

MODELO CONTINUO 1D PARA LA REPRESENTACION SIMPLIFICADA DE UN RETICULADO ESPACIAL

Alberto M. Guzmán^{a,b}, Carlos P. Filipich^{c,d} and Marta B. Rosales^{c,e}

^a*Doctorando del Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^b*CEREDETEC, FRM, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina*

^c*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^d*CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, Bahía Blanca, Argentina*

^e*CONICET, Argentina*

Palabras claves: reticulado espacial, dinámica, cálculo variacional, modelo continuo.

Resumen. En la industria de las telecomunicaciones las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados y arriostrados mediante tensores ubicados a distintas alturas. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes de representación, resultando ello en un menor costo de análisis computacional. Estos modelos de representación surgen de reemplazar al reticulado espacial por una formulación del tipo viga-columna equivalente. En un trabajo anterior se obtuvo una formulación continua de nueve ecuaciones diferenciales (9ED) para un reticulado espacial en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como reticulado en zig-zag. En el presente trabajo se desarrolla un modelo continuo reducido de seis ecuaciones diferenciales (6ED) que permite la representación simplificada del reticulado anteriormente citado. Para ello, primeramente se define un campo de desplazamiento para la sección transversal del reticulado, permitiendo así, referir los corrimientos de dicha sección respecto a los de su eje baricéntrico. Seguidamente y mediante un desarrollo energético, se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento dinámico lineal del reticulado analizado. En esta formulación queda incorporada la flexibilidad por corte y efectos de 2º orden debido al peso propio del reticulado y a las cargas de punta actuantes, así como también, efectos inerciales asociados a las masas de diagonales y largueros. Por último, se presentan ejemplos numéricos para los cuales se determinan frecuencias naturales implementando la formulación continua desarrollada (6ED), y se compara con los resultados obtenidos de aplicar la modelación vía elementos finitos. Los resultados obtenidos indican un muy buen desempeño del modelo continuo viga-columna equivalente al reticulado espacial.

1 INTRODUCCIÓN

En la industria de las telecomunicaciones las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados y arriostrados. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes de representación, resultando ello en un menor costo computacional a la hora del análisis (Madagula et al., 1998; Wahba et al., 1998). En ese sentido, Ben Kahla (Kahla, 1995) basado en un planteo de flexibilidad, determinó las propiedades elásticas equivalentes para distintos patrones de reticulado de sección transversal triangular, a partir de obtener los desplazamientos del eje centroidal de un tramo del reticulado producidos por una carga unitaria, y luego, compararlos con aquellos desplazamientos obtenidos por la misma carga pero actuando en una viga-columna. En dicho análisis se prescindió del aporte de rigideces locales y del efecto de 2^o orden, tampoco fueron obtenidas propiedades inerciales equivalentes. Otros autores (Madagula et al., 1998; Wahba et al., 1998) para la modelación como viga-columna de un mástil reticulado arriostrado, obtuvieron las propiedades equivalentes a partir de modelar vía elementos finitos un tramo del reticulado espacial fijado a su base. Sobre el extremo libre de dicho reticulado modelado se aplicaron distintas cargas a fin de obtener corrimientos y giros, y con ello, obtener rigideces flexionales, transversales y torsionales, las cuales luego le fueron asignadas al elemento viga-columna. Este proceso lo debieron repetir cada vez que las propiedades geométricas del reticulado o bien las propiedades mecánicas de los elementos del reticulado cambiaban, resultando un proceso poco expeditivo. No fueron considerados en el modelo viga-columna las propiedades inerciales equivalentes ni efectos de 2^o orden.

En trabajos anteriores desarrollados por los autores del presente trabajo (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011a,b), se obtuvo la formulación continua estática y dinámica (nueve ecuaciones diferenciales, 9ED) del problema partiendo de un modelo discreto, a través de un pasaje al límite admitiendo un número infinito de paños con reticulado. Se utilizó un enfoque variacional.

En el presente trabajo y a partir de un desarrollo energético, se obtiene la energía mecánica de este modelo simplificado de representación del reticulado espacial. Luego con la aplicación del principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton (Elsigoltz, 1977), se conduce directamente a las ecuaciones diferenciales (6ED) que gobiernan el movimiento del problema analizado. En esta formulación desarrollada queda incorporada la flexibilidad por corte y efectos de 2^o orden debido al peso propio del mástil y a las cargas de punta actuante sobre los largueros, así como también, efectos inerciales asociados a las masas de las diagonales y de los largueros.

El reticulado analizado corresponde al caso en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como reticulado en zig-zag.

Por último, se presentan ejemplos numéricos para los cuales se determinan sus frecuencias no amortiguadas como caso particular de la formulación desarrollada, y se comparan con los resultados obtenidos de la modelación vía elementos finitos del reticulado espacial.

2 RETICULADO ANALIZADO

El reticulado analizado corresponde al mismo considerado por estos autores en trabajos anteriores (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011a,b). Presenta una sección transversal triangular y equilátera, con diagonales dispuestas en zig-zag. Los largueros y diagonales son de directriz recta y de sección transversal constante.

La pieza presenta una longitud L_l (ver Fig. 1), y está constituida por tres largueros continuos unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos. La sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La longitud de cada diagonal es L_d . El material que constituye a los largueros y diagonales es elástico y lineal, siendo respectivamente el módulo E_l y E_d , y la densidad ρ_l y ρ_d . Por tratarse de una sección transversal triangular y equilátera, $\beta = 60^\circ$.

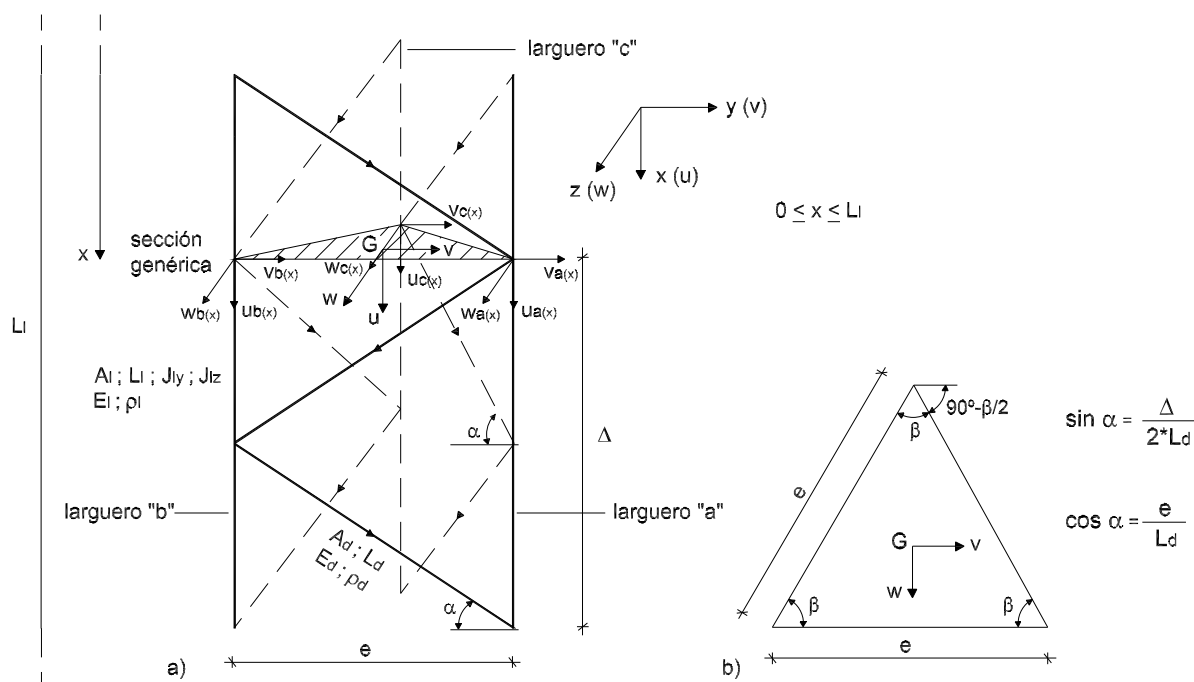


Figura 1: Pieza 3D analizada. a) Vista. b) Sección transversal

3 PLANTEO DEL PROBLEMA

El planteo del problema consiste en definir un campo de desplazamiento tal que cualquier corrimiento experimentado por un punto cualquiera p ubicado sobre la sección transversal del mástil reticulado (ver Fig. 2), pueda ser expresado en función de los corrimientos que presenta el eje baricéntrico del mismo.

