

## UN MODELO ESTRUCTURAL NO-LINEAL DE ALAS FLEXIBLES PARA VEHÍCULOS AÉREOS NO-TRIPULADOS CON ALAS QUE MUTAN

Marcos L. Verstraete<sup>a,b,c</sup>, Sergio Preidikman<sup>a,c</sup>, Luis R. Ceballos<sup>a,b</sup> y Julio C. Massa<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, verstraete.ml@gmail.com, <http://www.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

<sup>c</sup> *CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917 Buenos Aires, Argentina. <http://www.conicet.gov.ar>*

**Palabras Claves:** Morphing-wings, Alas flexibles, Actuadores piezoeléctricos.

**Resumen.** Los vehículos aéreos no-tripulados (UAVs) son un tópico importante de investigación en el campo de la aeronáutica debido a sus potenciales aplicaciones civiles, científicas y comerciales. Un nuevo concepto de UAV que cambia la forma de sus alas durante el vuelo (*morphing-wings*), promete una generación de aeronaves con capacidades de maniobras similares a las que poseen las aves, que no solo realizarán las misiones de una manera más eficiente sino que abarcarán un amplio rango de operaciones inalcanzables para los UAVs convencionales.

En este esfuerzo se presenta el desarrollo de un modelo estructural no-lineal para alas flexibles de UAVs con alas que mutan. El ala es representada mediante una viga bidimensional con actuadores piezoeléctricos adheridos sobre ambas caras del material elástico de la viga. Esta viga resulta, entonces, una estructura tipo “sándwich” formada por: actuador piezoeléctrico + material elástico + actuador piezoeléctrico. Estos actuadores, que han sido seleccionados por sus destacadas ventajas respecto a otros tipos de actuadores, tienen la finalidad de inducir deformaciones localizadas sobre la estructura del ala flexible con el fin de modificar su configuración. El modelo desarrollado en este trabajo considera a los actuadores piezoeléctricos y a la viga como una única estructura continua que satisface las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli, además considera no-linealidades geométricas que son introducidas a través de la relación no-lineal entre deformaciones y desplazamientos del tipo Von Karman. Las ecuaciones diferenciales de movimiento son obtenidas mediante el principio de trabajos virtuales y son discretizadas espacialmente mediante el método de los elementos finitos. La consideración de las no-linealidades geométricas conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales que gobierna la dinámica del sistema viga/actuadores. La inclusión de los actuadores piezoeléctricos, además de producir cambios en la matriz de rigidez y de masa, genera un importante aporte al vector de carga generalizada que depende del estado de deformación de la estructura.

## 1 INTRODUCCIÓN

Un nuevo concepto de aeronaves denominado *Morphing Aircraft* promete una generación de vehículos aéreos no-tripulados (UAVs) que reconfigurarán sus alas durante el vuelo del mismo modo que lo hacen las aves con el objeto de modificar las características aerodinámicas para incrementar el rendimiento aerodinámico, reducir el consumo de energía y adaptarse a múltiples regímenes de vuelo, entre otros.

Algunas de las operaciones que podrán realizar esas aeronaves de avanzada serán: volar entre los apretados recovecos de una ciudad con la finalidad de lograr un monitoreo continuo en ambientes urbanos, aterrizar en forma rápida y eficiente sobre balcones y terrazas de departamentos, pasar por debajo de puentes elevados y explorar atmósferas no terráneas.

El desarrollo completo de estas sofisticadas aeronaves, caracterizadas por su elevada capacidad de maniobra, es hasta el momento algo utópico ya que todavía existen barreras tecnológicas que deben ser superadas. Los mecanismos de actuación utilizados para mutar las alas, juegan un importante rol en el desempeño del UAV. La utilización de mecanismos convencionales resulta insuficiente para obtener la maniobrabilidad que se requiere de tales vehículos, sin embargo ello puede ser resuelto mediante la implementación de una nueva tecnología conocida como estructuras inteligentes (*smart structures*), donde se adhieren materiales adaptivos (actuadores-sensores) sobre una estructura elástica con el objeto de sensar y comandar el estado de la misma. Esto, además de incrementar la agilidad del vehículo, reducirá el consumo energético y evitará la construcción de complejos mecanismos.

El modelado de estructuras inteligentes que incluyen materiales actuadores-sensores del tipo piezoeléctrico ha despertado un gran interés debido a las numerosas aplicaciones en diversas disciplinas de la ingeniería. Se han desarrollado diferentes modelos de elementos finitos para estudiar el comportamiento estático (Ganapathi *et al.*, 2004) y dinámico (Benjeddou *et al.*, 1997; Kusculuoglu *et al.*, 2004) para problemas lineales.

Sin embargo, esos modelos pueden no ser adecuados para condiciones de cargas relativamente grandes que produzcan importantes desplazamientos, es por ello que el modelado de estos tipos de estructuras sometidas a grandes desplazamientos también ha recibido atención por parte de algunos investigadores. En esa dirección Azrar *et al.* (2008) y también Przybylski (2009) realizaron estudios de una viga simplemente apoyada que incluye actuadores piezoeléctricos sometidas a grandes amplitudes de vibración. Ambos enfoques adoptaron la teoría de viga de Euler-Bernoulli y las no-linealidades consideradas fueron del tipo geométricas, las cuales fueron introducidas a través de la relación no-lineal deformación-desplazamiento de Von Karman. Este tipo de no-linealidad también fue adoptada por Belouettar *et al.* (2008) para desarrollar estudios sobre el control activo de vibraciones no lineales de vigas sándwich (material elástico – material piezoeléctrico).

