tau_{\alpha n} _{(\mathcal{E})} = \tau_{\alpha r} \cdot n_2 + \tau_{\alpha z} \cdot n_3 _{(\mathcal{E})} = \dots = 0 \quad (26)$
---	--	---

donde  $\tilde{n}$  es el versor normal saliente en cada frontera de componentes  $(0, n_2, n_3)$  según las

coordenadas  $(\cdot, y_G, z)$ . De esta manera se cumple

$$\iint_{\Omega} f(y_G, z) d\Omega = 1 \quad (27)$$

Como por cuestiones de simetría

$$\tau_{\cdot z}(y_G, z) = -\tau_{\cdot z}(y_G, -z) \quad (28)$$

idénticamente se verifica también que:

$$\iint_{\Omega} g(y_G, z) d\Omega = 0 \quad (29)$$

Para hallar la expresión del esfuerzo de corte  $Q$  en función de  $u, v$  y  $\theta$  y sus derivadas y el factor de corte  $m$ , planteamos la energía complementaria clásica de deformación elástica lineal (Timoshenko y Goodier, 1934) (como sabemos coincide con la energía potencial elástica almacenada durante la deformación).

$$\text{BGR} \quad 2W = \iiint \frac{\sigma^2}{E(y_G, z)} d\mathcal{V} + \iiint \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{G(y_G, z)} d\mathcal{V} \quad (30)$$

$$\text{BGC} \quad 2W = \iiint \frac{\sigma^2}{E(y_G, z)} d\mathcal{V} + \iiint \frac{\tau_{\alpha r}^2 + \tau_{\alpha z}^2}{G(y_G, z)} d\mathcal{V}$$

Recordando las expresiones (1) donde  $\varphi_1(y_G, z)$  y  $\varphi_2(y_G, z)$  son independientemente arbitrarias, las definiciones (9) y la condición dada por (15), la expresión (30) se escribe:

$$2W = \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^\infty} + \frac{M_D^2}{E_0 J^\infty} + \frac{m Q^2}{G_0 A^\infty} \right) dx \quad \left| \quad 2W = R \cdot \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^R} + \frac{M_D^2}{E_0 J^R} + \frac{m Q^2}{G_0 A^R} \right) d\alpha \quad (31)$$

$$d\mathcal{V} = dx d\Omega \quad \left| \quad d\mathcal{V} = r d\alpha d\Omega$$

donde el factor de corte  $m$ , esencialmente positivo, se define como:

$$m \equiv A^\infty \iint_{\Omega} \frac{[f^2(y_G, z) + g^2(y_G, z)]}{\varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad \left| \quad m \equiv \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} \frac{[f^2(y_G, z) + g^2(y_G, z)] \cdot r}{\varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad (32)$$

Obsérvese la dependencia en el factor de corte de la variación funcional en la sección del módulo de elasticidad transversal y por supuesto de las tensiones tangenciales.

Por otra parte para encontrar una relación constitutiva para  $Q$  expresamos la energía  $W$ , como la clásica definición de trabajo de deformación es decir:

$$2W = \iiint (\sigma \cdot \varepsilon + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) d\mathcal{V} \quad \left| \quad 2W = \iiint (\sigma \cdot \varepsilon + \tau_{\alpha r} \cdot \gamma_{\alpha r} + \tau_{\alpha z} \cdot \gamma_{\alpha z}) d\mathcal{V} \quad (33)$$

Cabe consignar que por razones de sencillez no se ha incluido la energía de deformación que pueden almacenar eventuales vinculaciones elásticas a tierra en los extremos de la pieza.

Teniendo en cuenta, entonces, las expresiones previas y recordando que  $\gamma_{\cdot z} \equiv 0$  por hipótesis, podemos escribir que:

$$\begin{aligned}
 \text{BGR} \quad 2W &= \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^\infty} + \frac{M_D^2}{E_0 J^\infty} \right) dx + \iiint \tau_{xy} \cdot \gamma dV \\
 \text{BGC} \quad 2W &= R \cdot \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^R} + \frac{M_D^2}{E_0 J^R} \right) d\alpha + \iiint \tau_{\alpha r} \cdot \gamma_{\alpha r} dV
 \end{aligned} \tag{34}$$

Comparando la (34) con (31) observamos que deberá cumplirse que:

$$\begin{array}{c|c}
 \text{BGR} & \text{BGC} \\
 \frac{m}{G_0 A^\infty} \int Q^2 dx = \iiint \tau_{xy} \cdot \gamma dx d\Omega & \frac{mR}{G_0 A^R} \int Q^2 d\alpha = \iiint \tau_{\alpha r} \cdot \gamma \cdot r d\alpha d\Omega
 \end{array} \tag{35}$$

Recordando la expresión de la resultante  $Q$  y las (5b) se deduce que:

$$\begin{array}{c|c}
 \text{BGR} & \text{BGC} \\
 \frac{m}{G_0 A^\infty} Q^2 = Q(v'+\theta) & \frac{mR}{G_0 A^R} Q^2 = Q(u+v'+R\theta)
 \end{array} \tag{36}$$

o sea

$$\begin{array}{c|c}
 \text{BGR} & \text{BGC} \\
 Q = \frac{G_0 A^\infty}{m} (v'+\theta) & Q = \frac{G_0 A^R}{mR} (u+v'+R\theta)
 \end{array} \tag{37}$$

Esta conclusión (37) junto con las expresiones (18) nos dan las ecuaciones constitutivas que relacionan los esfuerzos característicos globales con el campo de desplazamientos y sus derivadas espaciales en cada sección de una barra gruesa durante su movimiento plano. Todo ello debidamente justificado y dentro del marco de la indudablemente útil teoría de RM. Debe destacarse que la expresión (37) para barras gruesas rectas coincide formalmente con la tradicionalmente adoptada para barras gruesas rectas homogéneas que se conoce como teoría de vigas Timoshenko.

