

REFINAMIENTO GUIADO POR UNA CURVA DE MALLAS 2.5 DIMENSIONALES

Pablo J. Novara y Nestor A. Calvo

*Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Ciudad Universitaria,
Santa Fe, Argentina, pnovara@unl.edu.ar*

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería - CIMEC (INTEC). Parque
Tecnológico Litoral Centro, Santa Fe, Argentina.*

Palabras Clave: Hexaedros, Mallas 2.5d, refinamiento.

Resumen. El problema a resolver consiste en refinar un conjunto de elementos de una malla semiestructurada, es decir, un malla de hexaedros y/o wedges, estructurada en una dirección. Se asume que la malla representa una chapa delgada, por lo que se compone de varias copias cercanas de una misma superficie de triángulos y/o cuadriláteros a las que se denominará capas, desplazadas en la dirección del espesor de la chapa. Para mantener la semiestructura, el algoritmo de refinamiento debe aplicar exactamente las mismas operaciones sobre todas las capas. La malla de salida debe contener el mismo tipo de elementos que la malla de entrada siempre que sea posible. La curva que define el conjunto elementos a refinar viene dada como una malla de segmentos, y no se encuentra sobre la chapa, sino que deberá ser proyectada según una dirección especificada, o de forma normal a la superficie. Se refinarán los elementos que estén a una distancia menor o igual a un límite dado como parámetro del algoritmo, siendo esta distancia una métrica euclídeana en las unidades del modelo, o una distancia dada por la cantidad de elementos que separan a cada nodo de la curva proyectada. En este trabajo se describen los métodos utilizados tanto para determinar los elementos a subdividir como para recuperar luego la conformidad de la malla.

1. INTRODUCCIÓN

Una malla 2.5D semiestructurada, es una malla de hexaedros y/o wedges, estructurada en una dirección llamada dirección de extrusión. Este tipo de mallas se suele utilizar cuando la geometría a representar es esencialmente 2.5D, o cuando se malla modela una chapa o lámina delgada. Este trabajo se enfoca en técnicas de refinamiento para este segundo caso. La malla se conforma a partir de varias copias cercanas de una misma superficie de triángulos y/o cuadriláteros a las que se denominará capas, desplazadas en la dirección del espesor de la chapa. Para mantener la semiestructura, el algoritmo de refinamiento debe aplicar exactamente las mismas operaciones sobre todas las capas. Es deseable además que la malla de salida contenga el mismo tipo de elementos que la malla de entrada siempre que sea posible. En este trabajo, una curva define el conjunto elementos a refinar, y por simplicidad viene dada como una malla de segmentos, aunque podría no encontrarse sobre la chapa, debiendo en ese caso ser proyectada según una dirección especificada, o de forma normal a dicha superficie. Se presentarán los algoritmos para refinar los elementos que se encuentren a una distancia de la curva menor o igual a un límite dado como parámetro, siendo esta distancia una métrica euclídeana en las unidades del modelo, o bien una distancia dada por la cantidad de elementos que separan a cada nodo de la curva proyectada.

2. DETERMINACIÓN DE LA ZONA A REFINAR

Para determinar la proyección de la curva (dada por la malla de segmentos) sobre la malla de la chapa se utiliza la estrategia desarrollada en [Novara y Calvo \(2010\)](#). Esta consiste en construir una curva parametrizable que interpole los nodos de la malla de segmentos utilizando una sucesión de curvas de Bézier de grado 3 unidas de forma suave, buscar la proyección de algún punto de la curva sobre algún elemento de la chapa, y avanzar a partir de allí hacia elementos vecinos utilizando un algoritmo de bisección en t (el parámetro de la curva) para determinar por cual arista de un elemento dado entra o sale la curva. Con este proceso se obtiene la proyección de la curva sobre las aristas que atraviesa. Si la malla de la chapa es una malla de volumen, se extrae una capa intermedia y se aplica el algoritmo sobre esta capa, que será utilizada como referencia para copiar luego sus resultados en las capas restantes.