Mukherjee y Chaudhuri (2005) presentaron una formulación generalizada para el análisis dinámico no-lineal de estructuras que incluye materiales piezoeléctricos. Basándose en un enfoque *Lagrangiano Total*, utilizaron el algoritmo desarrollado por Bathe *et al.* (1975). Un enfoque Lagrangiano de este tipo también fue utilizado por Gao y Shen (2003) para desarrollar una ecuación incremental para elementos finitos considerando no-linealidades del tipo geométrico, con el fin de analizar estructuras de placas con materiales piezoeléctricos adheridos. Por otro lado Moita *et al.* (2002) presentaron un modelo de elementos finitos basado en la teoría clásica de placas para análisis estático no-lineal que además de placas permite analizar estructuras de cáscaras con actuadores-sensores piezoeléctricos. La formulación fue basada en un enfoque *Lagrangiano Actualizado*.

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo estructural no-lineal que incorpora actuadores piezoeléctricos, siguiendo los lineamientos de un artículo anterior de los mismos

autores (Verstraete *et al.*, 2011); los actuadores piezoeléctricos y la viga son modelados como una única estructura continua que cumple las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli (Chopra, 2002). Esto permite introducir fácilmente los efectos de los actuadores a través de la deformación libre de los materiales piezoeléctricos generada por la aplicación de un campo eléctrico variable en el tiempo. Los grandes desplazamientos de la estructura, necesarios para obtener cambios importantes en las características aerodinámicas, introducen no linealidades del tipo geométricas que deben ser consideradas en el modelo estructural. Este tipo de no linealidad es introducida a través de la relación no-lineal deformación-desplazamiento del tipo Von Karman. Las ecuaciones de movimientos son obtenidas utilizando el principio de los trabajos virtuales y discretizadas espacialmente mediante el método de los elementos finitos.

## 2 CONCEPTOS GENERALES DE PIEZOELECTRICIDAD

En esta sección se describen brevemente los conceptos básicos del efecto piezoeléctrico, necesarios para comprender el comportamiento de los actuadores que son integrados en la viga en voladizo que representa la estructura del ala del UAV.

### 2.1 Conceptos generales

Los materiales piezoeléctricos exhiben un comportamiento muy interesante que permite utilizarlos, al mismo tiempo, como sensores y actuadores en sistemas mecánicos. Cuando esos materiales se someten a una deformación mecánica, en su interior se genera un campo eléctrico que se manifiesta como una diferencia de potencial en su superficie exterior (*efecto piezoeléctrico directo*), y de manera inversa, cuando se exponen a un campo eléctrico experimentan una deformación mecánica (*efecto piezoeléctrico inverso*).

El efecto piezoeléctrico está ligado al reacomodamiento, durante la deformación, de las partículas cargadas eléctricamente. Cuando existen dos partículas con cargas eléctricas de igual magnitud,  $q$ , y distinto signo, separadas por una distancia  $l$ , se produce un momento eléctrico,  $\mathbf{p}$ , o momento dipolar, dado por la ecuación (1).

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \quad (1)$$

En un cristal donde existen varios dipolos, el momento dipolar resultante es la suma vectorial de los momentos que genera cada dipolo. La polarización  $\mathbf{P}$  se define como el momento dipolar resultante por unidad de volumen, este último es un promedio del volumen de las celdas unitarias.

Si en un material se tiene una distribución de carga eléctrica de manera tal que el centroide de las cargas positivas coincide con el centroide de las cargas negativas, el momento dipolar resultante es nulo y en consecuencia la polarización también lo es ( $\mathbf{P} = 0$ ), a este material se lo conoce como no-polar. Sin embargo cuando un material, no-polar en el estado no deformado, se somete a una deformación mecánica los centros de cargas pueden dejar de coincidir y convertirse en un material polar ( $\mathbf{P} \neq 0$ ) en el estado deformado (caso de los materiales piezoeléctricos). En esta situación la polarización provoca la existencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el interior del material.

Cuando el material es deformado, el campo eléctrico resultante se manifiesta como una diferencia de potencial (o voltaje) sobre la superficie de ese material. La relación entre la intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el voltaje  $V$  es:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2)$$

donde  $\nabla$  es el operador vectorial que en coordenadas cartesianas ortogonales toma la forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3)$$

## 2.2 Descripción de las ecuaciones constitutivas para actuadores piezoeléctricos

Con el fin de proveer una descripción matemática del comportamiento piezoeléctrico, se define un sistema de referencia ( $N$ ) de ejes cartesianos y ortogonales **1**, **2** y **3** como se muestra en la **Figura 1**. Cuando la deformación mecánica en el material y el campo eléctrico son relativamente pequeños, el efecto piezoeléctrico puede ser expresado en término de relaciones constitutivas lineales que son derivadas de consideraciones energéticas y termodinámicas (Chee, 2000):

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{ijk} E_k \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4)$$

donde  $\varepsilon$  es el tensor de deformación,  $s^E$  es el tensor de flexibilidad a campo eléctrico constante,  $\sigma$  es el tensor de tensión mecánica,  $d$  es el tensor de acoplamiento electromecánico que contiene los coeficientes de deformación piezoeléctrica, y  $E$  es el vector campo eléctrico.

