

## **UN ESQUEMA NO ITERATIVO DE SEGUNDO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN TEMPORAL DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE RICHARDS**

**Luis Guarracino\* y Fernando Basombrío†**

\*Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata  
Paseo del Bosque s/n, 1900 La Plata, Argentina  
e-mail: luisg@fcaglp.unlp.edu.ar, web page: <http://www.fcaglp.unlp.edu.ar>

†Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo, CNEA  
Av. Bustillo 9,500  
8400, Bariloche, R. N., Argentina  
e-mail: fgbe@yahoo.ar, web page:<http://www.ib.edu.ar>

**Palabras claves:** Flujo no saturado, ecuación de Richards, discretización temporal, esquema de segundo orden.

**Resumen.** *La ecuación de Richards es ampliamente utilizada para simular el flujo de agua en medios porosos no saturados. Para su discretización temporal se han empleado esquemas de tipo Euler implícito y Crank-Nicholson combinados con métodos iterativos de Picard o Newton-Raphson para tratar los términos no lineales. Aunque estos métodos iterativos suelen ser robustos su costo computacional puede representar una severa limitación. En este trabajo se propone y analiza una estrategia no iterativa como variante a los métodos mencionados. La estrategia consiste en discretizar la ecuación de Richards mediante un esquema Crank-Nicholson combinado con un método Newton-Raphson linealizado y una extrapolación de Richardson de 3 pasos. Para el caso presente, la precisión del esquema es de segundo orden y resulta incondicionalmente estable para la mayoría de los pasos de tiempos admisibles. El trabajo incluye un análisis de las propiedades del algoritmo mediante la comparación con soluciones analíticas y un ejemplo numérico que muestra que es posible reducir hasta en un orden de magnitud el costo computacional de las simulaciones.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La ecuación de Richards<sup>1</sup> es comúnmente utilizada para simular el flujo de agua en medios porosos total o parcialmente saturados. Esta ecuación es de tipo parabólica altamente no lineal cuando el medio se encuentra no saturado y elíptica lineal cuando el medio está completamente saturado por agua. Debido a la alta no linealidad de la ecuación su resolución numérica suele presentar problemas de convergencia y conservación de masa.<sup>2,3</sup>

La forma más simple de aproximar la ecuación de Richards es empleando un esquema de discretización temporal explícito. Esta aproximación conduce a un sistema lineal de ecuaciones que desde el punto de vista numérico representa la opción menos costosa. Sin embargo, las conocidas restricciones en la estabilidad de los métodos explícitos imponen la utilización de pasos de tiempos muy pequeños aumentando en forma considerable el costo computacional de las simulaciones numéricas.

En general se prefieren los esquemas implícitos incondicionalmente estables para la discretización temporal de la ecuación de Richards. El método ponderado de paso simple es el más utilizado dando lugar a un sistema de ecuaciones no lineales. El sistema de ecuaciones resultante es tratado mediante algún procedimiento iterativo como el método Newton-Raphson o Picard. Estos esquemas suelen ser robustos pero llevan implícito un alto costo computacional asociado a la evaluación y resolución de sistemas de ecuaciones en forma repetitiva en cada paso de tiempo. En particular un esquema Crank-Nicholson combinado con un método clásico de Newton-Raphson o Picard conduce a un algoritmo de segundo orden ( $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ).<sup>4</sup>

El alto costo computacional de los métodos iterativos motivó el diseño de un algoritmo no iterativo como variante a los algoritmos clásicos utilizados. El método propuesto consiste en la utilización de un esquema Crank-Nicholson junto con un método Newton-Raphson linealizado (no iterativo). Desafortunadamente, la utilización del método Newton-Raphson linealizado al caso particular de la ecuación de Richards conlleva la pérdida de un orden en la precisión temporal.<sup>4</sup> Sin embargo la pérdida de este orden puede recuperarse mediante una extrapolación de Richardson de 3 pasos obteniéndose un algoritmo de segundo orden que es incondicionalmente estable para la mayoría de los pasos de tiempo admisibles.<sup>5,6</sup> Resulta interesante destacar que la utilización de método Newton-Raphson clásico (iterativo) en el procedimiento propuesto conduce a un algoritmo de tercer orden ( $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ ) que ha sido implementado con resultados altamente satisfactorios.<sup>7</sup>