El campo de desplazamiento definido resulta:

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z,t) &= u_o(x,t) - \theta_{wo}(x,t)y + \theta_{vo}(x,t)z \\
 v(x,y,z,t) &= v_o(x,t) - \theta_{uo}(x,t)z \\
 w(x,y,z,t) &= w_o(x,t) + \theta_{uo}(x,t)y
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

en donde se ha asumido como hipótesis:

1. Una variación lineal del campo de desplazamientos
2. Se desprecia el alabeo

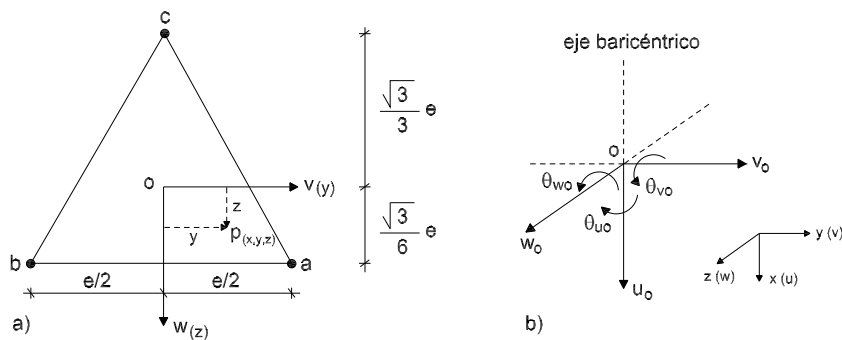


Figura 2: a) Punto genérico. b) Convención de signos

Las seis funciones incógnitas representan, respecto del eje baricéntrico al corrimiento axial u_o (en la dirección de x), a los corrimientos transversales v_o y w_o (en la dirección de y y z respectivamente), al giro torsional θ_{uo} (alrededor de x), y a los giros flexionales θ_{vo} y θ_{wo} (alrededor de y y z respectivamente). La convención de signos utilizada para los corrimientos y giros se muestra en Figura 2.

De este modo los corrimientos de cada uno de los tres largueros que conforman el mástil reticulado quedan expresados, en función de los corrimientos del eje baricéntrico, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u_a(x,t) &= u_o(x,t) - \theta_{wo}(x,t) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
 u_b(x,t) &= u_o(x,t) + \theta_{wo}(x,t) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
 u_c(x,t) &= u_o(x,t) - \theta_{vo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\
 v_a(x,t) &= v_o(x,t) - \theta_{uo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
 v_b(x,t) &= v_o(x,t) - \theta_{uo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\
 v_c(x,t) &= v_o(x,t) + \theta_{uo}(x,t) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\
 w_a(x,t) &= w_o(x,t) + \theta_{uo}(x,t) \frac{e}{2} \\
 w_b(x,t) &= w_o(x,t) - \theta_{uo}(x,t) \frac{e}{2} \\
 w_c(x,t) &= w_o(x,t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Luego reemplazando estas funciones corrimientos en los funcionales de energía obtenidos de trabajos anteriores (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011a,b), se obtiene la energía mecánica del sistema simplificado, es decir aquella energía desarrollada por el reticulado equivalente referida al eje baricéntrico.

3.1 Energía del reticulado espacial

Las expresiones que a continuación se presentaran, corresponden a aquellas obtenidas por los autores y reportadas en un trabajo anterior (Guzmán et al., 2011b).

3.1.1 Energía interna de deformación

$$U = \frac{E_d A_d}{2L_d} \int_0^{L_i} (A_1 \sin^2 \alpha + A_2 \cos^2 \alpha + A_3 \sin \alpha \cos \alpha) dx + \frac{E_l A_l}{2} \int_0^{L_i} A_4 dx + \frac{E_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_i} A_5 dx + \frac{E_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_i} A_6 dx \quad (3)$$

siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[2(u_{a(x,t)} - u_{b(x,t)})^2 + u_{b(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] + \left[2(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)})^2 + u_{c(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] + \\ &\quad + \left[2(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)})^2 + u_{a(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] \\ A_2 &= \left[2(v_{a(x,t)} - v_{b(x,t)})^2 + v_{b(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] + \left[2(v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)})^2 + v_{c(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] \cos^2 \beta + \\ &\quad + \left[2(w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)})^2 + w_{c(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] \sin^2 \beta - \\ &\quad - \left[4(v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)})(w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)}) + v_{c(x,t)}' w_{c(x,t)}' \Delta^2 \right] \sin \beta \cos \beta + \\ &\quad + \left[2(v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)})^2 + v_{a(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] \cos^2 \beta + \left[2(w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)})^2 + w_{a(x,t)}'^2 \frac{\Delta^2}{2} \right] \sin^2 \beta + \\ &\quad + \left[4(v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)})(w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)}) + v_{a(x,t)}' w_{a(x,t)}' \Delta^2 \right] \sin \beta \cos \beta \\ A_3 &= 2 \left[(u_{a(x,t)} - u_{b(x,t)}) v_{b(x,t)}' + (v_{a(x,t)} - v_{b(x,t)}) u_{b(x,t)}' \right] \Delta - \\ &\quad - 2 \left[(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)}) v_{c(x,t)}' + (v_{b(x,t)} - v_{c(x,t)}) u_{c(x,t)}' \right] \Delta \cos \beta + \\ &\quad + 2 \left[(u_{b(x,t)} - u_{c(x,t)}) w_{c(x,t)}' + (w_{b(x,t)} - w_{c(x,t)}) u_{c(x,t)}' \right] \Delta \sin \beta - \\ &\quad - 2 \left[(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)}) v_{a(x,t)}' + (v_{c(x,t)} - v_{a(x,t)}) u_{a(x,t)}' \right] \Delta \cos \beta - \\ &\quad - 2 \left[(u_{c(x,t)} - u_{a(x,t)}) w_{a(x,t)}' + (w_{c(x,t)} - w_{a(x,t)}) u_{a(x,t)}' \right] \Delta \sin \beta \\ A_4 &= (u_{a(x,t)}')^2 + (u_{b(x,t)}')^2 + (u_{c(x,t)}')^2 \\ A_5 &= (v_{a(x,t)}'')^2 + (v_{b(x,t)}'')^2 + (v_{c(x,t)}'')^2 \\ A_6 &= (w_{a(x,t)}'')^2 + (w_{b(x,t)}'')^2 + (w_{c(x,t)}'')^2 \end{aligned} \quad (4)$$

siendo $(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$; $(\bullet)'' \equiv \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}$; etc. Dado que $\beta = 60^\circ$, $\cos \beta = \frac{e}{L_d}$ y $\sin \beta = \frac{\Delta}{2L_d}$

3.1.2 Trabajo externo de cargas aplicadas

Se detallan a continuación los trabajos de primero y segundo orden realizados por las cargas y pares en los largueros y en la sección transversal.