Debido a la simetría, los tensores  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , sólo tienen 6 componentes independientes, lo que permite reducir el orden del tensor  $s^E$  y el orden del tensor  $d$ . Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas toman la siguiente forma

$$\varepsilon_i = s_{ij}^E \sigma_j + d_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (5)$$

Es oportuno destacar que los subíndices 4, 5 y 6 en los tensores  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , denotan las tensiones de corte y las deformaciones por corte respectivamente. Para indicar las direcciones de estas tensiones y deformaciones se define un sistema de referencia (**4**, **5**, **6**) asociado al sistema  $N$  de iguales características.

En este trabajo el actuador es considerado como una lámina rectangular de material piezoeléctrico del tipo PZT, cuya geometría es descrita por su longitud  $l_p$ , ancho  $b_p$  y espesor  $t_p$  como se muestra en la **Figura 1**.

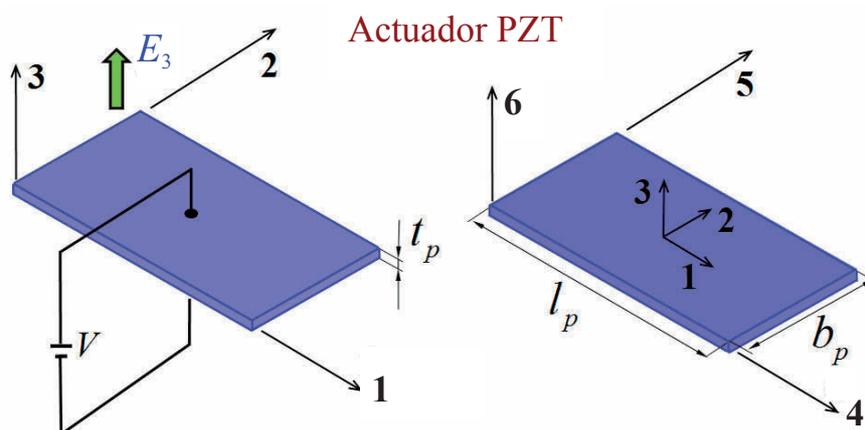


Figura 1: Lámina PZT y sistemas de referencia  $N$ .

Si a una lámina rectangular de material piezoeléctrico del tipo PZT (actuador) se le aplica un campo eléctrico  $E_3$ , variable en el tiempo  $t$  y en la dirección **3**, y además si se restringe parcialmente en la dirección **1**, partiendo de las ecuaciones constitutivas puede encontrarse la siguiente relación,

$$\sigma_1 = Y_p (\varepsilon_1 - d_{31} E_3) \quad (6)$$

donde  $Y_p$  es el módulo de elasticidad del material piezoeléctrico, y  $d_{31}$  es uno de los elementos

del tensor de acoplamiento electromecánico. Luego se define  $\lambda = d_{31} E_3$  con lo que la ecuación (6) se transforma en

$$\sigma_1 = Y_p (\varepsilon_1 - \lambda) \quad (7)$$

Es importante notar que si la lámina no se restringe en la dirección axial, la misma “deforma libremente”, y consecuentemente  $\sigma_1 = 0$ , por lo tanto la ecuación (7) se transforma en,

$$\varepsilon_1 = \lambda \quad (8)$$

es por ello que  $\lambda$  se conoce como *deformación libre*.

Por otro lado es importante mencionar que la aplicación del campo eléctrico también genera sobre la lámina deformaciones  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  en las direcciones **2** y **3** respectivamente, pero debido al modelo de viga adoptado en este trabajo, y de acuerdo a la orientación del PZT sobre la viga (Figura 2), estas deformaciones no se ven involucradas en la formulación del modelo.

Retomando la ecuación (8), la deformación libre  $\lambda(t)$  puede escribirse en términos del voltaje aplicado considerando la ecuación (2),

$$\lambda(t) = d_{31} \frac{V(t)}{t_p} \quad (9)$$

Notar que la deformación libre obedece la misma la ley de variación que el voltaje y se ve amplificada o disminuida a través de las constantes  $d_{31}$  y  $t_p$ .

### 3 EL MODELO ESTRUCTURAL CON ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS

#### 3.1 Introducción

Lo que permite a un ave deformar sus alas es la adaptación de su sistema muscular y de sus huesos. Para realizar maniobras de vuelo, las aves poseen en sus alas un esqueleto similar al que tiene el ser humano en sus brazos, y un sistema muscular que cambia la posición relativa de los huesos. En las alas de un UAV, para reproducir el mismo efecto de deformación y posicionamiento, es necesario modelar un sistema de control compuesto de sensores y actuadores inmersos de manera conveniente en la estructura elástica del ala.

La elección del tipo de actuador que se usará para inducir las deformaciones del ala flexible del UAV es, quizás, la clave para hacer viable esta idea; se requiere de actuadores con poco consumo de energía y poco peso, que sean compactos, de alta eficiencia y larga vida útil. Recientemente, los actuadores piezoeléctricos han sido utilizados para inducir deformaciones controladas en superficies flexibles debido a que cumplen con la mayoría de los requisitos mencionados anteriormente.

En el modelo que proponemos se hace una representación muy simple del ala mediante una viga en voladizo que se extiende a lo largo de la envergadura, a la que se le adhieren actuadores del tipo piezoeléctrico con la finalidad de inducir deformaciones y así causar una deflexión al ala (Figura 2). Los grandes desplazamientos de la estructura del ala, necesarios para cambiar significativamente las características aerodinámicas, introducen no-linealidades que deben ser consideradas en el modelo desarrollado. Las no-linealidades consideradas son del tipo geométrico, mientras que el actuador piezoeléctrico y la viga son considerados materiales linealmente elásticos. En esta instancia el modelo no incluye los sensores ni el algoritmo de control.