El algoritmo propuesto ha sido implementado en dominios bidimensionales utilizándose para su discretización espacial un método Galerkin de elementos finitos. Para reducir aún más el costo computacional de las simulaciones numéricas se implementó un método automatizado de adaptabilidad del paso de tiempo basado en las ideas del trabajo de Módena y otros.<sup>5</sup> Para verificar el orden de la precisión del algoritmo y la conservación numérica de la masa se realizan comparaciones con soluciones analíticas conocidas. Finalmente se presenta un ejemplo que muestra que es posible reducir hasta en un orden el costo computacional de las simulaciones numéricas.

## 2 APROXIMACIÓN ESPACIAL

En el presente trabajo se adoptará la forma mixta de la ecuación de Richards propuesta por Celia y otros:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{K}_s K_r(h) \nabla (h + z)] = 0 \quad (1)$$

siendo  $h$  la altura de presión,  $\theta$  el contenido de agua,  $\mathbf{K}_s$  el tensor conductividad hidráulica saturada,  $K_r(h)$  la función conductividad hidráulica relativa y  $z$  la coordenada vertical (positiva hacia arriba).

Para resolver la ecuación (1) establecemos el siguiente problema diferencial en un dominio bidimensional  $\Omega$  con borde  $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N$  ( $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{K}_s K_r(h) \nabla (h + z)] = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ h(\mathbf{x}, t) = h^*(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma^D \\ -\mathbf{K}_s K_r(h) \nabla (h + z) \cdot \boldsymbol{\nu} = Q^*(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma^N \\ h(\mathbf{x}, 0) = h_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

donde  $h^*$  representa los valores de la altura de presión sobre el borde  $\Gamma^D$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal unitaria exterior a  $\Gamma^N$ ,  $Q^*$  el valor de la componente normal del flujo sobre  $\Gamma^N$  y  $h_0$  la condición inicial para  $h$ . Notar que para resolver (2) se requieren además modelos constitutivos de  $\theta(h)$  y  $K_r(h)$ .

Una formulación débil del problema (2), se establece del siguiente modo:

$$\left( \frac{\partial \theta(h)}{\partial t}, v \right) + a(h, v) = l(v) \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta(h)}{\partial t}, v \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} v \, d\mathbf{x} \\ a(h, v) &= \int_{\Omega} \mathbf{K}_s K_r(h) \nabla h \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ l(v) &= - \int_{\Gamma^N} Q^* v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{K}_s K_r(h) \nabla z \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4)$$

con  $v \in V$ ,  $V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } v = 0 \text{ sobre } \Gamma^D\}$ .

Sin entrar en detalles, el método Galerkin de elementos finitos aplicado a (3) conduce al sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{h})}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{h}) \mathbf{h} = \mathbf{B}(\mathbf{h}) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{h}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  son respectivamente el vector de las incógnitas (altura de presión) y el vector contenido de agua cuyas componentes están definidas en cada uno de los nodos de la malla de elementos finitos. Las componentes de las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{A}$ , y del vector  $\mathbf{B}$  son de la forma:

$$M_{ji} = (\phi_i, \phi_j), \quad A_{ji} = a(\phi_i, \phi_j), \quad B_j = l(\phi_j), \quad (6)$$

donde  $\phi_j$  es la función base lineal correspondiente al nodo  $j$ . Las integrales no lineales de (6) fueron evaluadas mediante una cuadratura de Gauss de segundo orden.