### 2.4 Sistemas diferenciales de Movimiento y sus C.B.

Conocemos la expresión general de energía de deformación  $W$  (expresión (31)) y reemplazando respectivamente  $N$ ,  $M_D$  y  $Q$  por las expresiones (18) y (37), encontramos que para:

$$\begin{aligned}
 \text{BGR} \quad 2W &= \int [E_0 (A^\infty u'^2 + J^\infty \theta'^2) + \frac{G_0 A^\infty}{m} (\theta + v')^2] dx \\
 \text{BGC} \quad 2W &= \frac{1}{R} \cdot \int_{(\alpha)} \left\{ E_0 [A^R (u' - v)^2 + J^R \theta'^2] + \frac{G_0 A^R}{m} (u + v' + R\theta)^2 \right\} d\alpha
 \end{aligned} \tag{38}$$

Bastará plantear la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $P$  debida al cambio de posición de las cargas aplicadas durante el movimiento, para, por ejemplo, a través del Teorema de Hamilton (Fung, 1968) hallar el sistema diferencial de movimiento plano de los esquemas estructurales que nos ocupan. De acuerdo, entonces, al campo de desplazamientos (3) y donde  $\dot{(\cdot)} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$  tendremos:

$$2K = \iiint (\dot{u}_p^2 + \dot{v}_p^2 + \dot{w}_p^2) \rho(y_G, z) dV \tag{39}$$

Considerando las definiciones dadas por las expresiones (1) y (3)  $K$  valdrá:

$$2K = \rho_0 \iiint [(\dot{u} + \dot{\theta} y)^2 + \dot{v}^2] \varphi_3(y_G, z) d\mathcal{V} \quad (40)$$

Es práctico introducir los siguientes coeficientes:

$$\beta_j^\infty \equiv \int_{-h_s}^{h_i} \mu^\infty(y_G) \cdot y^j d y_G \quad (j=0,1,2) \quad \text{BGR} \quad \left| \quad \beta_j^R \equiv \int_{-h_e}^{h_i} r \cdot \mu^R(y_G) \cdot y^j d y_G \quad (j=0,1,2) \quad \text{BGC} \quad (41)$$

donde

$$\mu(y_G) = \mu^\infty(y_G) = \mu^R(y_G) = \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \varphi_3(y_G, z) dz \quad (42)$$

Observemos que  $\beta_0$  y  $\beta_2$  son esencialmente positivos.

Reescribimos, entonces, las expresiones (40) como:

$$\text{BGR} \quad 2K = \rho_0 \int [\beta_0^\infty (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2\beta_1^\infty \dot{u}\dot{\theta} + \beta_2^\infty \dot{\theta}^2] dx \quad (43)$$

$$\text{BGC} \quad 2K = \rho_0 \int_{(\alpha)} [\beta_0^R (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2\beta_1^R \dot{u}\dot{\theta} + \beta_2^R \dot{\theta}^2] d\alpha$$

Por otro lado definimos la energía de posición o potencial de las cargas aplicadas  $P$  como: (ver Figura 1)

$$P = -\int (p_x u + p_y v + p_\theta \theta) dx \quad \text{BGR} \quad \left| \quad P = -R \cdot \int_{(\alpha)} (p_\alpha u + p_y v + p_\theta \theta) d\alpha \quad \text{BGC} \quad (44)$$

Aplicando por ejemplo los pasos convencionales requeridos por el Teorema de Hamilton, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, a coeficientes constantes en función de los tres desplazamientos espacio-temporales, que gobiernan el movimiento de las barras gruesas en sentido  $u$ ,  $v$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \text{BGR} \quad C_{11}^\infty u'' - (D_{11}^\infty \ddot{u} + D_{22}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_x \\ C_{33}^\infty v'' + C_{33}^\infty \theta' - D_{11}^\infty \ddot{v} &= -p_y \\ C_{22}^\infty \theta'' - C_{33}^\infty (v' + \theta) - (D_{22}^\infty \ddot{u} + D_{33}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_\theta \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{BGC} \quad C_{11}^R u'' - (C_{11}^R + C_{33}^R) v' - C_{33}^R (u + R\theta) - (D_{11}^R \ddot{u} + D_{22}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\alpha \\ C_{33}^R v'' + (C_{11}^R + C_{33}^R) u' - C_{11}^R v + R \cdot C_{33}^R \theta' - D_{11}^R \ddot{v} &= -R \cdot p_y \\ C_{22}^R \theta'' - R \cdot C_{33}^R (u + v' + R\theta) - (D_{22}^R \ddot{u} + D_{33}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\theta \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_{11}^\infty &\equiv E_0 \alpha_0^\infty ; \quad C_{22}^\infty \equiv E_0 \alpha_2^\infty ; \quad C_{33}^\infty \equiv \frac{G_0 \alpha_0^\infty}{m} \\ D_{11}^\infty &\equiv \rho_0 \beta_0^\infty ; \quad D_{22}^\infty \equiv \rho_0 \beta_1^\infty ; \quad D_{33}^\infty \equiv \rho_0 \beta_2^\infty \\ C_{11}^R &\equiv E_0 \alpha_0^R ; \quad C_{22}^R \equiv E_0 \alpha_2^R ; \quad C_{33}^R \equiv \frac{G_0 \alpha_0^R}{m} \\ D_{11}^R &\equiv \rho_0 \beta_0^R ; \quad D_{22}^R \equiv \rho_0 \beta_1^R ; \quad D_{33}^R \equiv \rho_0 \beta_2^R \end{aligned} \quad (46)$$

Los sistemas (45) son los mismos para cualquier tipo de sección simétrica, simple o múltiplemente conexas, no homogénea y coinciden formalmente con el reportado en la referencia (Filipich, 1991) para el caso de materiales homogéneos ( $\varphi_j(y_G, z) = 1, j = 1, 2, 3$ ). Es importante observar que a través de  $\beta_1 (\Rightarrow D_{22})$  se produce una acople dinámico flexo-axial que en realidad también se da para el caso de las barras gruesas curvas con material homogéneo, pero desaparece en las barras gruesas rectas homogéneas (vigas Timoshenko).

Sin cargas aplicadas ni efectos inerciales las (45) coinciden con las ecuaciones de equilibrio estático entre esfuerzos característicos.