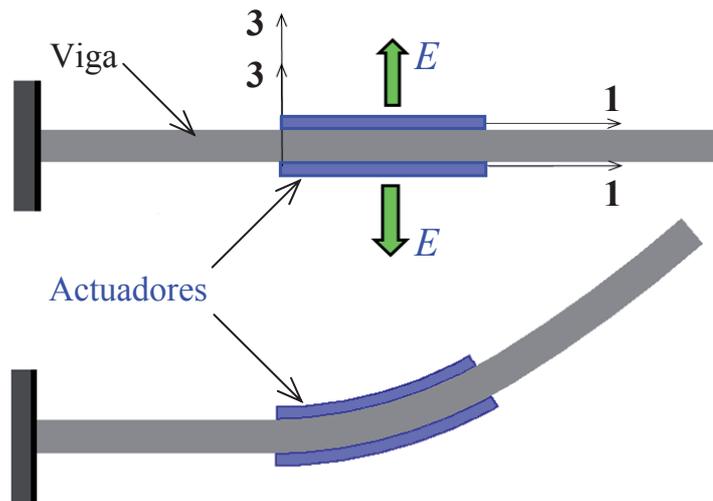


Figura 2: Modelo de ala flexible con actuadores piezoeléctricos distribuidos espacialmente.

Si un par de actuadores idénticos de PZT se adhieren perfectamente en las superficies superior e inferior de la viga, y luego se aplica un campo eléctrico al actuador superior y un campo eléctrico de la misma intensidad pero de sentido opuesto al actuador inferior, se provoca un acortamiento de las fibras superiores de la viga y un alargamiento de las fibras inferiores, lo que resulta en una flexión pura del sistema viga/actuador (Figura 2). Si los voltajes son de distinto signo, y a su vez de distinta magnitud, además de causarse una flexión, el sistema experimenta un alargamiento (o acortamiento) producido por la fuerza inducida por el PZT. Para más información sobre actuadores piezoeléctricos, y la influencia que ellos ejercen sobre estructuras flexibles puede consultarse la referencia Bandyopadhyay *et al.* (2007).

### 3.2 Formulación mediante elementos finitos

En esta sección se presenta la formulación de las ecuaciones de movimiento de una estructura constituida por elementos de viga que incluyen actuadores piezoeléctricos cuya finalidad es inducir deformación sobre dicha estructura. La formulación de estas ecuaciones que son discretizadas espacialmente mediante el método de elementos finitos constituye la base del presente trabajo.

La viga es dividida en un número finito de elementos,  $n_e$ , que están conectados en puntos que se denominan nodos. Un elemento puede estar compuesto, sólo por el material elástico de la viga, o bien tener un par de láminas de PZT (actuadores) adheridas formando una estructura “sándwich” como se ve en la Figura 3. Las propiedades del conjunto viga/actuadores se asumen constante a lo largo de cada elemento.

Se define un sistema de referencia (sistema global) fijo al extremo empotrado de la viga, cuyas coordenadas cartesianas y ortogonales son  $X, Z$ ; y un sistema de referencia (sistema local) fijo a cada elemento cuyas coordenadas son  $x, z$ . En este modelo se consideran 3 grados de libertad por nodo correspondientes a 2 desplazamientos y 1 giro. En la Figura 3, además de los sistemas antes mencionados, se muestra un elemento con sus correspondientes grados de libertad asociados a los nodos “ $i$ ” y “ $j$ ” que determinan el inicio y el fin del elemento.

En una primera etapa se desarrollan las ecuaciones de movimiento para cada uno de los elementos que constituyen la estructura, posteriormente estas ecuaciones deben ensamblarse para armar el sistema de ecuaciones del conjunto que se utilizará para obtener la solución del sistema estructura/actuadores.