### 3 APROXIMACIÓN TEMPORAL

La discretización temporal de la ecuación se realiza mediante un esquema de paso simple en la que sólo se requiere conocer la solución a un paso de tiempo anterior. En general, un método poderado (también conocido como método  $\alpha$ ) del sistema (5) puede expresarse como

$$\mathbf{M} \frac{\boldsymbol{\theta}_{n+1} - \boldsymbol{\theta}_n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{n+\alpha} \mathbf{h}_{n+\alpha} = \mathbf{B}_{n+\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (7)$$

donde  $\mathbf{h}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{h}_n + \alpha\mathbf{h}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{h}_{n+1})$ ,  $\boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{h}_n)$ ,  $\mathbf{A}_{n+\alpha} = \mathbf{A}(\mathbf{h}_{n+\alpha})$  y  $\mathbf{B}_{n+\alpha} = \mathbf{B}(\mathbf{h}_{n+\alpha})$ .

El paso siguiente consiste en linealizar el sistema (7) empleando un método Newton-Raphson. El algoritmo resultante es de la forma:

$$\mathbf{h}_{n+1}^{(\nu+1)} = \mathbf{h}_{n+1}^{(\nu)} - \left[ D\boldsymbol{\varphi} \left( \mathbf{h}_{n+1}^{(\nu)} \right) \right]^{-1} \boldsymbol{\varphi} \left( \mathbf{h}_{n+1}^{(\nu)} \right) \quad (8)$$

donde las matrices residual y tangente tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} \left( \mathbf{h}_{n+1}^{(\nu)} \right) &= \mathbf{M} \frac{\boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(\nu)} - \boldsymbol{\theta}_n}{\Delta t^{n+1}} + \mathbf{A}_{n+\alpha}^{(\nu)} \mathbf{h}_{n+\alpha}^{(\nu)} - \mathbf{B}_{n+\alpha}^{(\nu)} \\ D\boldsymbol{\varphi} \left( \mathbf{h}_{n+1}^{(\nu)} \right) &= \mathbf{M} \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(\nu)}}{\Delta t^{n+1}} + \alpha \left( D\mathbf{A}_{n+\alpha}^{(\nu)} \mathbf{h}_{n+\alpha}^{(\nu)} + \mathbf{A}_{n+\alpha}^{(\nu)} - D\mathbf{B}_{n+\alpha}^{(\nu)} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

siendo  $\nu$  el nivel de iteración del método.

Para obtener una versión linealizada del algoritmo anterior se realiza una sola iteración de esquema (8) utilizando como condición inicial la solución obtenida en el paso de tiempo anterior (es decir  $\mathbf{h}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{h}_n$ ). Como ya ha sido mencionado, para el caso particular de la ecuación de Richards el algoritmo de Crank-Nicholson linealizado ( $\alpha = 1/2$ ) es  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .<sup>4</sup> La pérdida de un orden debido a la linealización del método motivó la utilización de una extrapolación de Richardson para recuperar el orden  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ .

Como es sabido, la extrapolación de Richardson permite obtener un esquema de orden  $p + 1$  a partir de un esquema de orden  $p$ .<sup>8</sup> Para ello es necesario calcular la solución del problema a un tiempo  $t_{n+1}$  empleando dos pasos de tiempo diferentes. La solución extrapolada estará dada por

$$\mathbf{h}_{n+1}^{RE} = \frac{\mathbf{h}_{n+1}^{q\Delta t} - q^p \mathbf{h}_{n+1}^{\Delta t}}{1 - q^p} + \mathcal{O}(\Delta t^{p+1}) \quad (10)$$

donde  $q = r^{-1}$ ,  $r$  es el número de pasos de la extrapolación,  $\mathbf{h}_{n+1}^{\Delta t}$  es la solución a  $t_{n+1}$  empleando el paso  $\Delta t$  y  $\mathbf{h}_{n+1}^{q\Delta t}$  la solución al mismo tiempo pero utilizando un paso  $q\Delta t$ .