Pasemos ahora a expresar las CB que para todo  $t$ , surgen de la integración por partes durante la aplicación del método de Hamilton. Son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{BGR} \quad & \left| C_{11}^\infty u' \mathcal{F} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| C_{33}^\infty (v' + \theta) \mathcal{G} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| C_{22}^\infty \theta' \mathcal{H} \right|_{x_0}^{x_L} = 0 \\
 \text{BGC} \quad & \left| C_{11}^R (u' - v) \mathcal{F} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| C_{33}^R (u + v' + R \cdot \theta) \mathcal{G} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| C_{22}^R \theta' \mathcal{H} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} = 0
 \end{aligned} \tag{47}$$

Denominamos como  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$  respectivamente a las variaciones admisibles de los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $\theta$  cuando aplicamos el Cálculo de Variaciones. Las CB (47), se plantean en los extremos de la barra. Recordemos, además, que si la vinculación a tierra de la pieza exige que  $u$  y/o  $v$  y/o  $\theta$  sean nulos o impuestos en el punto  $D$ , correspondientemente lo serán  $\mathcal{F}$  y/o  $\mathcal{G}$  y/o  $\mathcal{H}$ . Sin embargo es importante hacer notar que en no todos los casos las variaciones admisibles  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , son independientes entre sí; dependiendo del tipo de vinculación, o en el caso de emplear vínculos elásticos, tendríamos una combinación de las variaciones. De esto, entonces, que genéricamente las CB las presentamos como una suma de trabajos virtuales que debe anularse en los extremos de la barra (por ejemplo ver (Filipich y Piovan, 2010)). En el Ejemplo 1 se analiza un tipo especial de vínculo donde las variaciones admisibles no son independientes.

### 2.5 Vibraciones Naturales de Barras Gruesas.

Aceptamos modos armónicos de vibración para el sistema, o sea:

$$\left. \begin{array}{l} \text{BGR} \\ \{u, v, \theta\}(x, t) = \{u, v, \theta\}(x) e^{j\omega t} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{BGC} \\ \{u, v, \theta\}(\alpha, t) = \{u, v, \theta\}(\alpha) e^{j\omega t} \end{array} \tag{48}$$

se trata de una separación clásica de variables.

$\omega$  es la frecuencia circular (radianes/segundo) y  $j \equiv \sqrt{-1}$ . Reemplazando esta propuesta en los sistemas diferenciales (45) sin cargas aplicadas se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{BGR} \quad & C_{11}^\infty u'' + \omega^2 (D_{11}^\infty u + D_{22}^\infty \theta) = 0 \\
 & -C_{33}^\infty v'' - C_{33}^\infty \theta' - \omega^2 D_{11}^\infty v = 0 \\
 & C_{22}^\infty \theta'' - C_{33}^\infty (v' + \theta) + \omega^2 (D_{22}^\infty u + D_{33}^\infty \theta) = 0 \\
 \text{BGC} \quad & C_{11}^R u'' - (C_{11}^R + C_{33}^R) v' - C_{33}^R (u + R\theta) + \omega^2 (D_{11}^R u + D_{22}^R \theta) = 0 \\
 & -C_{33}^R v'' - (C_{11}^R + C_{33}^R) u' + C_{11}^R v - R \cdot C_{33}^R \theta' - \omega^2 D_{11}^R v = 0 \\
 & C_{22}^R \theta'' - R \cdot C_{33}^R (u + v' + R \cdot \theta) + \omega^2 (D_{22}^R u + D_{33}^R \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

En estos sistemas  $u$ ,  $v$  y  $\theta$  son sólo funciones de la coordenada espacial, independientes del tiempo.

Se trata de un sistema diferencial ordinario en dicha coordenada, lineal a coeficientes constantes, que con CB nulas da lugar a un típico problema de valores propios. Los autovalores son las frecuencias naturales circulares  $\omega_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Se hallan planteando en (49) imponiendo una propuesta exponencial clásica y las CB (47):

$$\begin{aligned} \text{BGR} \quad & u(x) = \mathcal{U} e^{\lambda x} \quad ; \quad v(x) = \mathcal{V} e^{\lambda x} \quad ; \quad \theta(x) = \mathcal{W} e^{\lambda x} \\ \text{BGC} \quad & u(x) = \mathcal{U} e^{\lambda \alpha} \quad ; \quad v(x) = \mathcal{V} e^{\lambda \alpha} \quad ; \quad \theta(x) = \mathcal{W} e^{\lambda \alpha} \end{aligned} \quad (50)$$

donde  $\lambda$  es una constante compleja en general; se llega a un sistema lineal homogéneo en las constantes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ . La condición de no trivialidad es una ecuación algebraica de sexto orden en  $\lambda$ . Las seis raíces (que dependen evidentemente de  $\omega$ ) nos permiten disponer de las tres formas modales en función de dieciocho constantes. Reemplazadas en dos ecuaciones cualesquiera del sistema (49) el número de constantes se reduce a sólo seis arbitrarias. Planteando las seis CB (47) hallamos las infinitas (contables) frecuencias circulares  $\omega_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) que son los autovalores del problema. Correspondientemente con cada frecuencia  $n$ -ésima tenemos las autofunciones o formas modales  $n$ -ésimas  $u_n(\cdot)$ ,  $v_n(\cdot)$  y  $\theta_n(\cdot)$ .

## 2.6 Ejemplos Numéricos.

**2.6.1 Ejemplo 1:** Vibraciones naturales de barras gruesas rectas de sección rectangular con parámetros funcionalmente graduados con una ley potencial. Varias condiciones de vínculo y diversas relaciones de altura (ver Figura 2).

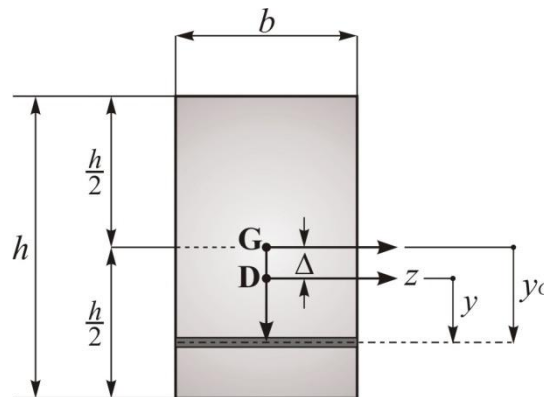


Figura 2: Sección Rectangular No Homogénea.