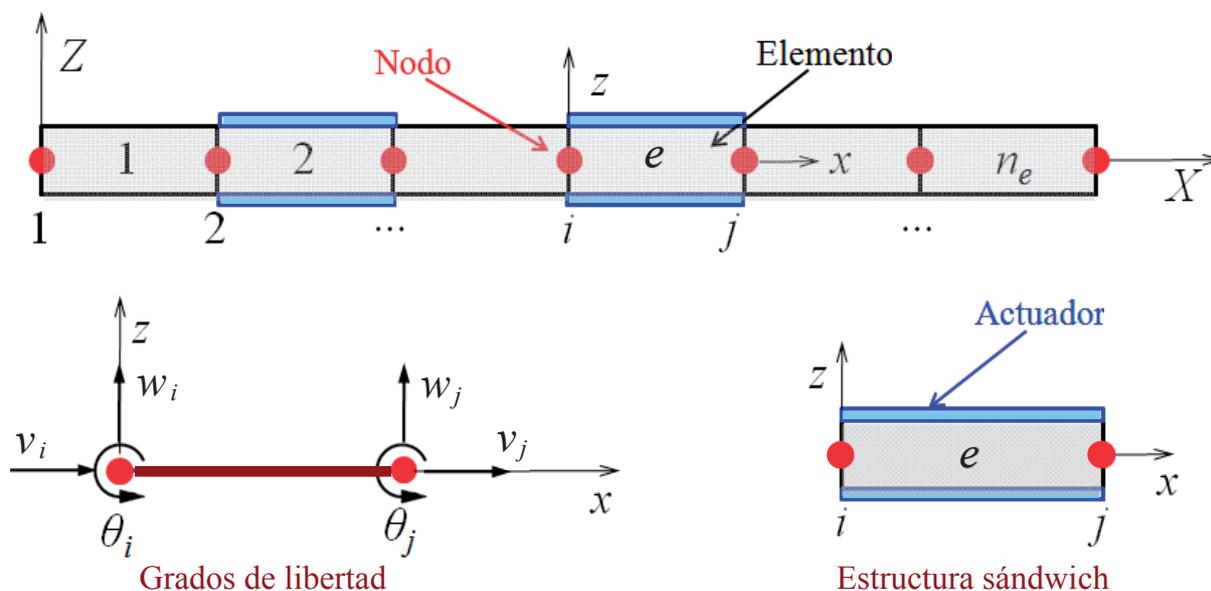


Figura 3: Viga discretizada conteniendo elementos que forman una estructura sándwich. Grados de libertad.

### 3.2.1 Interpolación del campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos en cada instante de tiempo  $t$ , puede representarse mediante un vector  $\mathbf{u}$  cuyas componentes son los desplazamientos longitudinales ' $v$ ' y transversales ' $w$ ' de un punto sobre el eje de la viga.

$$\mathbf{u} = [v(x, z; t) \quad w(x, z; t)]^T \quad (10)$$

De acuerdo a la teoría de Euler-Bernoulli, las componentes del campo de desplazamientos se expresan en función de los desplazamientos incrementales del eje elástico de la viga coincidente con el eje  $x$ ,

$$v(x, z; t) = v^0(x; t) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (11)$$

$$w(x, z; t) = w^0(x; t)$$

donde  $v^0(x)$ , y  $w^0(x)$  son respectivamente los desplazamientos en la dirección ' $x$ ', y ' $z$ ', de un punto del eje elástico. Dentro de cada elemento  $v^0(x)$ , y  $w^0(x)$  se interpolan mediante un conjunto de funciones de forma y los grados de libertad,  $\mathbf{q}$ , asociados a los nodos del elemento.

$$\mathbf{q}^T = [v_i \quad w_i \quad \theta_i \quad v_j \quad w_j \quad \theta_j] \quad (12)$$

El desplazamiento transversal,  $w^0(x)$  que se interpola mediante los polinomios cúbicos de Hermite ( $H_i$ ), incorpora como variables nodales los desplazamientos transversales ( $w_i$  y  $w_j$ ) y sus derivadas, las cuales están asociadas a los giros ( $\theta_i$  y  $\theta_j$ ) causados por la flexión del elemento. El desplazamiento longitudinal,  $v^0(x)$ , se interpola mediante polinomios de primer grado ( $L_i$ ), e incorpora como variables nodales a los desplazamientos axiales ( $v_i$  y  $v_j$ ).

$$\begin{aligned} v^0(x; t) &= v_i(t) L_1(x) + v_j(t) L_2(x) \\ w^0(x; t) &= w_i(t) H_1(x) + w_j(t) H_2(x) + \theta_i(t) H_3(x) + \theta_j(t) H_4(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Reemplazando (13) en (11), el campo de desplazamientos se puede escribir en forma matricial

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -z \frac{\partial H_1}{\partial x} & -z \frac{\partial H_3}{\partial x} & L_2 & -z \frac{\partial H_2}{\partial x} & -z \frac{\partial H_4}{\partial x} \\ 0 & H_1 & H_3 & 0 & H_2 & H_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{N}$  es la matriz de interpolación de desplazamientos. Es importante destacar, que el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  ha sido aproximado mediante una matriz de interpolación y los grados de libertad que representan los desplazamientos y giros de los nodos ubicados sobre el eje elástico. En general cada componente de la matriz  $\mathbf{N}$  es función de las coordenadas 'x' y 'z' mientras que las componentes del vector  $\mathbf{q}$  están en términos del tiempo  $t$ . De esta manera es posible aproximar el desplazamiento, velocidad y aceleración de cada uno de los puntos que constituye la viga en el dominio del tiempo.

### 3.2.2 Interpolación del campo de deformaciones

En este modelo la componente  $\varepsilon_x$  del tensor de Green-Lagrange se aproxima mediante la relación no-lineal deformación-desplazamiento del tipo Von Karman, es decir,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (15)$$

Esta expresión puede escribirse en forma matricial como,

$$\varepsilon_x = \left( \{1 \ 0\} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} \quad (16)$$

y definiendo los vectores  $\mathbf{A}_0$  y  $\mathbf{A}_L$  y el operador  $\mathbf{S}$ ,

$$\mathbf{A}_0 = \{1 \ 0\} \quad \mathbf{A}_L = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (17)$$

es posible expresar a la deformación en forma vectorial de la siguiente manera,

$$\varepsilon_x = \left( \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_L \right) \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (18)$$

Reemplazando la expresión (14), en (18) se llega a,

$$\varepsilon_x = \left( \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_L \right) \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (19)$$

Como  $\mathbf{q}$  no depende de las variables espaciales el operador  $\mathbf{S}$  actúa directamente sobre  $\mathbf{N}$ . Definiendo las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}_0$ , y  $\mathbf{B}_L$

$$\mathbf{G} = \mathbf{S} \mathbf{N} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{G} \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{A}_L \mathbf{G} \quad (20)$$

la ecuación (19) puede escribirse como,

$$\varepsilon_x = \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{q} \quad (21)$$

Es importante en esta instancia tener claro que la deformación es una aproximación, la cual está escrita en términos del vector de coordenadas nodales,  $\mathbf{q}$ , y de las matrices,  $\mathbf{B}_0$  y  $\mathbf{B}_L$ , que comúnmente son denominadas matrices de interpolación de deformaciones.