Por cargas concentradas actuando en los largueros:

$$\begin{aligned}
 W_P = & P_{ua(t)}u_{a(x,t)} + P_{ub(t)}u_{b(x,t)} + P_{uc(t)}u_{c(x,t)} + \\
 & + P_{va(t)}v_{a(x,t)} + P_{vb(t)}v_{b(x,t)} + P_{vc(t)}v_{c(x,t)} + \\
 & + P_{wa(t)}w_{a(x,t)} + P_{wb(t)}w_{b(x,t)} + P_{wc(t)}w_{c(x,t)}
 \end{aligned} \quad (5)$$

Por cargas distribuidas actuando en los largueros:

$$\begin{aligned}
 W_q = & q_{ua(x,t)}u_{a(x,t)} + q_{ub(x,t)}u_{b(x,t)} + q_{uc(x,t)}u_{c(x,t)} + \\
 & + q_{va(x,t)}v_{a(x,t)} + q_{vb(x,t)}v_{b(x,t)} + q_{vc(x,t)}v_{c(x,t)} + \\
 & + q_{wa(x,t)}w_{a(x,t)} + q_{wb(x,t)}w_{b(x,t)} + q_{wc(x,t)}w_{c(x,t)}
 \end{aligned} \quad (6)$$

Por pares actuando localmente en los largueros:

$$\begin{aligned}
 W_m = & M_{va(t)}v'_{a(x,t)} + M_{vb(t)}v'_{b(x,t)} + M_{vc(t)}v'_{c(x,t)} + \\
 & + M_{wa(t)}w'_{a(x,t)} + M_{wb(t)}w'_{b(x,t)} + M_{wc(t)}w'_{c(x,t)}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Por pares actuando globalmente en la sección transversal:

$$W_M = M_{u(t)}\theta_{uo(x,t)} + M_{v(t)}\theta_{vo(x,t)} + M_{w(t)}\theta_{wo(x,t)} \quad (8)$$

Por efecto de segundo orden debido al peso propio del reticulado y a cargas axiales aplicadas en los largueros:

$$\begin{aligned}
 W_{2^\circ} = & \frac{P_{ua(t)}}{2} \int_0^{L_l} A_7 dx + \frac{P_{ub(t)}}{2} \int_0^{L_l} A_8 dx + \frac{P_{uc(t)}}{2} \int_0^{L_l} A_9 dx + \\
 & + \frac{\rho_l g A_l + \rho_d g \frac{A_d}{\sin \alpha}}{2} \int_0^{L_l} A_{10} x dx
 \end{aligned} \quad (9)$$

siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned}
 A_7 = & (v'_{a(x,t)})^2 + (w'_{a(x,t)})^2 \\
 A_8 = & (v'_{b(x,t)})^2 + (w'_{b(x,t)})^2 \\
 A_9 = & (v'_{c(x,t)})^2 + (w'_{c(x,t)})^2 \\
 A_{10} = & (v'_{a(x,t)})^2 + (v'_{b(x,t)})^2 + (v'_{c(x,t)})^2 + (w'_{a(x,t)})^2 + (w'_{b(x,t)})^2 + (w'_{c(x,t)})^2
 \end{aligned} \quad (10)$$

3.1.3 Energía cinética

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{\rho_d A_d L_d}{3\Delta} \int_0^{L_l} (B_1 + B_2) dx + \frac{\rho_l A_l}{2} \int_0^{L_l} B_3 dx + \frac{\rho_l J_{ly}}{2} \int_0^{L_l} B_4 dx + \frac{\rho_l J_{lz}}{2} \int_0^{L_l} B_5 dx \quad (11)$$

siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 2(\dot{u}_{a(x,t)}^2 + \dot{v}_{a(x,t)}^2 + \dot{w}_{a(x,t)}^2 + \dot{u}_{b(x,t)}^2 + \dot{v}_{b(x,t)}^2 + \dot{w}_{b(x,t)}^2 + \dot{u}_{c(x,t)}^2 + \dot{v}_{c(x,t)}^2 + \dot{w}_{c(x,t)}^2) + \\
 &\quad + (\dot{u}_{a(x,t)}\dot{u}_{b(x,t)} + \dot{v}_{a(x,t)}\dot{v}_{b(x,t)} + \dot{w}_{a(x,t)}\dot{w}_{b(x,t)} + \dot{u}_{b(x,t)}\dot{u}_{c(x,t)} + \dot{v}_{b(x,t)}\dot{v}_{c(x,t)} + \\
 &\quad + \dot{w}_{b(x,t)}\dot{w}_{c(x,t)} + \dot{u}_{c(x,t)}\dot{u}_{a(x,t)} + \dot{v}_{c(x,t)}\dot{v}_{a(x,t)} + \dot{w}_{c(x,t)}\dot{w}_{a(x,t)}) \\
 B_2 &= (\dot{u}'_{a(x,t)} + \dot{v}'_{a(x,t)} + \dot{w}'_{a(x,t)} + \dot{u}'_{b(x,t)} + \dot{v}'_{b(x,t)} + \dot{w}'_{b(x,t)} + \\
 &\quad + \dot{u}'_{c(x,t)} + \dot{v}'_{c(x,t)} + \dot{w}'_{c(x,t)}) \frac{\Delta^2}{4} \\
 B_3 &= \dot{u}_{a(x,t)}^2 + \dot{v}_{a(x,t)}^2 + \dot{w}_{a(x,t)}^2 + \dot{u}_{b(x,t)}^2 + \dot{v}_{b(x,t)}^2 + \dot{w}_{b(x,t)}^2 + \dot{u}_{c(x,t)}^2 + \dot{v}_{c(x,t)}^2 + \dot{w}_{c(x,t)}^2 \\
 B_4 &= \dot{v}'_{a(x,t)} + \dot{v}'_{b(x,t)} + \dot{v}'_{c(x,t)} \\
 B_5 &= \dot{w}'_{a(x,t)} + \dot{w}'_{b(x,t)} + \dot{w}'_{c(x,t)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

3.2 Energía del modelo simplificado

Como se dijo anteriormente, reemplazando el campo de desplazamientos (Ec. 2) en cada uno de los funcionales de energía determinados para el reticulado espacial (Ecs. 3, 5-7, 9 y 11), se obtiene la energía mecánica total del sistema referida a su eje baricéntrico:

$$L_o = V_o - T_o \tag{13}$$

siendo $V_o = (U_o - W_o)$ la energía potencial del sistema y T_o la energía cinética. En cuanto al trabajo de las cargas externas W_o , se ha aceptado que las cargas y pares externos aplicados en los largueros presentan igual valor en cada uno de ellos ($P_{jk} = P_{jo}$, $q_{jk} = q_{jo}$ y $M_{jk} = M_{jo}$, con $j = u, v, w$ y $k = a, b, c$). En cuanto al peso propio, se lo ha definido como:

$$p_k = \left(\rho_l g A_l + \rho_d g \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) = p_o, \text{ con } k = a, b, c$$