En la expresión (1) adoptamos:

$$\begin{aligned} \varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j + \frac{(1-k_j)}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^n \\ (j=1, 2, 3) ; k_j \text{ y } n \text{ constantes reales} \end{aligned}$$

Recordemos que  $\varphi_j(y_G, z)$  ( $j=1, 2, 3$ ) gobiernan la variación funcional de  $E, G$  y  $\rho$ , respectivamente.

Vemos que

$$b(y_G) = b \quad ; \quad h_i = h_s = \frac{h}{2} \quad ; \quad \Omega = bh \quad ; \quad J_G = \frac{bh^3}{12}$$

Por lo cual (expresiones (9), (10), (16), (17), (32), (41) y (42))

$$\begin{aligned}\lambda^\infty(y_G) &= b \cdot \varphi_1(y_G) & ; & \quad \mu^\infty(y_G) = b \cdot \varphi_3(y_G) \\ A^\infty = \alpha_0^\infty = \Omega \cdot A^\infty &= \Omega \cdot \frac{(1+nk_1)}{(1+n)} & ; & \quad \beta_0^\infty = \Omega \cdot \frac{(1+nk_3)}{(1+n)} \\ \Delta &= \frac{(k_1-1) \cdot nh}{2(n+2)(1+nk_1)} \quad (<0 \text{ ó } >0) & ; & \quad \beta_1^\infty = \frac{\Omega h}{2} \cdot \frac{n \cdot (k_3 - k_1)}{(n+2)(1+nk_1)} \\ J^\infty &= \alpha_2^\infty = J_G \cdot \frac{12+nk_1(4+nk_1)(n^2+4n+7)}{(n+3)(n+2)^2(1+nk_1)} \\ \beta_2^\infty &= J_G \cdot \frac{p_0 + p_1n + p_2n^2 + p_3n^3 + p_4n^4 + p_5n^5}{(n+3)(n+2)^2(1+nk_1)^2}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}p_0 &= 12 & ; & \quad p_1 = 8(3k_1 + 2k_3) \\ p_2 &= 21k_1^2 + 2k_3(8 + 7k_1) & ; & \quad p_3 = 12k_1^2 + k_3(4 + 8k_1 + 7k_1^2) \\ p_4 &= 3k_1^2 + 2k_1k_3(1 + 2k_1) & ; & \quad p_5 = k_3k_1^2\end{aligned}$$

La distribución tensional homogénea que adoptamos es:

$$\tau_{xy}^H = g(y_G) \quad ; \quad \tau_{xz}^H = -z \cdot g'(y_G)$$

Intentamos con la siguiente solución particular de las tensiones tangenciales, considerando que la sección tiene módulo elástico funcionalmente graduado:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^p &= \frac{\mathbf{C}Q}{J^\infty} \cdot \int \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) dy_G \\ \tau_{xz}^p &= -\frac{(1+\mathbf{C})Q}{J^\infty} \cdot \varphi_1(y_G) \cdot z \cdot (y_G - \Delta)\end{aligned}$$

$\mathbf{C}$  es, por ahora, una constante arbitraria y la integral propuesta es indefinida.

La suma de la solución homogénea y la particular satisfacen idénticamente la ecuación de equilibrio interno (23).

De la condición de nulidad de  $\tau_{xz}$  en  $z = \pm \frac{b}{2}$  deberá cumplirse que:

$$g'(y_G) + \frac{(1+\mathbf{C})Q}{J^\infty} \cdot \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) = 0$$

La posibilidad más sencilla de verificarla será:

$$\mathbf{C} = -1 \quad \text{y} \quad g'(y_G) = 0$$

Veamos a continuación si esta alternativa es viable.

Observamos que conducen a:

$$\tau_{xz} = 0$$

y a que:

$$g(y_G) = \mathbf{K} = \text{constante}$$

De esta forma

$$\tau_{xy}(y_G, z) = \tau_{xy}(y_G) = \frac{Q}{J_G} \left[ \frac{J^\infty \mathbf{K}}{Q} - \int \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) dy_G \right] = f(y_G) Q$$

Donde entonces:

$$f(y_G) \equiv \frac{J^\infty \mathbf{K}}{Q} + k_1 \left( \Delta y_G - \frac{y_G^2}{2} \right) + \frac{(1-k_1)(h-2y_G)^{n+1} [2n(y_G - \Delta) - 4\Delta + h + 2y_G]}{2^{n+2} h^n (n+1)(n+2)}$$

De la condición de reciprocidad para  $\tau_{xy}$ , o sea:

$$\tau_{xy} \left( -\frac{h}{2}, z \right) = \tau_{xy} \left( \frac{h}{2}, z \right) = 0$$

se obtiene:

$$\mathbf{K} = -\frac{Q}{8 J^\infty} \cdot k_1 h (h - 4\Delta)$$

También se verifica idénticamente que:

$$\iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = Q$$

Por lo tanto las asunciones son válidas ya que el problema es lineal, la solución es única y no quedan constantes sin determinar.

El factor de corte (expresión (32)) en este caso vale:

$$m = A^\infty \iint_{\Omega} \frac{f^2(y_G)}{\varphi_2(y_G)} d\Omega = b A^\infty \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{f^2(y_G)}{\varphi_2(y_G)} dy_G$$

Damos a continuación algunos valores numéricos.

Por ejemplo para  $b = 25$  cm,  $h = 50$  cm y  $k_1 = k_2 = 1$  (módulo de elasticidad y densidad homogéneos) obtenemos que  $\Delta = 0$  y  $m = 1.2$  que es el valor clásico conocido (el coeficiente  $n$  no interviene).

En las Tablas 1-4 siguientes para  $b = 25$  cm,  $h = 50$  cm, para distintos valores de  $k_1, k_2$  y  $n$  se encuentran los correspondientes valores de corrimiento  $\Delta$  del eje neutro y los valores de factor de corte  $m$ .