### 3.2.3 Ecuaciones de movimiento. Principio de trabajo virtual en dinámica

Dado un sólido en equilibrio en el estado deformado, se cumple que el trabajo virtual de las fuerzas exteriores,  $\delta W_E$ , más el trabajo virtual de las fuerzas de inercia,  $\delta W_{IN}$ , es igual al trabajo virtual de las fuerzas internas,  $\delta W_I$ , (Celigüeta, 2010), es decir,

$$\delta W_E + \delta W_{IN} = \delta W_I \tag{22}$$

siendo,

$$\delta W_I = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad \delta W_{IN} = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \quad \delta W_E = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s ds \tag{23}$$

donde  $\Omega$  es el volumen del sólido en el estado no-deformado (configuración de referencia),  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son respectivamente el tensor de deformación (Tensor de Green-Lagrange) y el tensor de tensiones, ambos referidos a la configuración de referencia.  $\ddot{\mathbf{u}}$  es la aceleración,  $\rho$  es la densidad del sólido,  $\mathbf{f}_v$  es la fuerza por unidad de volumen actuado sobre el sólido,  $\mathbf{f}_s$  es la fuerza por unidad de superficie actuado sobre el contorno del sólido,  $v$  y  $s$  son respectivamente el volumen y la superficie del sólido en el estado deformado. La variación en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el resultado de haber aplicado una variación en el campo de desplazamiento,  $\delta \mathbf{u}$ , compatible con las condiciones de borde del sólido.

Para encontrar la ecuación de movimiento de un elemento de viga con actuadores piezoeléctricos, el primer paso consiste en aplicar el principio de trabajos virtuales sobre dicho elemento. El trabajo virtual correspondiente a las fuerzas internas puede expresarse de manera general mediante la ecuación (24), al considerar las ecuaciones constitutivas para materiales piezoeléctricos.

$$\delta W_I = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_x Y(z) (\varepsilon_x - \lambda) d\Omega \tag{24}$$

$$\delta W_I = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_x Y(z) \varepsilon_x d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_x Y(z) \lambda d\Omega \tag{25}$$

donde  $Y$  es el módulo de elasticidad que se ha denotado como dependiente de  $z$  a fin de considerar el material piezoeléctrico y el material elástico de la viga. La integral de la ecuación (25) que se realiza sobre todo el dominio del elemento, se expresa como la suma de tres integrales sobre los sub-dominios  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  que representan respectivamente el volumen que ocupa el actuador superior, el material elástico de la viga y el actuador inferior (ver Figura 4).

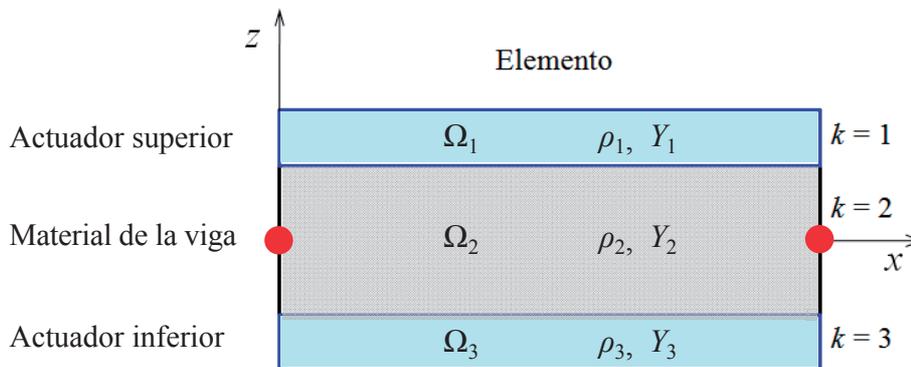


Figura 4: Descripción de la división de dominios del elemento.

Con esto en mente la ecuación (25) puede reescribirse como,

$$\delta W_I = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \delta \varepsilon_x Y_k \varepsilon_x d\Omega_k - \sum_{k=1, k \neq 2}^3 \int_{\Omega_k} \delta \varepsilon_x Y_k \lambda_k d\Omega_k \quad (26)$$

El índice  $k$  hace referencia a cada material (Figura 4). Es por ello que el módulo de elasticidad se ha denotado con un subíndice para indicar que, en principio, es diferente para cada uno de estos materiales. La deformación libre  $\lambda_k$  también se ha denotado con el subíndice puesto que los voltajes aplicados sobre el actuador superior e inferior pueden ser diferentes. Es importante mencionar que como el material de la viga no posee la propiedad de piezoelectricidad no es necesario aplicar ningún voltaje, y por lo tanto  $\lambda_2 = 0$ .