Una vez obtenidos los elementos que son cortados por la proyección de la curva, se procede a determinar qué otros elementos deben refinarse. Si la distancia debe medirse en elementos, a cada nodo de un elemento cortado se le asigna 1 y para cada nodo sin distancia asignada de un elemento no cortado, se busca entre los nodos vecinos los que tengan distancias y se utiliza la menor de ellas más 1 para completar las faltantes. El algoritmo se aplica de forma recursiva utilizando una metodología similar al crecimiento de regiones tomando como semillas los elementos cortados, para que en cada paso en el que se calcula distancias para un elemento no cortado, existan en ese elemento nodos cuyas distancias ya hayan sido asignadas con los cuales realizar dicho cálculo. Si la distancia debe medirse en unidades del dibujo, en cada nodo se asigna además de la distancia el valor del parámetro t que da el punto de la curva con el cual se midió dicha distancia. Este valor se ajusta mediante un proceso de minimización numérica tomando un t de partida que puede provenir del algoritmo de proyección para los primeros elementos, o de un elemento vecino para los restantes. El algoritmo tiene un Δ_t de referencia (dado que por cada elemento cortado hay dos valores de t , uno por arista), que se utiliza como distancia salto para la optimización numérica, y a partir del cual se puede estimar el error luego de n iteraciones de la misma. De esta forma, la cantidad de iteraciones de la minimización será fija. Finalmente, se refinan todos los elementos que tienen todos sus nodos a distancias de la

curva menores o iguales al límite dado.

Es importante notar que el algoritmo debe garantizar que se refinarán los elementos dentro del área marcada, siendo preferible un error por defecto en las medidas de distancia (lo cual resulta en más elementos refinados de los necesarios) frente a un error por exceso (lo cual haría que no se refinan elementos que debían refinarse). Los elementos que tienen solo algunos de sus nodos dentro de la tolerancia de distancia dada no son marcados para refinar por completo, pero como se presentará en la siguiente etapa, las aristas que contengan sus dos nodos dentro de la distancia límite también serán divididas. La figura 1 muestra en colores las distancias calculadas por nodo para una curva y una malla de entrada.

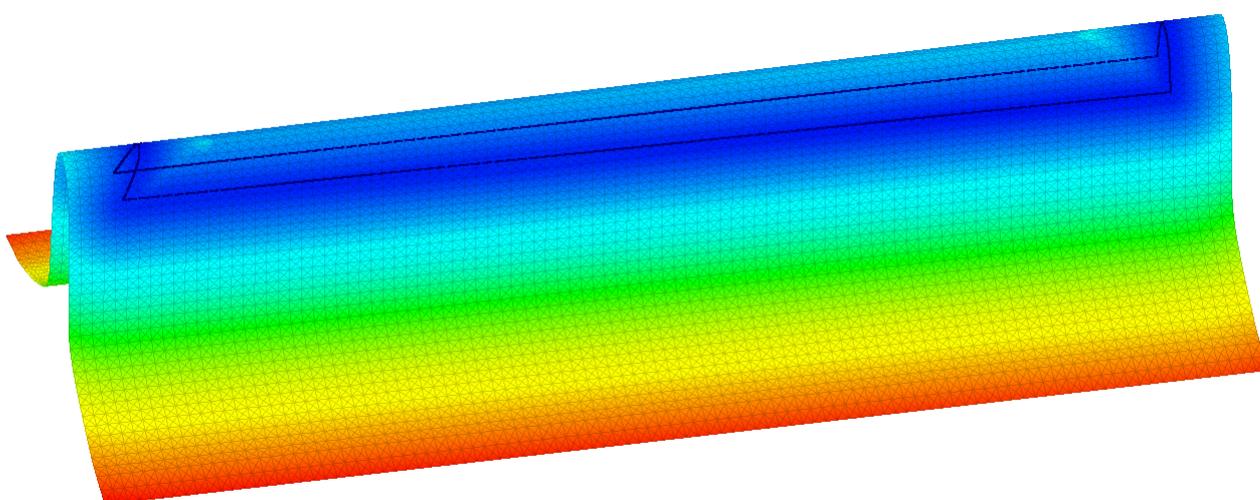


Figura 1: distancia de cada nodo a la curva que guía el refinamiento.