4 ECUACIONES DE CAMPO DEL PROBLEMA

La aplicación del principio de Hamilton, al funcional de la energía mecánica del sistema reducido al eje baricéntrico, conduce directamente a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del problema analizado. Las ecuaciones diferenciales resultan en un sistema lineal de 6x6 (6ED), a derivadas parciales en la variable espacial x y temporal t , y corresponden a los 6 GL del sistema equivalente, *i.e.*, dos corrimientos transversales, dos giros flexionales, un corrimiento axial y un giro torsional:

$$(EA)_o u''_{o(x,t)} - (\rho A)_o \ddot{u}_{o(x,t)} + r_d \ddot{u}''_{o(x,t)} - 3(p_o + q_{uo(x,t)}) = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 3E_l J_{ly} v_o''''_{(x,t)} - (GA)_o (v''_{o(x,t)} - \theta'_{wo(x,t)}) - 3(P_{uo(t)} + p_o x) v''_{o(x,t)} - 3p_o v'_{o(x,t)} + \\
 + (\rho A)_o \ddot{v}_{o(x,t)} - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \ddot{v}''_{o(x,t)} - 3q_{vo(x,t)} = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 3E_l J_{lz} w_o''''_{(x,t)} - (GA)_o (w''_{o(x,t)} - \theta'_{vo(x,t)}) - 3(P_{uo(t)} + p_o x) w''_{o(x,t)} - 3p_o w'_{o(x,t)} + \\
 + (\rho A)_o \ddot{w}_{o(x,t)} - (3\rho_l J_{lz} + r_d) \ddot{w}''_{o(x,t)} - 3q_{wo(x,t)} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{wo(x,t)}'''' - \left[(GJ_x)_o + \frac{3e^2}{2} (P_{wo(t)} + p_o x) \right] \theta_{wo(x,t)}'' - \frac{3e^2}{2} p_o \theta_{wo(x,t)}' + \\ + (\rho J_x)_o \ddot{\theta}_{wo(x,t)} - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}_{wo(x,t)} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo(x,t)}'' + (GA)_o (w'_{o(x,t)} - \theta_{vo(x,t)}) - \\ - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \ddot{\theta}_{vo(x,t)} + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{vo(x,t)} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{wo(x,t)}'' + (GA)_o (v'_{o(x,t)} - \theta_{wo(x,t)}) - \\ - \frac{(\rho J_x)_o}{2} \ddot{\theta}_{wo(x,t)} + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}_{wo(x,t)} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

En donde se ha definido a:

$$\begin{aligned} (EA)_o &= 3(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \\ (GA)_o &= \frac{3}{2} E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ (GJ_x)_o &= \frac{1}{4} E_d A_d e^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ (\rho A)_o &= 3 \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \right) \\ (\rho J_x)_o &= \left(\rho_l A_l + \rho_d \frac{A_d}{2 \sin \alpha} \right) e^2 \end{aligned} \quad (20)$$

respectivamente como la rigidez axial, la rigidez transversal, la rigidez torsional, la inercia traslacional, y la inercia torsional global del sistema respecto a las direcciones principales de su eje baricéntrico. $J_{lp} = J_{ly} + J_{lz}$, resulta ser el momento de inercia polar de cada larguero respecto de sus ejes locales. Por otro lado, el término definido como:

$$r_d = \rho_d \frac{A_d}{\sin \alpha} \frac{\Delta^2}{4} \quad (21)$$

está relacionado a un aporte inercial de las diagonales debido a que las velocidades de los nodos que se encuentran por fuera de la sección de referencia han sido aproximadas vía una serie de Taylor. Es decir, este aporte inercial está asociado al término aproximante de primer orden que aparece en dicha serie. Por otro lado, trabajando con las Ecs. (15) y (19) (o con Ecs. 16 y 18) a fin de poner $\theta_{wo(x,t)}$ en función $v_{o(x,t)}$ (o $\theta_{vo(x,t)}$ en función $w_{o(x,t)}$), se puede definir a:

$$\begin{aligned} (EJ_y)_o &= 3E_l J_{ly} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\ (EJ_z)_o &= 3E_l J_{lz} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\ (\rho J_y)_o &= 3\rho_l J_{ly} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + \frac{(EA)_o (\rho A)_o e^2}{(GA)_o 6} + r_d \\ (\rho J_z)_o &= 3\rho_l J_{lz} + \frac{(\rho J_x)_o}{2} + \frac{(EA)_o (\rho A)_o e^2}{(GA)_o 6} + r_d \end{aligned} \quad (22)$$

respectivamente como las rigideces e inercias flexionales globales del sistema respecto a las direcciones principales del eje baricéntrico. Estas definiciones (Ecs. 20 y 22) resultan ser las propiedades equivalentes para la modelación del reticulado espacial como viga-columna.

Observando el sistema de ecuaciones diferenciales, se puede establecer que tanto el corrimiento axial como el giro torsional son movimientos que actúan desacopladamente, mientras que se presenta un acoplamiento entre los giros flexionales y los corrimientos transversales.

De este modo, se ha obtenido la formulación general del modelo de orden reducido que permite la representación simplificada del mástil reticulado analizado. En dicha formulación quedan incorporados los efectos asociados a rigideces e inercias locales de largueros y diagonales, así como también a la influencia del efecto de 2^{do} orden y de las deformaciones por corte.

5 CONDICIONES DE BORDE

En cuanto a las condiciones de borde (C.B.) para este modelo de orden reducido, resultan:

$$\left| \left[(EA)_o u'_{o(x,t)} + r_d \ddot{u}'_{o(x,t)} - 3P_{uo(t)} \right] \mathcal{U}_{o(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (23)$$

$$\left| \left[3E_l J_{ly} v'''_{o(x,t)} - (GA)_o (v'_{o(x,t)} - \theta_{vo(x,t)}) - 3(P_{uo(t)} + p_o x) v'_{o(x,t)} - \right. \right. \\ \left. \left. - (3\rho_l J_{ly} + r_d) \ddot{v}'_{o(x,t)} - 3P_{vo(t)} \right] \mathcal{V}_{o(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (24)$$

$$\left| \left[3E_l J_{lz} w'''_{o(x,t)} - (GA)_o (w'_{o(x,t)} - \theta_{wo(x,t)}) - 3(P_{uo(t)} + p_o x) w'_{o(x,t)} - \right. \right. \\ \left. \left. - (3\rho_l J_{lz} + r_d) \ddot{w}'_{o(x,t)} - 3P_{wo(t)} \right] \mathcal{W}_{o(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (25)$$

$$\left| \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta'''_{uo(x,t)} - \left[(GJ_x)_o + \frac{3e^2}{2} (P_{uo(t)} + p_o x) \right] \theta'_{uo(x,t)} - e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \ddot{\theta}'_{uo(x,t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(GJ_x)_o}{e} (3\theta_{vo(x,t)} - \sqrt{3}\theta_{wo(x,t)}) - M_u(t) \right\} \mathcal{G}_{uo(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (26)$$

$$\left| \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{vo(x,t)} - \frac{e (GA)_o}{2} \theta_{uo(x,t)} + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}'_{vo(x,t)} - M_v(t) \right] \mathcal{G}_{vo(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (27)$$

$$\left| \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo(x,t)} + \frac{\sqrt{3}e (GA)_o}{6} \theta_{uo(x,t)} + \frac{e^2 r_d}{6} \ddot{\theta}'_{wo(x,t)} - M_w(t) \right] \mathcal{G}_{wo(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (28)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v''_{o(x,t)} - M_{wo(t)} \right) \mathcal{V}'_{o(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (29)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w''_{o(x,t)} - M_{vo(t)} \right) \mathcal{W}'_{o(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (30)$$

$$\left| \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''_{uo(x,t)} \right) \mathcal{G}'_{uo(x,t)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (31)$$