Considerando la expresión (21), la variación de la deformación puede escribirse como

$$\delta \varepsilon_x = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{q} \quad (27)$$

según se deduce más adelante en el apéndice (sección 5). Luego al reemplazar las ecuaciones (21) y (27) en la ecuación (26) se tiene:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{q}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T Y_k \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) d\Omega_k \mathbf{q} - \sum_{k=1, k \neq 2}^3 \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T Y_k \lambda_k d\Omega_k \right\} \quad (28)$$

Notar que el escalar  $\delta \varepsilon_x$  se ha escrito como  $\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T$ . Desarrollando la ecuación (28) se llega a,

$$\delta W_I = \delta \mathbf{q}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \left( \mathbf{B}_0^T Y_k \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T Y_k \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T Y_k \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T Y_k \mathbf{B}_L \right) d\Omega_k \mathbf{q} - \sum_{k=1, k \neq 2}^3 \int_{\Omega_k} \left( Y_k \lambda_k \mathbf{B}_0^T + Y_k \lambda_k \mathbf{B}_L^T \right) d\Omega_k \right\} \quad (29)$$

o en forma compacta,

$$\delta W_I = \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_0 \mathbf{q} + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{q} - \mathbf{Q}) \quad (30)$$

donde  $\mathbf{K}_0$  es la matriz de rigidez lineal,  $\mathbf{K}_{NL}$  es la matriz de rigidez no-lineal que depende del estado de deformación de la estructura, y  $\mathbf{Q}$  es el vector de carga generalizada, al que sólo aportan los actuadores piezoeléctricos. Las expresiones para las matrices de rigidez y el vector de carga generalizada son,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \mathbf{B}_0^T Y_k \mathbf{B}_0 d\Omega_k \\ \mathbf{K}_{NL} &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \left( \mathbf{B}_L^T Y_k \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T Y_k \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T Y_k \mathbf{B}_L \right) d\Omega_k \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=1, k \neq 2}^3 \int_{\Omega_k} \left( Y_k \lambda_k \mathbf{B}_0^T + Y_k \lambda_k \mathbf{B}_L^T \right) d\Omega_k \end{aligned} \quad (31)$$

Por otro lado, el trabajo virtual de las fuerzas de inercia puede expresarse mediante la ecuación (32), considerando los volúmenes que ocupan los actuadores y la viga,

$$\delta W_{IN} = - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \delta \mathbf{u}^T \rho_k \ddot{\mathbf{u}} d\Omega_k \quad (32)$$

donde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  hacen referencia a la densidad del actuador superior, a la viga, y al actuador inferior respectivamente (Figura 4). Los dos puntos sobre el vector  $\mathbf{u}$  denotan la derivada segunda respecto al tiempo (aceleración). Luego a través de la interpolación del campo de desplazamientos se puede obtener,

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} \quad \text{y} \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q} \quad (33)$$

donde los dos puntos sobre  $\mathbf{q}$  denotan aceleración. Reemplazando (33) en (32) se tiene,

$$\delta W_{IN} = - \delta \mathbf{q}^T \left( \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_k \ddot{\mathbf{q}} \right) \quad (34)$$

o en forma más compacta,

$$\delta W_{IN} = - \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}) \quad (35)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa cuya expresión es,

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \rho_k \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_k \quad (36)$$

Considerando que no actúan fuerzas exteriores ( $\delta W_E = 0$ ), y reemplazando las expresiones del trabajo virtual de las fuerzas internas y de inercia en la ecuación (22) se llega a

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{q} + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{q} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (37)$$

Esta expresión debe ser válida para un  $\delta \mathbf{q}$  arbitrario, por lo tanto se debe cumplir que,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{NL}) \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (38)$$

La expresión (38) es la ecuación de movimiento de un elemento que incluye actuadores piezoeléctricos sobre ambas caras del elemento de viga. La ecuación de movimiento para un elemento que no incluye materiales piezoeléctricos se obtiene de manera similar.

Finalmente, como se ha mencionado antes, la ecuación de movimiento de la viga en voladizo se obtiene ensamblando las ecuaciones correspondiente a todos los elementos que constituyen la misma.

### 3.2.4 Vector de carga generalizada $\mathbf{Q}$

El vector de carga generalizada juega un importante rol en este modelo, es por ello que en esta sub-sección se describe su representación integral dada en la ecuación (31). En este vector, que sólo considera la fuerza generalizada que induce el actuador piezoeléctrico, es posible introducir las fuerzas externas sin ningún tipo de dificultad. La expresión de  $\mathbf{Q}$  puede

ser dividida en dos partes de la siguiente manera,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_L \quad (39)$$

siendo

$$\mathbf{Q}_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} Y_k \lambda_k \mathbf{B}_0^T d\Omega_k \quad \mathbf{Q}_L = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} Y_k \lambda_k \mathbf{B}_L^T d\Omega_k \quad (40)$$

Es importante notar la semejanza que existe entre  $\mathbf{Q}_0$  y el vector de carga generalizada obtenido en Verstraete et al. (2011).  $\mathbf{Q}_0$  depende linealmente de la deformación libre pero no depende de los grados de libertad  $\mathbf{q}$ , y por lo tanto se actualiza únicamente en el dominio del tiempo a través de  $\lambda$ . Sin embargo, al considerar la no linealidad geométrica, en el vector  $\mathbf{Q}$  aparece una nueva contribución,  $\mathbf{Q}_L$ , dependiente de  $\mathbf{B}_L^T$  y por lo tanto dependiente de los grados de libertad. Esto implica que la carga que inducen los actuadores piezoeléctricos no solo se actualiza a través de  $\lambda$ , sino que se ve alterada por el estado de deformación de la estructura.

Por otro lado la deformación libre en el material a causa del voltaje aplicado se determina utilizando la ecuación (41),

$$\lambda_1(t) = d_{31} \frac{V_1(t)}{t_p} \quad \lambda_2(t) = 0 \quad \lambda_3(t) = d_{31} \frac{V_3(t)}{t_p} \quad (41)$$

donde  $V_1(t)$  y  $V_3(t)$  son respectivamente los voltajes aplicados sobre el actuador superior e inferior.