3. REFINAMIENTO

El proceso de refinamiento comienza dividiendo regularmente los elementos marcados para refinar utilizando plantillas predefinidas para triángulos y cuadriláteros. En ambos casos, cada elemento se divide en 4 nuevos elementos, resultando en una disminución de la longitud de arista promedio a la mitad. Luego de esta primera etapa, se debe recuperar la conformidad de la malla, para lo cual se modifican los elementos no marcados que tienen por vecino a un elemento marcado. La figura 2 muestra parte de una malla de triángulos en sus tres etapas: en la primera se identifican con color amarillo los elementos a refinar, en la segunda se dividen los elementos amarillos y se identifican con color naranja los elementos a modificar para recuperar la conformidad de la malla (los puntos rojos muestran los vértices conflictivos), y en la tercera se observa el resultado final.

En el caso de las mallas de elementos triangulares, el proceso de recuperación de conformidad es directo y requiere modificar a lo sumo una línea de elementos adicionales. Para mallas de elementos cuadrangulares, el proceso resulta más complejo si se quiere preservar el tipo de elemento (es decir, evitar dividir un cuadrilátero en un cuadrilátero y un triángulo, lo cual se-

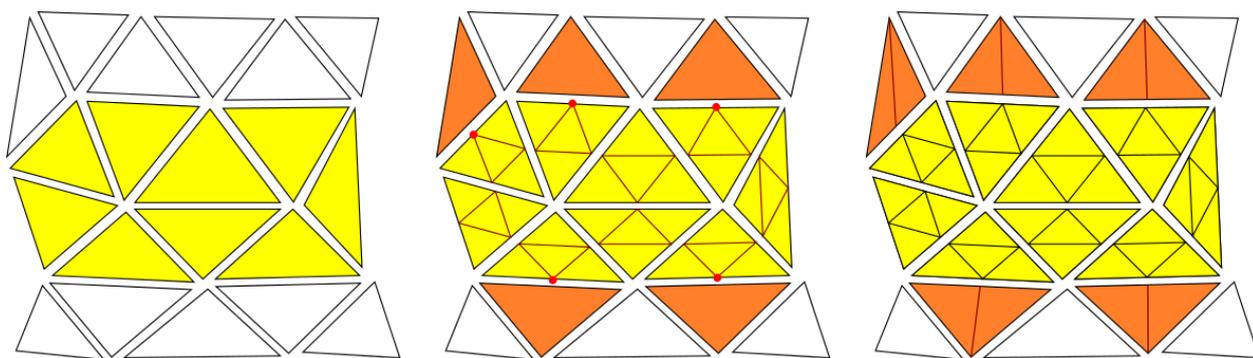


Figura 2: Refinamiento de una malla de triángulos.

ría una solución equivalente al primer caso analizado). La figura 3 muestra las tres etapas para la solución más simple, donde se introducen algunos elementos triangulares en las plantillas marcadas en verde.