A igualdad de precisión, la opción menos costosa de la extrapolación de Richardson se obtiene al elegir  $r = 2$  (es decir dos pasos). Desafortunadamente, para el esquema de Crank-Nicholson esta elección conduce a un esquema que es condicionalmente estable. Sin embargo, esta condición desaparece casi por completo para  $r = 3$  como se demuestra en el trabajo.<sup>6</sup>

En la siguiente sección se comprueba mediante soluciones analíticas el orden 2 del esquema propuesto y la conservación de la masa. También se presenta un ejemplo numérico en el que se implementa un control dinámico del paso de tiempo que permite reducir sensiblemente el costo computacional de las simulaciones.

## 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1 Ejemplo 1: precisión del algoritmo

Para verificar la precisión del esquema propuesto se utilizó una solución analítica unidimensional de la ecuación de Richards para un caso particular de condiciones de contorno restrictivas. Las relaciones constitutivas consideradas son  $\theta(h) = e^{\alpha h}$  y  $K_r = e^{(\gamma+1)\alpha h}$ , siendo  $\gamma$  y  $\alpha$  parámetros del modelo.

Para el análisis de la precisión consideraremos el siguiente problema diferencial que describe un frente de infiltración que avanza en un suelo completamente no saturado (suelo seco):

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_s K_r(h) \frac{\partial}{\partial z} (h + z) \right] = 0, & z \in [0, L] \\ h(0, t) = -\infty \\ h(L, t) = \frac{1}{\gamma \alpha} \ln \left[ \frac{A}{K_s} (1 - e^{-\gamma \alpha A t}) \right] - L \\ h(z, 0) = -\infty \end{cases} \quad (11)$$

donde  $L$  es la longitud del dominio espacial y  $A$  un parámetro relacionado con la amplitud del frente de saturación. La solución analítica del problema (11) es<sup>7,9</sup>

$$h(z, t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma \alpha} \ln \left[ \frac{A}{K_s} (1 - e^{-\gamma \alpha (A t - L + z)}) \right] + L & z > L - A t \\ -\infty & z \leq L - A t \end{cases} \quad (12)$$

que resulta válida para  $t \in (0, L/A]$ .

Las soluciones numéricas del problema (11) se obtuvieron en dominios bidimensionales con condiciones de flujo nulo en los bordes laterales. Se consideró un dominio rectangular de 1 por 12 unidades de longitud en las direcciones  $x$  y  $z$ , respectivamente. Los valores elegidos para los parámetros hidráulicos del modelo fueron  $K_s = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma = 3$  y  $A = 2$ . Las soluciones se obtuvieron en una malla triangular no estructurada de 245 nodos y se estableció un período total de simulación de 5 unidades de tiempo.

Una de las dificultades que presenta el problema diferencial (11) es la condición inicial de suelo completamente seco ( $h(z, 0) = -\infty$ ). Para poder obtener una solución numérica fue

necesario imponer un valor finito de altura de presión como condición inicial. Esta condición aproximada implica un valor residual del contenido de agua en el medio poroso que introduce una fuente adicional de error que deber' a tenerse en cuenta al analizar los resultados numéricos.

Para evaluar la precisión del esquema se define la siguiente norma para el error:

$$e(\Delta t) = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} (h_k^N - h_k^A)^2 \quad (13)$$

donde  $h_k^N$  es la solución numérica,  $h_k^A$  la solución analítica y  $N_p$  el número total de puntos nodales.

En la Figura 1 se grafican los errores del método Crank-Nicholson linearizado ( $CN^1$ ) y del método que se obtiene al emplear la extrapolación de Richardson de 3 pasos ( $CN^1 + RE$ ). Como se observa claramente en la figura, las pedientes de las curvas muestran un comportamiento lineal y cuadrático respectivamente, verificando los ordenes de precisión predichos por la teoría.