Estas C.B. surgen luego de aplicar el principio de Hamilton, y de integrar por partes las variaciones de los funcionales de energía potencial y cinética. El resultado de esta integración, da lugar a la incorporación de términos en el contorno conocidos como las C.B. del problema, obteniendo así dieciocho (18) C.B., (9 por extremo), necesarias para resolver el sistema diferencial (dado que el sistema presenta orden 18). Los términos \mathcal{U}_o , \mathcal{V}_o , \mathcal{W}_o , \mathcal{G}_{uo} , \mathcal{G}_{vo} y \mathcal{G}_{wo} representan las variaciones de los corrimientos y giros cinemáticamente admisibles (compatibles con las condiciones de vínculo) del eje baricéntrico. A fin de asignar de manera correcta las C.B. a cada caso particular, se deben tener presente las C.B. en los largueros del reticulado espacial. Por ejemplo, si en uno de los extremos del reticulado los largueros presentan, los corrimientos en las tres direcciones principales (x , y , z) impedidos, esto dará lugar a que las C.B. cinemáticas para el eje baricéntrico sean las de restricción del corrimiento en las tres direcciones principales y del giro alrededor de dichos ejes principales. Al mismo tiempo, para estas condiciones de borde del reticulado, los giros locales en los extremos de los largueros no están impedidos.

6 SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES NATURALES

Liberando al reticulado de cargas aplicadas y aceptando modos de armónicos de vibración para el sistema, resulta:

$$\begin{aligned} \left\{ u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo} \right\}_{(x,t)} &= \left\{ u_o, v_o, w_o, \theta_{uo}, \theta_{vo}, \theta_{wo} \right\}_{(x)} e^{i\omega t} \\ \left\{ \mathcal{U}_o, \mathcal{V}_o, \mathcal{W}_o, \mathcal{G}_{uo}, \mathcal{G}_{vo}, \mathcal{G}_{wo} \right\}_{(x,t)} &= \left\{ \mathcal{U}_o, \mathcal{V}_o, \mathcal{W}_o, \mathcal{G}_{uo}, \mathcal{G}_{vo}, \mathcal{G}_{wo} \right\}_{(x)} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (32)$$

siendo ω la frecuencia circular e $i \equiv \sqrt{-1}$. Reemplazando esta propuesta de separar variables en el sistema diferencial, Ecs (14)-(19), se obtiene:

$$(EA)_o u''_{o(x)} + (\rho A)_o \omega^2 u_{o(x)} - r_d \omega^2 u''_{o(x)} = 0 \quad (33)$$

$$3E_l J_{ly} v''''_{o(x)} - (GA)_o (v''_{o(x)} - \theta'_{wo(x)}) - (\rho A)_o \omega^2 v_{o(x)} + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 v''_{o(x)} = 0 \quad (34)$$

$$3E_l J_{lz} w''''_{o(x)} - (GA)_o (w''_{o(x)} - \theta'_{vo(x)}) - (\rho A)_o \omega^2 w_{o(x)} + (3\rho_l J_{lz} + r_d) \omega^2 w''_{o(x)} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''''_{uo(x)} - (GJ_x)_o \theta''_{uo(x)} - (\rho J_x)_o \omega^2 \theta_{uo(x)} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \theta''_{uo(x)} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\theta''_{vo(x)} + (GA)_o(w'_{o(x)} - \theta_{vo(x)}) + \frac{(\rho J_x)_o}{2}\omega^2\theta_{vo(x)} - \frac{e^2r_d}{6}\omega^2\theta''_{vo(x)} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\theta''_{wo(x)} + (GA)_o(v'_{o(x)} - \theta_{wo(x)}) + \frac{(\rho J_x)_o}{2}\omega^2\theta_{wo(x)} - \frac{e^2r_d}{6}\omega^2\theta''_{wo(x)} = 0 \quad (38)$$

siendo un sistema diferencial lineal, ordinario en la variable espacial x y homogéneo, a coeficientes constantes, que da lugar a un típico problema de autovalores. Los autovalores son las frecuencias naturales circulares ω_n ($n = 1, 2, \dots$). Dichas frecuencias se hallan proponiendo la solución exponencial clásica para las funciones espaciales incógnitas:

$$\begin{aligned} u_{o(x)} &= Ue^{\lambda x} \\ v_{o(x)} &= Ve^{\lambda x} \\ w_{o(x)} &= We^{\lambda x} \\ \theta_{uo(x)} &= \Theta e^{\lambda x} \\ \theta_{vo(x)} &= \Phi e^{\lambda x} \\ \theta_{wo(x)} &= \Psi e^{\lambda x} \end{aligned} \quad (39)$$

donde en general λ es una constante compleja. Reemplazando estas propuestas de solución en el sistema diferencial espacial, (Ecs. 33-38), se obtiene:

$$(EA)_o\lambda^2U + (\rho A)_o\omega^2U - r_d\omega^2\lambda^2U = 0 \quad (40)$$

$$3E_lJ_{ly}\lambda^4V - (GA)_o(\lambda^2V - \lambda\Psi) - (\rho A)_o\omega^2V + (3\rho_lJ_{ly} + r_d)\omega^2\lambda^2V = 0 \quad (41)$$

$$3E_lJ_{lz}\lambda^4W - (GA)_o(\lambda^2W - \lambda\Phi) - (\rho A)_o\omega^2W + (3\rho_lJ_{lz} + r_d)\omega^2\lambda^2W = 0 \quad (42)$$

$$\frac{e^2E_lJ_{lp}}{2}\lambda^4\Theta - (GJ_x)_o\lambda^2\Theta - (\rho J_x)_o\omega^2\Theta + e^2\left(\frac{\rho_lJ_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3}\right)\omega^2\lambda^2\Theta = 0 \quad (43)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\lambda^2\Phi + (GA)_o(\lambda W - \Phi) + \frac{(\rho J_x)_o}{2}\omega^2\Phi - \frac{e^2r_d}{6}\omega^2\lambda^2\Phi = 0 \quad (44)$$

$$\frac{e^2(EA)_o}{6}\lambda^2\Psi + (GA)_o(\lambda V - \Psi) + \frac{(\rho J_x)_o}{2}\omega^2\Psi - \frac{e^2r_d}{6}\omega^2\lambda^2\Psi = 0 \quad (45)$$

siendo este un sistema algebraico, lineal y homogéneo en las constantes U, V, W, Θ, Φ y Ψ .

6.1 Vibración axial

Dado que el movimiento axial actúa desacopladamente respecto de los demás movimientos, la ecuación algebraica (Ec. 40) correspondiente la podemos reescribir como:

$$\left[(EA)_o - r_d\omega^2\right]\lambda^2 + (\rho A)_o\omega^2 = 0 \quad (46)$$

Las dos raíces λ_j ($j = 1, 2$) que podemos obtener de esta ecuación algebraica, y que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de la forma modal en función de dos constantes (U_j con $j = 1, 2$) a determinar a partir de las C.B., y con ello las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Correspondientemente a cada frecuencia n-ésima le corresponde el autovector o forma modal n-ésima:

$$u_{o(x)}^{(n)} = U_j^{(n)}e^{\lambda_j^{(n)}x} \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