$n$	0	1	3	10
$\Delta$ (cm)	0	-4.48718	-5.52632	-3.64583
$m$	1.2	0.70541	0.46174	0.33014

Tabla 1: Factor de Corte  $m$  para  $k_1 = 0.3$  y  $k_2 = 1.3$

$n$	0	1	3	10
$\Delta$ (cm)	0	-4.48718	-5.52632	-3.64583
$m$	1.2	1.11445	1.09341	1.01468

Tabla 2: Factor de Corte  $m$  para  $k_1 = 0.3$  y  $k_2 = 0.4$



$n$	0	1	3	10
$\Delta$ (cm)	0	2.16049	1.72131	0.81018
$m$	1.2	1.35002	1.39249	1.43267

Tabla 3: Factor de Corte  $m$  para  $k_1 = 1.7$  y  $k_2 = 1.4$ 

$n$	0	1	3	10
$\Delta$ (cm)	0	2.16049	1.72131	0.81018
$m$	1.2	2.07883	2.82227	3.29007

Tabla 4: Factor de Corte  $m$  para  $k_1 = 1.7$  y  $k_2 = 0.6$ 

Para calcular las frecuencias naturales de esta sección rectangular funcionalmente graduada, tomamos de nuevo  $b = 25$  cm,  $h = 50$  cm,  $n = 3$ ,  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 1.3$  y  $k_3 = 2$  ( $\Delta = -5.52632$  cm y  $m = 0.46174$ , ver [Tabla 1](#)). Por lo tanto obtenemos para este caso los siguientes valores de los parámetros que requieren los coeficientes del sistema diferencial (49):

$$\begin{aligned} \alpha_0^\infty &= 593.75 & ; & \alpha_1^\infty = 0 & ; & \alpha_2^\infty = 123793.8597 \\ \beta_0^\infty &= 2187.75 & ; & \beta_1^\infty = 16776.3158 & ; & \beta_2^\infty = 548303.3241 \end{aligned}$$

Hallaremos las tres primeras frecuencias circulares naturales para piezas de longitud  $L = x_L - x_0$  con  $x_0 = 0$ , diversas vinculaciones y distintas relaciones  $\frac{h}{L}$ .

- Caso 1 de vinculación “S”

Corresponde a un apoyo doble en el punto  $D$  de alguna sección extrema, es decir:

$$u(\bullet) = 0 \quad ; \quad v(\bullet) = 0 \quad ; \quad M_D(\bullet) = 0 \Rightarrow \theta'(\bullet) = 0$$

- Caso 2 de vinculación “E”

Corresponde a un empotramiento de alguna sección extrema: nulidad de las tres componentes cinemáticas, es decir:

$$u(\bullet) = 0 \quad ; \quad v(\bullet) = 0 \quad ; \quad \theta(\bullet) = 0$$

- Caso 3 de vinculación “F”

Corresponde a algún borde libre: nulidad de los tres esfuerzos característicos reducidos al punto  $D$ , es decir:

$$\begin{aligned} N(\bullet) = 0 & \Rightarrow u'(\bullet) = 0 \\ M_D(\bullet) = 0 & \Rightarrow \theta'(\bullet) = 0 \\ Q(\bullet) = 0 & \Rightarrow v'(\bullet) + \theta(\bullet) = 0 \end{aligned}$$

- Caso 4 de vinculación “S $_\delta$ ”

Corresponde a un apoyo doble aplicado en un punto  $C$  que se encuentra a una distancia  $\delta$  del punto  $D$  en algún extremo de la pieza.

O sea:

$$\begin{aligned} u_c(\cdot) = 0 &\Rightarrow u(\cdot) + \theta(\cdot)\delta = 0 \\ v_c(\cdot) = 0 &\Rightarrow v(\cdot) = 0 \\ M_c(\cdot) = 0 &\Rightarrow A^\infty u'(\cdot)\delta + J^\infty \theta'(\cdot) = 0 \end{aligned}$$

En el cálculo de frecuencias con esta condición de vínculo, para fijar ideas se asumió  $\delta = 10$ .

Para hallar los valores de frecuencias  $\omega$  en radianes/segundo a continuación, se ha resuelto el sistema diferencial (49) utilizando un algoritmo “ad hoc” en series de potencias, codificado en “MatLab”. Por supuesto la metodología de resolución es arbitraria y depende del usuario (ver Tablas 5-8).

Para todos los casos abordados hemos adoptado:

$$E_0 = 2.1 \times 10^7 \frac{N}{\text{cm}^2}, G_0 = \frac{E_0}{2.6}, \rho_0 = 7850 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

Entonces, de acuerdo a las expresiones (46) obtenemos:

$$\begin{aligned} C_{11}^\infty &= 1.2469 \times 10^{10} & C_{22}^\infty &= 2.5887 \times 10^{12} & C_{33}^\infty &= 1.0386 \times 10^{10} \\ D_{11}^\infty &= 17.1719 & D_{22}^\infty &= 131.6941 & D_{33}^\infty &= 4.3042 \times 10^3 \end{aligned}$$

$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	950.2963	318.5000	15.2117	0.9595
$\omega_2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	1345.2605	805.9479	59.1792	3.8305
$\omega_3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	2095.6910	964.5615	127.6733	8.5928

Tabla 5: Tres primeras frecuencias circulares. CB: S-S

$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	1386.3457	561.2452	33.7991	2.1721
$\omega_2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	1498.9285	806.6805	89.3923	5.9702
$\omega_3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	2445.6503	1157.5360	166.4931	11.6570

Tabla 6: Tres primeras frecuencias circulares. CB: E-E

$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	1664.5540	292.1800	15.1265	0.9591
$\omega_2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	2185.8209	415.0279	58.4789	3.8277
$\omega_3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	2381.6927	834.5315	84.6755	8.5828

Tabla 7: Tres primeras frecuencias circulares. CB: E-F

$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1$ (rad/seg)	811.0838	255.6495	11.5486	0.7259
$\omega_2$ (rad/seg)	2132.5428	1794.0848	60.1140	3.8345
$\omega_3$ (rad/seg)	2736.2038	2088.1178	126.3689	8.4040

Tabla 8: Tres primeras frecuencias circulares. CB:  $S_\delta - S_\delta$

**2.6.2 Ejemplo 2:** Vibraciones naturales de barras gruesas curvas de sección rectangular hueca homogénea de espesor constante en ménsula y con varias relaciones de curvatura y de espesor (ver Figura 3).