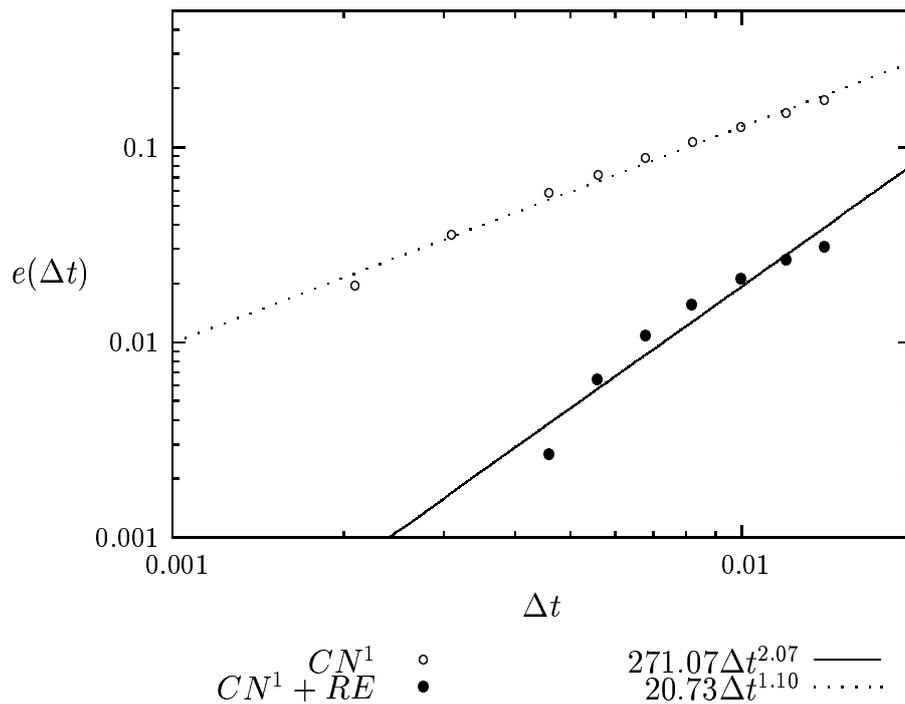


Figure 1: Precisión del esquema de discretización temporal

## 4.2 Ejemplo 2: conservación numérica de la masa

Las aproximaciones numéricas de la ecuación de Richards suelen presentar problemas de conservación de masa debido a su carácter altamente no lineal.<sup>2,3</sup> En el presente ejemplo se analiza

la conservación de la masa global de los distintos esquemas descritos mediante la comparación con una solución analítica.

Si en la solución analítica presentada en el ejemplo anterior se asume un valor unitario para el coeficiente  $\gamma$ , entonces es posible obtener una expresión analítica cerrada para la evolución temporal de la masa global:<sup>7</sup>

$$M_a(t) = \frac{A}{K_s} \left[ At + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha At} - 1) \right]. \quad (14)$$