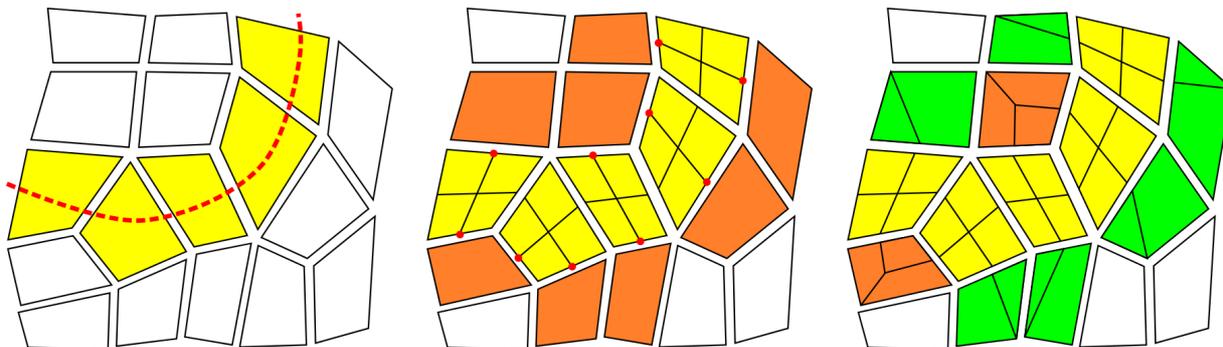


Figura 3: Refinamiento de una malla de cuadriláteros introduciendo elementos triangulares.

Para evitar introducir triángulos si la malla contenía solamente cuadriláteros, no se deben utilizar las plantillas marcadas en verde en la figura 3, pero cuando se quiere aplicar la plantilla naranja sobre un elemento que tenía solo una arista refinada, obliga a refinar otra arista (ya que el número de aristas de una malla de cuadriláteros sin agujeros, como en este caso la de un elemento, es siempre par). En el ejemplo se pueden acomodar las plantillas de forma que cada arista refinada adicionalmente en un elemento coincida con la arista refinada adicionalmente en otro, o con la frontera de la malla. Sin embargo, si se considera que en el ejemplo se muestra solo una parte de la malla, se debe notar que se está imponiendo una restricción sobre algunas aristas de frontera de esta parte (marcadas en rojo en la figura 4), que condicionaran a la resolución en elementos vecinos. Es decir, si se sigue ordenadamente el contorno de la zona refinada, cada elemento reemplazado por una plantilla condiciona una arista en el elemento siguiente. Este condicionamiento da lugar a los casos que se muestran en verde y celeste en la figura 4, donde se presenta dos soluciones diferentes para la misma malla.

En los elementos marcados en verde, las restricciones aplicadas ya sea por elementos de la zona refinada, o por las plantillas aplicadas en elementos vecinos para recuperar la conformidad, hacen que sea necesario dividir las cuatro aristas, de forma que este elemento resulta refinado al igual que los atravesados por la proyección de la curva. Además, algunos elementos que no comparten una arista con la zona refinada también deben ser modificados (marcados en celeste

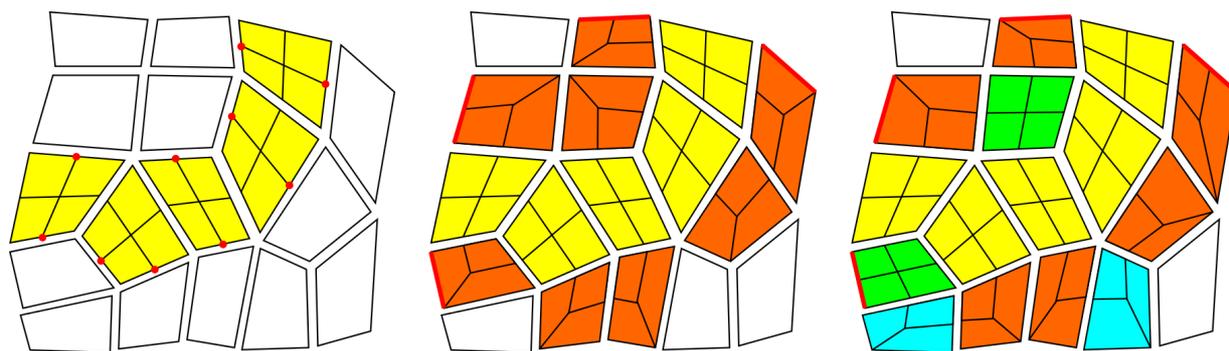


Figura 4: Refinamiento de una malla de cuadriláteros preservando el tipo de elemento.

en la figura). Estos elementos serán los que compartan un nodo con algún elemento refinado en el primer paso (amarillo), o una arista con un elemento refinado posteriormente (verde). En la figura 5 se muestran las curvas duales de la malla en cada etapa:

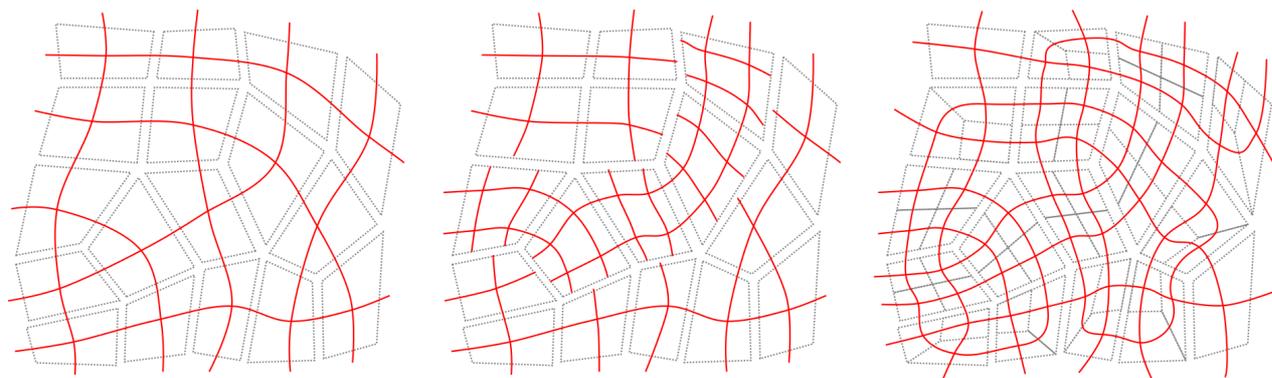


Figura 5: Líneas duales de una malla de cuadriláteros en las tres etapas del proceso.

Dado que la frontera de una malla de cuadriláteros debe tener un número par de aristas (porque las curvas duales o bien son cerradas y completamente interiores, o bien ingresan por una arista de frontera y salen por otra), y que los templates marcados en naranja se pueden utilizar de a pares para que compensen entre sí la división adicional, siempre es posible colocarlos si se lo hace avanzando en orden por la frontera la zona refinada. La excepción a esta regla se produce cuando la malla original contiene agujeros. Si se da el caso, las alternativas posibles son: introducir un triángulo; o propagar la división adicional hasta llegar a un borde, lo cual podría implicar la subdivisión elementos muy alejados de la proyección de la curva si la zona a refinar está lejos del borde de la chapa. Por esto, en la implementación actual se utiliza la primer solución.

Se puede controlar además el nivel de refinamiento variando la cantidad de pasos de subdivisión a realizar en el área a refinar, obteniendo un mayor refinamiento cuando se aumenta esta cantidad. Se debe optar entonces entre dos posibles transiciones entre la zona refinada y la zona sin modificar: una transición rápida, donde la transición completa reemplaza una sola línea de elementos de la malla original; o una transición suave, donde el área refinada se expande tantos elementos como pasos adicionales de refinamiento se apliquen para absorber gradualmente la diferencia. En la figura 6 se presentan los resultados para un mismo caso de ambos métodos.