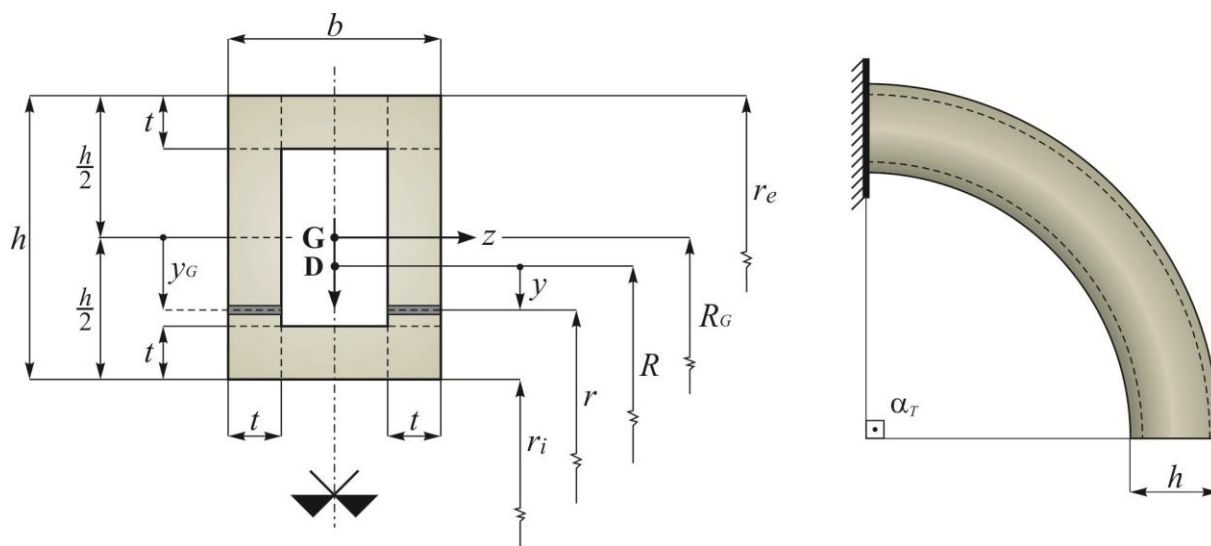


Figura 3: Sección Rectangular Hueca Homogénea de Espesor Constante

Presentamos a continuación algunos factores de corte adoptando para todos los casos  $b = 0.05$  m y  $h = 0.1$  m. Consideramos dos valores de  $t$  (0.002 m y 0.004 m) y tres valores de  $\frac{h}{R_G}$  (0.1, 0.5 y 1). Los parámetros  $\alpha_j^R, \beta_j^R$  ( $j = 0, 1, 2$ ), el radio neutro  $R$ , el factor de corte  $m$  y los parámetros para calcular los coeficientes del sistema diferencial homogéneo (49), se obtienen de las ecuaciones (9), (32) y (41) y se muestran en las Tablas 9-12.

$\frac{h}{R_G}$	$\alpha_0^R$	$\alpha_2^R$	$\beta_0^R$	$\beta_1^R$	$\beta_2^R$
0.1	0.00058478	$0.77571 \times 10^{-6}$	0.000584	$-0.15509 \times 10^{-5}$	$0.77827 \times 10^{-6}$
0.5	0.0030221	$0.39446 \times 10^{-5}$	0.0001168	$-0.15641 \times 10^{-5}$	$0.17084 \times 10^{-6}$
1	0.006816	$0.83629 \times 10^{-5}$	0.000584	$-0.16115 \times 10^{-5}$	$0.111695 \times 10^{-6}$

Tabla 9: Parámetros  $\alpha_j^R$  y  $\beta_j^R$  para  $t = 0.002$  m

$\frac{h}{R_G}$	$\alpha_0^R$	$\alpha_2^R$	$\beta_0^R$	$\beta_1^R$	$\beta_2^R$
0.1	0.0011374	$0.14422 \times 10^{-5}$	0.001136	$-0.288348 \times 10^{-5}$	$0.14467 \times 10^{-5}$
0.5	0.0058694	$0.733026 \times 10^{-5}$	0.0002272	$-0.29073 \times 10^{-5}$	$0.31631 \times 10^{-6}$
1	0.0131565	0.000015512	0.0001136	$-0.299242 \times 10^{-5}$	$0.204666 \times 10^{-6}$

Tabla 10: Parámetros  $\alpha_j^R$  y  $\beta_j^R$  para  $t = 0.004$  m

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$ (m)	$R$ (m)	$m$
0.1	1	0.9987	1.6184
0.5	0.2	0.1932	1.6700
1	0.1	0.08568	1.9032

Tabla 11: Radio Neutro  $R$  y Factor de Corte  $m$  para  $t = 0.002$  m

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$ (m)	$R$ (m)	$m$
0.1	1	0.9987	1.5939
0.5	0.2	0.1935	1.6388
1	0.1	0.08635	1.8377

Tabla 12: Radio Neutro  $R$  y Factor de Corte  $m$  para  $t = 0.004$  m

Las seis C.B. para el sistema estructural en ménsula seleccionado son:

$$u(0) = 0 \quad (a) ; \quad N(\alpha_T) = 0 \quad (d)$$

$$v(0) = 0 \quad (b) ; \quad M_D(\alpha_T) = 0 \quad (e)$$

$$\theta(0) = 0 \quad (c) ; \quad Q(\alpha_T) = 0 \quad (f)$$

O sea por (18) y (37) equivalen a:

$$u(0) = v(0) = \theta(0) = u'(\alpha_T) - v(\alpha_T) = \theta'(\alpha_T) = u(\alpha_T) + v'(\alpha_T) + R\theta(\alpha_T) = 0$$

Para todos los casos hemos adoptado que:

$$E_0 = 2.1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad G_0 = \frac{E_0}{2.6}, \quad \rho_0 = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$b = 0.05 \text{ m}, \quad h = 0.1 \text{ m}, \quad \alpha_T = \frac{\pi}{2}$$

Los coeficientes para el sistema diferencial (49) se calculan por medio de las expresiones (46) y las tres primeras frecuencias circulares para cada caso se indican en las Tablas 13-14.