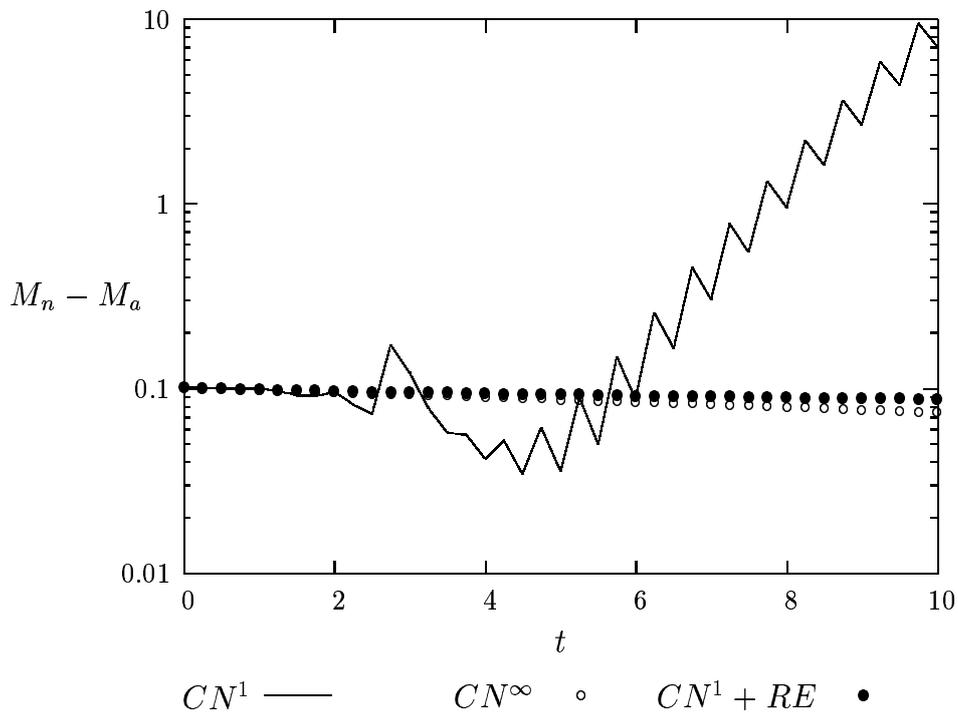


Figure 2: Conservación numérica de la masa

Para el análisis de la conservación de masa consideraremos un ejemplo similar al anterior donde la infiltración se produce en un rectángulo de 1 por 25 unidades de longitud. Los parámetros físicos y de discretización adoptados son  $K_s = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $A = 1$ ,  $N_p = 877$  y  $\Delta t = 0.25$ . En la Figura 2 se ilustra la diferencia entre la masa numérica ( $M_n$ ) y analítica ( $M_a$ ) para los siguientes esquemas: Crank-Nicholson ( $CN^\infty$ ), Crank-Nicholson linealizado ( $CN^1$ ) y Crank-Nicholson linealizado con extrapolación de Richardson de 3 pasos ( $CN^1 + RE$ ). Como se observa en la figura, a  $t = 0$  los 3 esquemas poseen el mismo error. Esto es debido a la condición inicial aproximada adoptada para resolver el problema numérico que se traduce en un valor inicial de masa de agua no nulo. Por otra parte se observa claramente que la conservación de la masa mejora con el aumento en la precisión de los esquemas temporales (recordar que  $CN^1$  es de  $\mathcal{O}(\Delta t)$  mientras que  $CN^\infty$  y  $CN^1 + RE$  son de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ), siendo el algoritmo propuesto ( $CN^1 + RE$ ) levemente más conservativo.

### 4.3 Ejemplo 3: eficiencia computacional

El objetivo de este ejemplo es ilustrar la reducción del costo computacional de las simulaciones numéricas que se obtiene al emplear el algoritmo propuesto en relación a un método iterativo clásico del mismo orden de precisión. Asimismo se implementa un control dinámico del paso de tiempo que permite aumentar aún más la eficiencia del algoritmo.

El ejemplo propuesto describe el avance de un frente irregular de infiltración en un dominio rectangular de 400 cm de longitud por 300 cm de profundidad. La condición inicial corresponde a una altura de presión constante  $h = -300$  cm. En el borde superior del dominio se impuso una condición de borde de tipo Neuman que corresponde a un flujo de  $10^{-5}$  cm/s en el segmento  $0 \leq x < 200$  y de  $5 \cdot 10^{-6}$  cm/s en  $200 \leq x \leq 400$ . En el resto de los bordes se asumieron condiciones de flujo nulo. Para obtener la solución numérica se empleó una malla triangular compuesta por 1436 nodos siendo el tiempo total de simulación de 40 días.

Para describir las propiedades hidráulicas del medio se adoptó el modelo de van Genuchten:<sup>10</sup>

$$\theta(h) = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\hat{\alpha}|h|)^{\hat{n}}]^{\hat{m}}}, & h < 0 \\ \theta_r, & h \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$K_r(h) = \begin{cases} \frac{[1 - (\hat{\alpha}|h|)^{\hat{n}-1}[1 + (\hat{\alpha}|h|)^{\hat{n}}]^{-\hat{m}}]^2}{[1 + (\hat{\alpha}|h|)^{\hat{n}}]^{\hat{m}/2}}, & h < 0 \\ 1, & h \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\theta_r$  es el contenido residual de agua,  $\theta_s$  el contenido máximo de agua,  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{n}$  parámetros del modelo y  $\hat{m} = 1 - 1/\hat{n}$ . En este ejemplo se utilizaron valores de los parámetros correspondientes a un suelo de textura limosa:<sup>11</sup>  $\theta_r = 0.034$ ,  $\theta_s = 0.46$ ,  $\hat{\alpha} = 0.016 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\hat{n} = 1.37$  y  $K_s = 6.0 \text{ cm/día}$ . En la Figura 3 se muestra el perfil de alturas de presión al final de la simulación.