6.2 Vibración flexional

Dado que hay acoplamiento entre el corrimiento transversal y el giro flexional, las ecuaciones algebraicas (Ecs. 41, 45) correspondientes al corrimiento v_o y al giro θ_{wo} pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} C_1 V + C_2 \Psi &= 0 \\ C_2 V + C_3 \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

en donde se ha definido a:

$$\begin{aligned} C_1 &= 3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 \lambda^2 - (\rho A)_o \omega^2 = 0 \\ C_2 &= (GA)_o \lambda \\ C_3 &= \frac{e^2 (EA)_o \lambda^2}{6} - \frac{e^2 r_d \omega^2 \lambda^2}{6} - (GA)_o + \frac{(\rho J_x)_o \omega^2}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

y la condición de solución no trivial del sistema (48) es una ecuación algebraica de sexto orden en λ :

$$C_1 C_3 - C_2^2 = 0 \quad (50)$$

Las seis raíces λ_j ($j = 1, \dots, 6$), que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de las formas modales en función de doce (12) constantes a determinar (V_j y Ψ_j con $j = 1, \dots, 6$). Reemplazadas estas constantes en el sistema (48), tenemos que:

$$\Psi_j = -\frac{C_{1j}}{C_{2j}} V_j \quad j = 1, \dots, 6 \quad (51)$$

y con ello el número de constantes arbitrarias reducirse solo a seis (6). De este modo y a partir de las C.B. se determinan las constantes V_j y Ψ_j , y las n -ésimas frecuencias circulares ω_n . Correspondientemente a cada frecuencia n -ésima se tienen los autovectores o formas modales n -ésimas:

$$\begin{aligned} v_{o(x)}^{(n)} &= V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta_{wo(x)}^{(n)} &= \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Análogamente y con un desarrollo equivalente se obtiene:

$$\begin{aligned} w_{o(x)}^{(n)} &= W_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta_{vo(x)}^{(n)} &= \Phi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

6.3 Vibración torsional

Al igual que en el movimiento axial, el giro torsional actúa desacopladamente respecto de los demás movimientos, y la ecuación algebraica correspondiente (Ec. 43) la podemos reescribir como:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda^4 + \left[e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 - (\rho J_x)_o \omega^2 = 0 \quad (54)$$

Las cuatro raíces λ_j ($j = 1, \dots, 4$) que podemos obtener de esta ecuación algebraica, y que dependen evidentemente de ω , nos permiten disponer de la forma modal en función de cuatro constantes (Θ_j con $j = 1, \dots, 4$) a determinar a partir de las C.B., y con ello las infinitas (contables) frecuencias circulares ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Correspondientemente a cada frecuencia n-ésima se tiene el autovector o forma modal n-ésima:

$$\theta_{uo(x)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} x} \quad j = 1, \dots, 4 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

7 IMPLEMENTACION DEL MODELO SIMPLIFICADO

Se analiza el caso correspondiente a un reticulado bajo la condición de vínculo apoyado-apoyado (A-A). En este caso los extremos de los largueros presentan restringidos los corrimientos en las direcciones principales de y y z . Para otras condiciones de vínculo (ver Fig. 3) el procedimiento será equivalente.

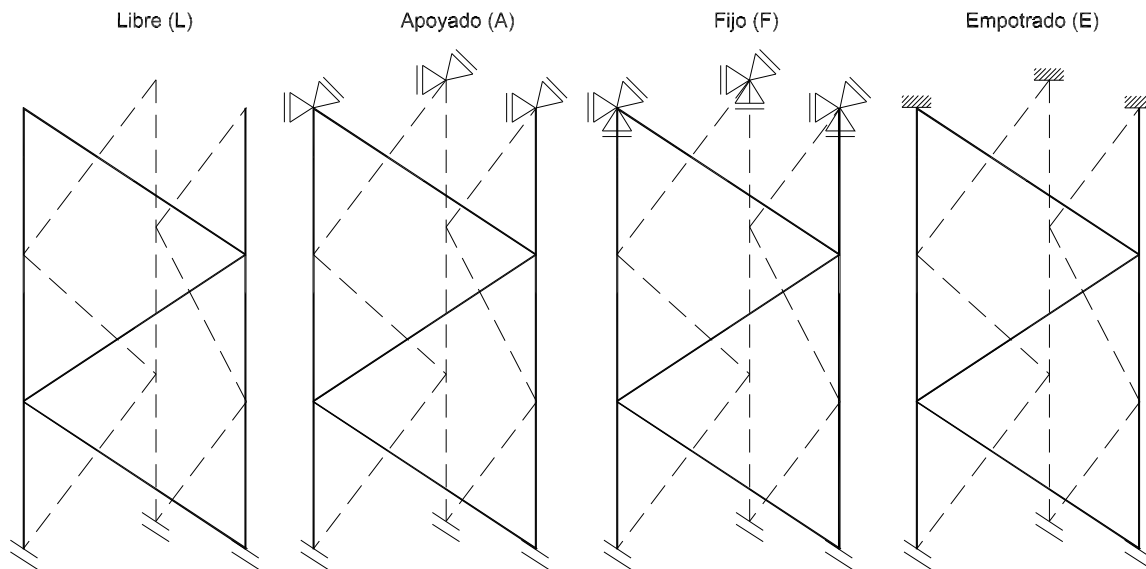


Figura 3: Condiciones de vínculo

7.1 Vibración axial

La C.B. del eje baricéntrico para el movimiento axial, habiendo hecho separación de variables, resulta:

$$\left| \left[(EA)_o u'_{o(x)} - r_d \omega^2 u'_{o(x)} \right] \mathcal{U}_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (56)$$

Por lo tanto para este caso particular se obtiene que:

$$\left| u'_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (57)$$

y reemplazando por la solución exponencial clásica propuesta y evaluada en los bordes:

$$\begin{aligned} u'_{o(0)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} = 0 & \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ u'_{o(L_l)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} U_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} = 0 & \quad j = 1, 2 \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (58)$$

resultando en un sistema algebraico lineal y homogéneo, en donde la condición de no trivialidad exige que el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema sea nulo, con lo cual:

$$e^{\lambda_1^{(n)} L_l} - e^{\lambda_2^{(n)} L_l} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

De este modo, asignando un valor inicial a ω en Ec. (46), se determinan las raíces λ_1 y λ_2 , y si dicho valor asignado es el adecuado, entonces se verificará la condición de no trivialidad. A la menor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1 , a la frecuencia siguiente ω_2 , y así sucesivamente.

7.2 Vibración flexional

Las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\begin{aligned} \left[\left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + (3\rho_l J_{ly} + r_d) \omega^2 v_o'(x) \right] \mathcal{V}_{o(x)} \right]_{x=0}^{x=L_l} &= 0 \\ \left[\left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo}(x) - \frac{\sqrt{3}e (GA)_o}{2} \theta_{wo(x,t)} - \frac{e^2 r_d}{6} \omega^2 \theta'_{wo(x)} \right] \mathcal{G}_{wo(x)} \right]_{x=0}^{x=L_l} &= 0 \\ \left[\left(3E_l J_{ly} v_o''(x,t) \right) \mathcal{V}'_{o(x,t)} \right]_{x=0}^{x=L_l} &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Por lo tanto para este caso particular, y como se verá más adelante estando el giro torsional restringido en los bordes, resulta:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{V}_{o(x)} \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 &\equiv \left[v_{o(x)} \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \\ &\left[\theta'_{wo(x)} \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \\ &\left[v_o''(x) \right]_{x=0}^{x=L_l} = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

y reemplazando por la solución exponencial clásica propuesta y evaluada en los bordes:

$$\begin{aligned} v_{o(0)}^{(n)} = V_j^{(n)} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta'_{wo(0)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{o(0)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{o(L_l)}^{(n)} = V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta'_{wo(L_l)}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \Psi_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{o(L_l)}''^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} V_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} &= 0 & j = 1, \dots, 6 & \quad y \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (62)$$

resulta así en un sistema de doce (12) ecuaciones algebraicas y homogéneas. Como vimos anteriormente, podemos poner $\Psi_j^{(n)}$ en función de $V_j^{(n)}$, quedando ahora un sistema de seis

(6) ecuaciones algebraicas y homogéneas. La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes de este sistema de seis ecuaciones debe ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω , a partir de la Ec. (50) se determinan las seis raíces λ_j (con $j = 1, \dots, 6$), y si dicho valor asignado a ω es el adecuado, entonces se verificará la condición de no trivialidad. A la menor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1 , a la frecuencia siguiente ω_2 , y así sucesivamente. Análogamente y con un desarrollo equivalente se determinan las frecuencias para el movimiento transversal en z acoplado al giro flexional alrededor del eje y .