$\frac{h}{R_G}$	1	0.5	0.1
$\omega_1$ (rad/seg)	22061	6148	280.52
$\omega_2$ (rad/seg)	33981	18309	1297.34
$\omega_3$ (rad/seg)	82035	31946	3817.48

Tabla 13: Valores de las tres primeras frecuencias circulares para  $t = 0.002$  m

$\frac{h}{R_G}$	1	0.5	0.1
$\omega_1$ (rad/seg)	18556	6054	274.35
$\omega_2$ (rad/seg)	44884	18249	1271.69
$\omega_3$ (rad/seg)	57420	32020	3754.85

Tabla 14: Valores de las tres primeras frecuencias circulares para  $t = 0.004$  m

**2.6.3 Ejemplo 3:** Vibraciones naturales de barras gruesas curvas en ménsula de sección rectangular hueca con dos capas (*Acero–Cerámica*) y con varias relaciones de curvatura (ver [Figura 4](#)).

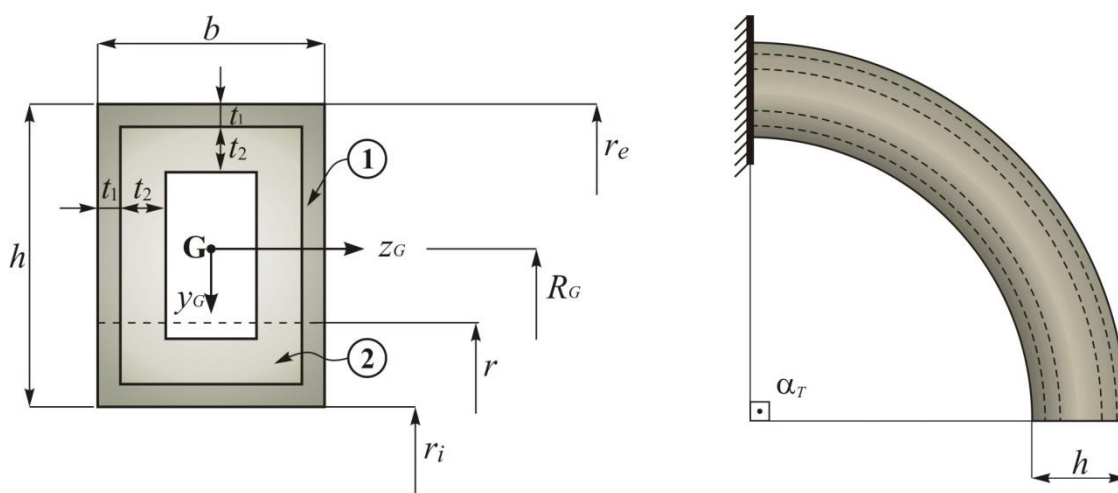


Figura 4: Sección “Composite” de una Barra Gruesa Curva.

La sección considerada está conformada por una capa interna de acero de espesor  $t_2$  y otra externa de un silicón carbide/ceramic de espesor  $t_1$ . Los parámetros  $E, G$  y  $\rho$  no varían analíticamente. Esto es, si consideramos como parámetros de referencia a los del acero:

$$E_0 = 2.1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, G_0 = \frac{E_0}{2.6}, \rho_0 = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Entonces, de acuerdo a las expresiones (1) en la región ②:  $\varphi_j(y_G, z) = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ )

Por otro lado, en la región ① las características del cerámico son:

$$E_c = 1.21 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, G_0 = \frac{E_0}{2.4}, \rho_0 = 2720 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Por tanto  $\varphi_1(y_G, z) = 0.5761905$ ,  $\varphi_2(y_G, z) = 0.624206$  y  $\varphi_3(y_G, z) = 0.3464968$

La búsqueda del factor de corte para este tipo de secciones, que es ineludible para el cálculo de los coeficientes del sistema diferencial homogéneo que permite hallar las frecuencias naturales, puede simplificarse recurriendo a una herramienta denominada Superposición I (Filipich, 2012). La misma consiste en calcular el régimen de tensiones tangenciales para una sección rectangular hueca homogénea de espesor  $t_1$  y otra también homogénea de espesor  $t_1 + t_2$ . No es difícil demostrar que la superposición aludida tiene sentido cuando se verifica

$$\iint_{\Omega} \varphi_1(y_G, z) \cdot y_G \, d\Omega = 0$$

y el baricentro de la sección no homogénea bajo estudio coincide con el baricentro de cada sección rectangular hueca homogénea cuyas distribuciones tensionales superpondremos. (Los estados particulares homogéneos que se superponen son similares a los desarrollados en el Ejemplo 2).

Para el cálculo de frecuencia naturales hemos tomado  $b = 0.05 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $t_1 = t_2 = 0.004 \text{ m}$  y la ménsula gruesa curva tiene una abertura  $\alpha_T = \frac{\pi}{2}$ .

Los parámetros  $\alpha_j^R$ ,  $\beta_j^R$  ( $j = 0, 1, 2$ ), el radio neutro  $R$  y el factor de corte  $m$  para calcular los coeficientes del sistema diferencial homogéneo (49), se muestran en las Tablas 15-16.

Las tres primeras frecuencias para tres valores relativos de curvatura se ven en la Tabla 17.

$\frac{h}{R_G}$	$\alpha_0^R$	$\alpha_2^R$	$\beta_0^R$	$\beta_1^R$	$\beta_2^R$
0.1	0.0016644	$0.187769 \times 10^{-5}$	0.00140162	$-0.312847 \times 10^{-5}$	$0.155075 \times 10^{-5}$
0.5	0.0085581	$0.953357 \times 10^{-5}$	0.00028032	$-0.315293 \times 10^{-5}$	$0.336036 \times 10^{-6}$
1	0.0189117	0.0000201	0.00014016	$-0.32399 \times 10^{-5}$	$0.2124 \times 10^{-6}$

Tabla 15: Parámetros  $\alpha_j^R$  y  $\beta_j^R$ .