Para mejorar la eficiencia computacional del algoritmo se implementó un control dinámico del paso de tiempo de acuerdo a las ideas presentadas en el trabajo.<sup>5</sup> La adaptabilidad del paso de tiempo se basa en el hecho de que al tiempo  $t^{n+1}$  el algoritmo calcula la solución  $h_{n+1}^{\Delta t/3}$  con paso de tiempo  $\Delta t/3$  y la solución extrapolada  $h_{n+1}^{RE}$ . Estas dos soluciones permiten definir el siguiente error relativo interno:

$$e_r(\Delta t) = 2 \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_p} [h_{k,n+1}^{\Delta t/3} - h_{k,n+1}^{RE}]^2}{\sum_{k=1}^{N_p} [h_{k,n+1}^{\Delta t/3} + h_{k,n+1}^{RE}]^2}}. \quad (17)$$

Luego, imponiendo una tolerancia  $\epsilon_a$  al error relativo  $e_r(\Delta t)$  es posible establecer una estrategia de control dinámico del paso de tiempo según el siguiente criterio: si  $e_r(\Delta t) < \epsilon_a$  entonces  $\Delta t$  se aumenta en un determinado factor y si la condición anterior no se satisface se disminuye  $\Delta t$  en forma proporcional. Este ajuste automático del paso de tiempo es fácil de programar y sólo requiere un mínimo adicional de cálculos.

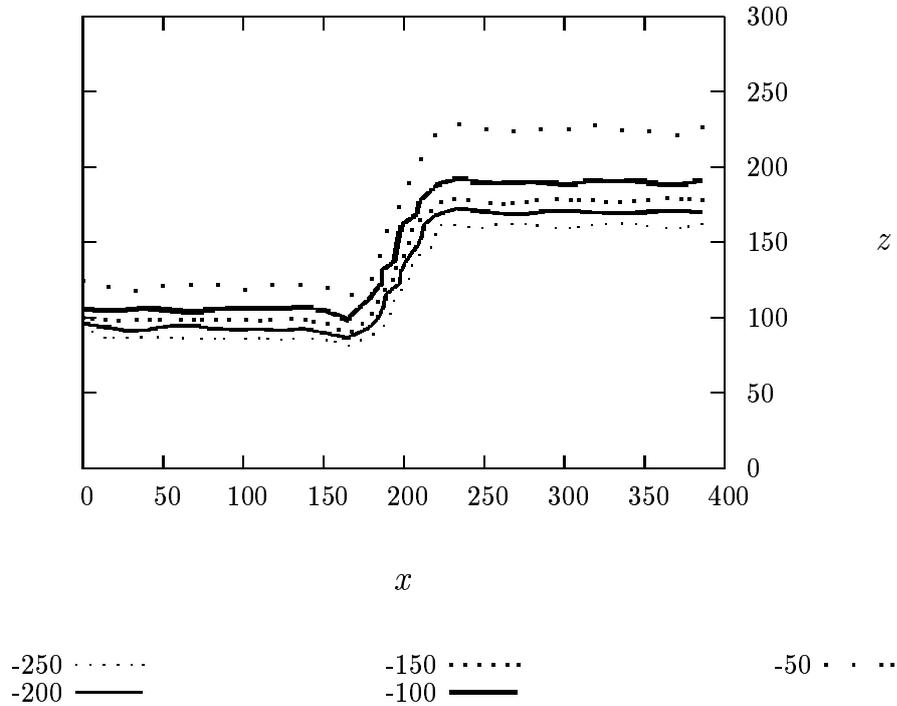


Figure 3: Altura de presión luego de 40 días de simulación

La eficiencia computacional del algoritmo se midió en base al número de problemas lineales resueltos durante el tiempo total de simulación. En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos para los esquemas Crank-Nicholson combinados con un método Newton-Raphson clásico ( $CN^\infty$ ) y con un método Newton-Raphson linealizado y extrapolación de Richardson de 3 pasos ( $CN^1 + RE$ ) con y sin adaptabilidad del paso de tiempo.