7.3 Vibración torsional

Las C.B. del eje baricéntrico para el giro torsional alrededor del eje x , habiendo hecho separación de variables, resultan:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta'''_{uo(x)} - (GJ_x)_o \theta'_{uo(x)} + e^2 \left(\frac{\rho_l J_{lp}}{2} + \frac{r_d}{3} \right) \omega^2 \theta'_{uo(x)} \right. \\ & \left. + \frac{(GJ_x)_o}{e} \left(3\theta_{vo(x)} - \sqrt{3}\theta_{wo(x)} \right) \right\} \mathcal{G}_{uo(x)} \Bigg|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \\ & \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''_{uo(x)} \right) \mathcal{G}'_{uo(x)} \Bigg|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \end{aligned} \right. \quad (63)$$

Por lo tanto para este caso particular resulta que:

$$\left. \mathcal{G}_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \equiv \quad \left. \theta_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \theta''_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (64)$$

y reemplazando por la solución exponencial clásica propuesta y evaluada en los bordes:

$$\begin{aligned} \theta_{uo(0)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} &= 0 & j = 1, \dots, 4 & \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta''_{uo(0)}^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} &= 0 & j = 1, \dots, 4 & \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta_{uo(L_l)}^{(n)} = \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} &= 0 & j = 1, \dots, 4 & \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \\ \theta''_{uo(L_l)}^{(n)} = \lambda_j^{2(n)} \Theta_j^{(n)} e^{\lambda_j^{(n)} L_l} &= 0 & j = 1, \dots, 4 & \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a ω en la Ec. (54), se determinan las cuatro raíces λ_j (con $j = 1, \dots, 4$), y si dicho valor asignado a ω es el adecuado, entonces se verificará la condición de no trivialidad. A la menor frecuencia encontrada y que verifica lo anterior, la definimos como ω_1 , a la frecuencia siguiente ω_2 , y así sucesivamente.

8 EJEMPLO ANALIZADO

Se trata de un reticulado espacial, de sección transversal triangular equilátera ($\beta = 60$ grad.) y cuyas características se indican a continuación: longitud $L_l = 8.0$ m, paso entre diagonales Δ

= 0.2 m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 17 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, Inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 43 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, sección de diagonales $A_d = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, módulo de elasticidad $E = 200000 \text{ Mpa}$ y densidad $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.

Para la modelación del reticulado espacial vía elementos finitos, se implementaron dos modelos: el primero i) denominado RE-EF (ver Fig. 4), en el cual fueron modelados cada uno de los elementos del reticulado utilizando para los largueros elementos tipo viga de dos nodos (80 por cada larguero), y para las diagonales elementos tipo barra también de dos nodos (1 por cada diagonal), y el segundo ii) denominado VC-EF (ver Fig. 5), en el cual el reticulado fue modelado como viga-columna cuyas propiedades equivalentes fueron obtenidas de las Ecs. (20) y (22), utilizando 40 elementos tipo viga de dos nodos. El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 (CSi., 2007).

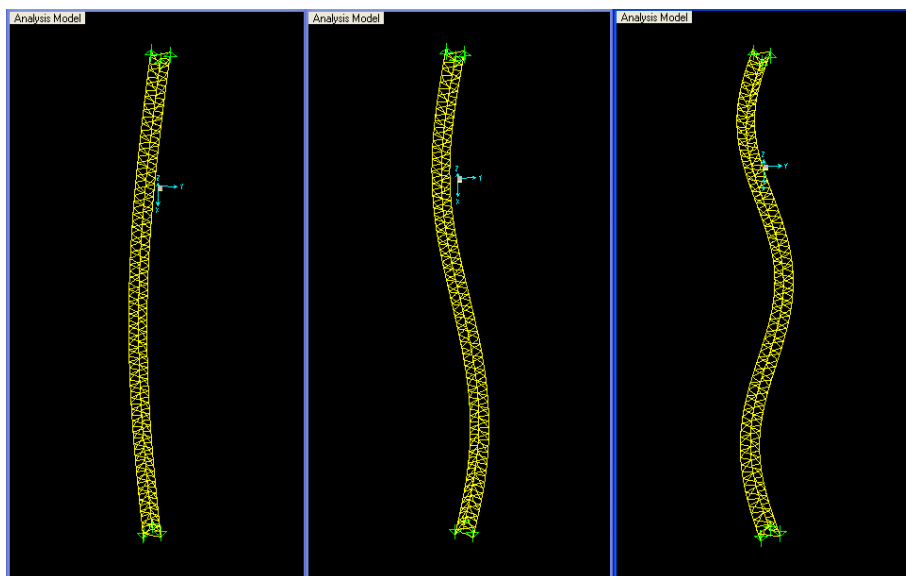


Figura 4: Modelo RE-EF. Modos flexionales caso A-A

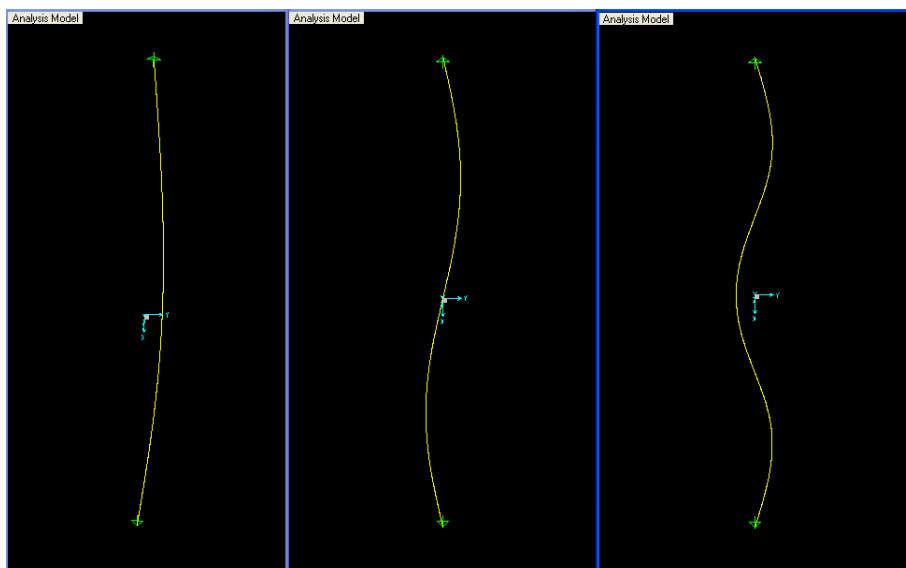


Figura 5: Modelo VC-EF. Modos flexionales caso A-A

En las Tablas 1-6 se muestran los resultados de las tres primeras frecuencias (axiales, flexionales y torsionales) obtenidas mediante la formulación desarrollada en este trabajo (denominada 6ED) y mediante los modelos vía elementos finitos, para el reticulado espacial con distintas condiciones de vinculación. La notación "-" que aparece en algunas de las celdas, indica que mediante el modelo VC-EF no es posible obtener las frecuencias correspondientes ya sea porque el grado de libertad de torsión no está incluido en ese modelo, o bien porque la condición de vínculo extremo de larguero empotrado (E) no puede ser representada por el mismo. Las referencias para las condiciones de vínculo corresponden a las indicadas en la Figura 3.