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$ (m)	$R$ (m)	$m$
0.1	1	0.9989	1.508336
0.5	0.2	0.1943	1.54018
1	0.1	0.08791	1.672576

Tabla 16: Radio Neutro  $R$  y Factor de Corte  $m$

$\frac{h}{R_G}$	1	0.5	0.1
$\omega_1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	20041	6336	282.1
$\omega_2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	49094	19749	1314.99
$\omega_3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$	64585	35146	3917.5

Tabla 17: Valores de las tres primeras frecuencias circulares.

### 3 CONCLUSIONES

En este trabajo, se planteó el problema de dinámica forzada de barras arbitrariamente gruesas rectas y curvas (evidentemente que incluye las denominadas barras esbeltas o delgadas), con parámetros elásticos y densidad funcionalmente variables (analíticamente o no) en la sección. En una primera etapa, se obtuvieron las correspondientes distribuciones de tensiones tangenciales en la sección y el factor de corte, valor ineludible para plantear las ecuaciones diferenciales de movimiento que gobiernan el problema. Adicionalmente, fue resuelto el problema de vibraciones naturales de esos elementos estructurales. A lo largo del trabajo, se presentan en forma paralela los encuadres para barras gruesas rectas (BGR) y barras gruesas curvas (BGC). De la comparación, se observa la analogía formal y las diferencias particulares en cada caso. Por otro lado, cabe mencionar que el factor de corte se deduce de un enfoque energético. Se obtiene una expresión del mismo en función de la distribución de las tensiones tangenciales que depende del módulo de elasticidad a través de  $\varphi_1(y_G, z)$  y todavía de la variación funcional del módulo de elasticidad transversal a través de  $\varphi_2(y_G, z)$ . Otro aporte destacado, siempre dentro del encuadre energético, es la derivación de las relaciones constitutivas de  $M$ ,  $N$  y  $Q$  con los desplazamientos y sus derivadas. Para la derivación del sistema diferencial gobernante dinámico y sus condiciones de borde (CB), se decidió recurrir al Teorema de Hamilton. Las ecuaciones diferenciales comprenden los casos de barras gruesas rectas o curvas, macizas o múltiplemente conexas, homogéneas o no, requiriéndose en el presente estudio que haya, al menos, un eje de simetría coincidente con la resultante del esfuerzo de corte.

Se presentan varios ejemplos ilustrativos. El primero trata de una de una BGR de sección rectangular con varias CB donde  $E$ ,  $G$  y  $\rho$  varían con distintas leyes potenciales. Se obtiene la distribución de tensiones tangenciales y, en consecuencia, los factores de corte. Evidentemente el eje neutro deja de ser baricéntrico y vale la pena mencionar que el corrimiento puede ser por arriba o por debajo en relación al plano baricéntrico, dependiendo de la graduación funcional. Se reportan las tres primeras frecuencias naturales para cuatro relaciones de  $h/L$  y distintas CB. En particular, se estudia el caso con una CB que consiste en un apoyo doble ubicado en un punto desplazado del eje neutro, situación que tiene sentido si la barra es gruesa. En el segundo ejemplo, se aborda el caso de las vibraciones naturales de una BGC de sección rectangular hueca, de espesor constante, en ménsula y para distintas relaciones de curvatura y dos espesores. Por último, se presenta un tercer ejemplo que tiene la misma geometría que el ejemplo anterior pero la sección presenta dos capas de material concéntrico (*composite*) y varias relaciones de curvatura. Se reportan valores de frecuencias naturales para los distintos casos. Debe notarse que este ejemplo muestra el alcance de la formulación planteada y la relativa simplicidad del elemento estructural estudiado. Otras herramientas usuales como elementos finitos, requerirían de elementos especialmente diseñados para cada tipo de material y eventualmente, derivarían en mallas de gran número de

elementos con alto costo computacional para cada caso en particular.

En todo caso, la herramienta propuesta sirve de referencia y base inicial para calibrar otros métodos numéricos.

## REFERENCIAS

- Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*, Zanichelli Editore Bologna, 1965.
- Cowper, G.R., The shear coefficient in Timoshenko's beams theory, *Journal Applied Mechanical Transactions –ASME*, 33:335–340, 1966.
- Davis, R., Henshell, R.D., and Warburton, C.B., Constant curvature beam. Finite elements for in-plane vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 4:561– 576, 1972.
- Filipich, C.P., *Vibraciones Libres en su Plano de Arcos y Anillos Circunferenciales con Diversas Complejidades*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba Argentina, 1991.
- Filipich, C.P., and Piovan, M.T., The Dynamics of Thick Curved Beams Constructed with Functionally Graded Materials, *Mechanics Research Communications*, 37:565–570, 2010.
- Filipich, C.P., *Movimiento Plano de Barras Guesas Rectas y Curvas de Sección Uniforme No Homogénea*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona, España, 2012 (en prensa).
- Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Of India Private Limited. New Delhi; 1968.
- Howson, W.P., and Jemah, A.K., Exact Out-of-Plane Natural Frequencies of Curved Timoshenko Beams, *Journal of Engineering Mechanics, Asce*, 125:19-25, 1999.
- Jong-Shyong Wu and Lieh-Kwang Chiang, Free Vibration of a Circularly Curved Timoshenko Beam Normal to its Initial using Finite Curved Beams Elements, *Computers and Structures*, 82:2 525-2540, 2004.
- Kim, J.G., and Lee, J.K., Free Vibration Analysis of Arches based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions, *Computers and Structures*, 86:1672-1681, 2008.
- Mindlin, R.D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *Journal Applied Mechanics Transactions-ASME*, 18:31-38, 1951.
- Romanelli, E., El Factor de Cortadura y el Alabeo, XX Jornadas Sudamericanas de Ing. Estructural, Córdoba, Argentina, 1979.
- Rossi, R.E., and Laura, P.A.A., Free In-Plane Vibrations of Circular Rings with Radial Supports Taking into account Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal Accoustical Society American*, 86:2237-2243, 1989.
- Timoshenko, S., and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1934.
- Timoshenko, S., and Gere J. M., *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Co., 1972.