	$CN^\infty$	$CN^1 + RE$ (sin adaptabilidad)	$CN^1 + RE$ $\epsilon_a = 10^{-4}$	$CN^1 + RE$ $\epsilon_a = 5 \cdot 10^{-4}$	$CN^1 + RE$ $\epsilon_a = 10^{-3}$
Nro. de problemas	21784	3840	3840	2044	1160

Table 1: Eficiencia computacional

De los resultados obtenidos se concluye que el algoritmo propuesto ( $CN^1 + RE$ ) sin adaptabilidad es aproximadamente 5.6 veces más rápido que el esquema clásico  $CN^\infty$ . Por otra parte, la eficiencia del algoritmo puede incrementarse con el control dinámico del paso de

tiempo hasta en un orden de magnitud siempre y cuando la tolerancia impuesta supere un cierto valor mínimo (en este ejemplo  $\epsilon_a = 10^{-4}$ ).

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un método no iterativo para discretizar temporalmente la ecuación de Richards. El procedimiento propuesto consiste en utilizar un esquema Crank-Nicholson junto con un método Newton-Raphson linealizado y una extrapolación de Richardson de 3 pasos. En el presente caso, el algoritmo resultante es de orden 2 e incondicionalmente estable para la mayoría de los pasos de tiempo admisibles. Los ejemplos numéricos muestran que las soluciones obtenidas son conservativas y que es posible reducir significativamente el costo de las simulaciones numéricas. Finalmente resulta de interés destacar que las propiedades enunciadas transforman al algoritmo en una opción atractiva para la resolución tridimensional de la ecuación de Richards.

## REFERENCES

- [1] Richards L. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics* 1931; 1:318-333.
- [2] Milly PCD. A mass-conservative procedure for time stepping in models of unsaturated flow. *Adv. Water Resour.* 1985; 8:32-36.
- [3] Celia MA, Bouloutas ET, Zarba RL. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resour. Res.* 1990; 26:1483-1496.
- [4] Paniconi C, Aldama AA, Wood EF. Numerical evaluation of iterative and noniterative methods for the solution of the nonlinear Richards Equation. *Water Resour. Res.* 1991; 27:1147-1163.
- [5] Módena R, Vénere M, Quintana F. Estudio de esquemas para la integración temporal en problemas transitorios de difusión-reacción. *Mecánica Computacional* 1997; 17:867-876.
- [6] Basombrío FG. A third order Crank Nicholson algorithm based on Richardsons extrapolation. General Properties. Internal Report, Centro Atómico Bariloche, CNEA, 2004. ([http://cabmec1.cnea.gov.ar/~fgb/extrap/extrap\\_inf.pdf](http://cabmec1.cnea.gov.ar/~fgb/extrap/extrap_inf.pdf)).
- [7] Guarracino L, Quintana JF. A third order accurate scheme for variably saturated groundwater flow modelling. *Commun. Numer. Meth. Engng.* 2004; 20:379-389.
- [8] Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. Wiley: New York-London-Sydney; 1962.
- [9] Ross PJ, Parlange J-Y. Comparing exact and numerical solutions of Richards' equation for one-dimensional infiltration and drainage. *Soil Sci.* 1994; 157:341-344.
- [10] van Genuchten MT. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980; 44:892-898.
- [11] Carsel RF, Parrish RS. Developing joint probability distributions of soil water characteristics. *Water Resour. Res.* 1988; 24:755-769.