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 1500.670 | 1499.567 | 1506.759 |
| ω_2^A | 3000.344 | 3006.309 | 3006.309 |
| ω_3^A | 4498.290 | 4487.989 | 4520.277 |
| ω_1^F | 70.619 | 70.360 | 70.598 |
| ω_2^F | 258.358 | 257.508 | 257.930 |
| ω_3^F | 516.081 | 514.593 | 513.752 |
| ω_1^T | 219.176 | 193.686 | - |
| ω_2^T | 439.676 | 388.571 | - |
| ω_3^T | 662.800 | 586.118 | - |

Tabla 1: Reticulado A-A

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 1500.670 | 1499.567 | 1506.759 |
| ω_2^A | 3000.344 | 3006.309 | 3006.309 |
| ω_3^A | 4498.290 | 4487.989 | 4520.277 |
| ω_1^F | 142.160 | 141.769 | 142.153 |
| ω_2^F | 342.051 | 341.107 | 341.477 |
| ω_3^F | 588.908 | 587.214 | 586.118 |
| ω_1^T | 219.176 | 193.686 | - |
| ω_2^T | 439.676 | 388.571 | - |
| ω_3^T | 662.800 | 586.118 | - |

Tabla 2: Reticulado F-F

9 COMENTARIOS FINALES

En trabajos anteriores desarrollado por estos autores se presentó el análisis de un reticulado espacial, realizando un estudio del comportamiento estructural a través de un pasaje del planteo discreto al continuo. El reticulado estudiado correspondió a un reticulado espacial de sección transversal triangular, compuesto por tres largueros con diagonales dispuestas en un patrón del tipo zig-zag. En el presente trabajo, se obtuvieron las ecuaciones de campo de un modelo reducido para la representación simplificada del reticulado espacial. Primeramente se definió un campo de desplazamiento y a partir de ello, se logró referenciar los corrimientos de cada uno de los largueros respecto al eje baricéntrico de la sección transversal del reticulado. De este modo se pudo obtener la energía mecánica desarrollada por el reticulado pero referida al eje

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 1500.670 | 1499.567 | - |
| ω_2^A | 3000.344 | 3006.309 | - |
| ω_3^A | 4498.290 | 4487.989 | - |
| ω_1^F | 143.423 | 142.962 | - |
| ω_2^F | 347.578 | 346.372 | - |
| ω_3^F | 601.594 | 599.541 | - |
| ω_1^T | 226.126 | 199.593 | - |
| ω_2^T | 453.623 | 400.458 | - |
| ω_3^T | 683.837 | 604.152 | - |

Tabla 3: Reticulado E-E

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 750.397 | 750.679 | 753.379 |
| ω_2^A | 2250.694 | 2252.038 | 2260.139 |
| ω_3^A | 3749.497 | 3739.991 | 3762.386 |
| ω_1^F | 104.365 | 104.026 | 104.354 |
| ω_2^F | 301.446 | 300.487 | 300.919 |
| ω_3^F | 553.865 | 552.125 | 551.640 |
| ω_1^T | 219.176 | 193.686 | - |
| ω_2^T | 439.676 | 388.571 | - |
| ω_3^T | 662.800 | 586.118 | - |

Tabla 4: Reticulado A-F

baricéntrico, y luego mediante el cálculo variacional, obtener las ecuaciones de campo (6ED) y las C.B. del problema.

La implementación del modelo simplificado desarrollado, implica un mínimo esfuerzo y costo computacional para abordar la solución del sistema diferencial. Al mismo tiempo, el desarrollo de dicho modelo permitió obtener las propiedades equivalentes necesarias para la modelación, vía elementos finitos, del reticulado como viga-columna. Dichas propiedades equivalentes tienen incorporadas rigideces e inercias locales, así como efectos de segundo orden, las cuales suelen no ser tenidas en cuenta en otros modelos debido a que incrementan el orden del sistema diferencial haciendo más compleja su solución.

Los resultados numéricos obtenidos indican un muy buen desempeño del modelo continuo simplificado (6ED), siendo las máximas diferencias encontradas tanto para las vibraciones axiales como flexionales, del orden del 0.50% respecto de los modelos de EF. En tanto que para las vibraciones torsionales la diferencia resultó ser para todos los casos de aproximadamente el 13%.

El modelo tridimensional empotrando los tres largueros (condición E) restringe la flexibilidad local de los montantes, y dicha condición de vínculo no puede ser representada con el modelo VC-EF. No obstante, al comparar los resultados obtenidos para las condiciones "F" y "E" representadas por los modelos 6ED y RE-EF, se puede ver que la influencia es mínima debido a que los largueros son relativamente esbeltos.

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 750.397 | 750.679 | 753.379 |
| ω_2^A | 2250.694 | 2252.038 | 2260.139 |
| ω_3^A | 3749.497 | 3739.991 | 3762.386 |
| ω_1^F | 25.581 | 25.487 | 25.600 |
| ω_2^F | 146.649 | 146.121 | 146.838 |
| ω_3^F | 366.867 | 365.514 | 366.794 |
| ω_1^T | 109.504 | 96.769 | - |
| ω_2^T | 329.152 | 290.888 | - |
| ω_3^T | 550.707 | 486.691 | - |

Tabla 5: Reticulado L-F

| Frec. | 6ED [rad/seg] | RE-EF [rad/seg] | VC-EF [rad/seg] |
|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ω_1^A | 750.397 | 750.679 | - |
| ω_2^A | 2250.694 | 2252.038 | - |
| ω_3^A | 3749.497 | 3739.991 | - |
| ω_1^F | 25.613 | 25.519 | - |
| ω_2^F | 147.388 | 146.803 | - |
| ω_3^F | 370.105 | 368.515 | - |
| ω_1^T | 111.213 | 98.221 | - |
| ω_2^T | 334.289 | 295.262 | - |
| ω_3^T | 559.305 | 493.961 | - |

Tabla 6: Reticulado L-E

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por el CeReDeTeC, por el Programa de Becas para Docentes de la UTN - Formación de Posgrado, y por el Departamento de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- CSi. *SAP2000 v11 Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc., 2007.
- Elsgoltz L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, 1977.
- Filipich C., Guzmán M., and Rosales M. Planteo discreto-continuo de piezas reticuladas planas y espaciales. *Mecánica Computacional*, XXIX:863–882, 2010.
- Guzmán M., Rosales M., and Filipich C. Planteo y solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la estática de un reticulado espacial. *Sexto Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, 1:187–201, 2011a.
- Guzmán M., Filipich C., and Rosales M. Modelo continuo de un reticulado espacial para problemas dinámicos. *Mecánica Computacional*, XXX:1205–1220, 2011b.
- Kahla B. Equivalent beam-column analysis of guyed towers. *Computers and Structures*, 55(4):631–645, 1995.
- Madagula M., Wahba Y., and Monforton G. Dynamic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 20(12):1097–1101, 1998.
- Wahba Y., Madugula M., and Monforton G. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. *Computers and Structures*, 68:207–212, 1998.