#### 4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se desarrolló un modelo estructural de alas flexibles para vehículos aéreos no tripulados con alas que cambian de forma. El ala se modeló mediante una viga bidimensional en voladizo que incluye actuadores piezoeléctricos distribuidos sobre la superficie superior e inferior de la misma, con la finalidad de inducir deformaciones para cambiar la forma de la estructura. Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron a través del principio de trabajos virtuales y el método de elementos finitos.

Las expresiones deducidas para la matriz de rigidez y de masa muestran que la inclusión de los actuadores piezoeléctricos produce cambios en las ecuaciones de movimiento. El vector de carga generalizada sólo considera los efectos que causan los actuadores piezoeléctricos, a través de la deformación libre del material piezoeléctrico.

La consideración de las no-linealidades geométricas condujo a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales que permiten estudiar la dinámica del sistema viga/actuador. Estas no linealidades produjeron cambios respecto al modelo lineal presentado en un trabajo anterior (Verstraete et al., 2011), los cuales se ven reflejados en la matriz de rigidez y en el vector de cargas generalizadas. La representación integral de este vector permitió inferir que la nueva contribución depende del estado de deformación de la estructura.

Como trabajo futuro se va a implementar computacionalmente el modelo aquí presentado para llevar a cabo simulaciones numéricas del comportamiento estático y dinámico de la viga en voladizo que representa el ala del UAV. En una etapa posterior se espera desarrollar un modelo estructural más sofisticado que permita estudiar problemas en tres dimensiones, y luego acoplarlo con un modelo aerodinámico previamente desarrollado por los autores de este trabajo con el fin de llevar a cabo simulaciones aeroelásticas de UAVs reconfigurables.

## 5 APÉNDICE

### Deducción de la ecuación (27)

Al calcular la variación de la expresión (16) se tiene,

$$\delta\varepsilon_x = \{1 \quad 0\} \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left( 0 \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left( 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

donde el término del medio del segundo miembro puede escribirse como,

$$\frac{1}{2} \left( 0 \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left( 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Reemplazando (43) en (42) y reordenando se llega a la siguiente expresión,

$$\delta\varepsilon_x = \{1 \quad 0\} \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} + \left( 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

que puede reescribirse considerando los vectores  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_L$  y el operador  $\mathbf{S}$  dados en (17),

$$\delta\varepsilon_x = \mathbf{A}_0 \mathbf{S} \delta \mathbf{u} + \mathbf{A}_L \mathbf{S} \delta \mathbf{u} \quad (45)$$

Teniendo en cuenta la interpolación del campo de desplazamientos dada en (14) donde  $\mathbf{u} = \mathbf{Nq}$  se tiene que:

$$\delta\varepsilon_x = (\mathbf{A}_0 \mathbf{S} \mathbf{N} + \mathbf{A}_L \mathbf{S} \mathbf{N}) \delta \mathbf{q} \quad (46)$$

Finalmente considerando la definición de las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}_0$  y  $\mathbf{B}_L$  dadas en (20), se llega a la ecuación (47) que coincide con la ecuación (27),

$$\delta\varepsilon_x = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{q} \quad (47)$$

## REFERENCIAS

- Azrar L., Belouettar S. and Wauer J., Nonlinear vibration analysis of actively loaded sandwich piezoelectric beams with geometric imperfections. *Computers and Structures*, 86:2182-2191, 2008.
- Bandyopadhyay B., Manjunath T.C. and Umashathy M., *Modeling, control and implementation of smart structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- Bathe K.J., Ramm E. and Wilson E., Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:353-386, 1975.

- Belouettar S., Azrar L., Daya E.M., Laptev V. and Potier-Ferry M., Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams: A simplified approach. *Computers and Structures*, 86:386-397, 2008.
- Benjeddou A., Trindade M.A. and Ohayon R., A Unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8(12):1012-1025, 1997.
- Celigiüeta J.T., *Análisis de estructuras con no linealidad geométrica*, UNICOPIA C.B., España, 2010.
- Chee C., Static shape control of laminated composite plate smart structure using piezoelectric actuators. Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, Sydney, 2000
- Chopra I., Review of state of art of smart structures and integrated systems. *AIAA Journal*, 40:2145-2187, 2002.
- Ganapathi M., Patel B.P. and Touratier M., A C1 finite element for flexural and torsional analysis of rectangular piezoelectric laminated/sandwich composite beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:584-610, 2004.
- Gao J.X. and Shen Y.P., Active control of geometrically non linear transient vibration of composite plates with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 264: 911-928, 2003.
- Kusculuoglu Z.K., Fallahi B. and Royston T.J., Finite element model of a beam with a piezoceramic patch actuator. *Journal of Sound and Vibration*, 276:27-44, 2004.
- Moita J.S.M., Mota Soares C.M. and Mota Soares C.A., Geometrically nonlinear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators. *Composite Structures*, 57:253-261, 2002.
- Mukherjee A. and Saha Chaudhuri A., Nonlinear dynamic response of piezolaminated smart beams. *Computers and Structures*, 83:1298-1304, 2005.
- Przybylski J., Non-linear vibrations of a beam with a pair of piezoceramic actuators. *Engineering Structures*, 31:2687-2695, 2009.
- Verstraete M.L., Preidikman S., Ceballos L.R. and Massa J.C., Vehículos aéreos no-tripulados con alas que mutan: accionamiento de alas flexibles mediante actuadores piezoeléctricos. *Mecánica Computacional*, 30:1377-1394, 2011.