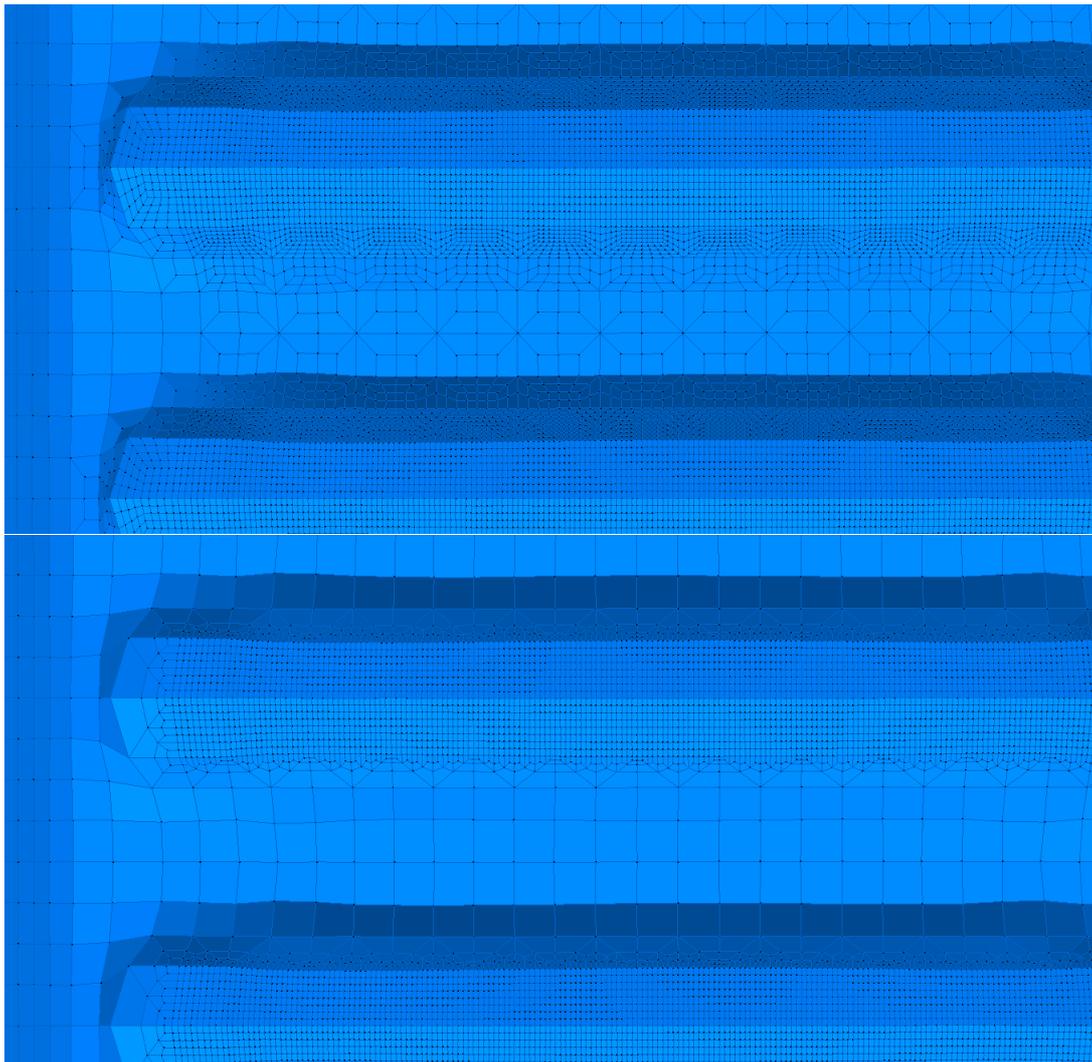


Figura 6: Diferentes transiciones entre las zonas refinadas y las zonas no refinadas

Resta analizar la ubicación de los nodos agregados. Si se aplica la plantilla sobre un plano, cada nodo adicional debe ubicarse en el centro del elemento refinado si es un nodo interior al elemento, o en el punto medio de una arista si es un nodo sobre una arista de dicho elemento. Sin embargo, cuando la malla, aún siendo de superficie, no es plana, esta ubicación hace que en el resultado final, las zonas refinadas permanezcan facetadas según el tamaño de elemento original. Es decir, es necesario corregir la ubicación de los nodos para copiar la curvatura de la superficie. Dicha curvatura se deduce automáticamente a partir de la malla asumiendo como suaves las uniones entre elementos para las cuales el ángulo diedro no supere un cierto umbral. Con estas consideraciones, se construye un conjunto de superficies NURBS que representan la estimación de la geometría real, utilizando los algoritmos desarrollados en [Novara y Calvo \(2010\)](#). Los puntos agregados sobre el plano de un elemento, se "elevan" luego hasta el punto equivalente en la superficie NURBS para recuperar la curvatura. En la figura 6 se muestra un ejemplo antes y después de este proceso.

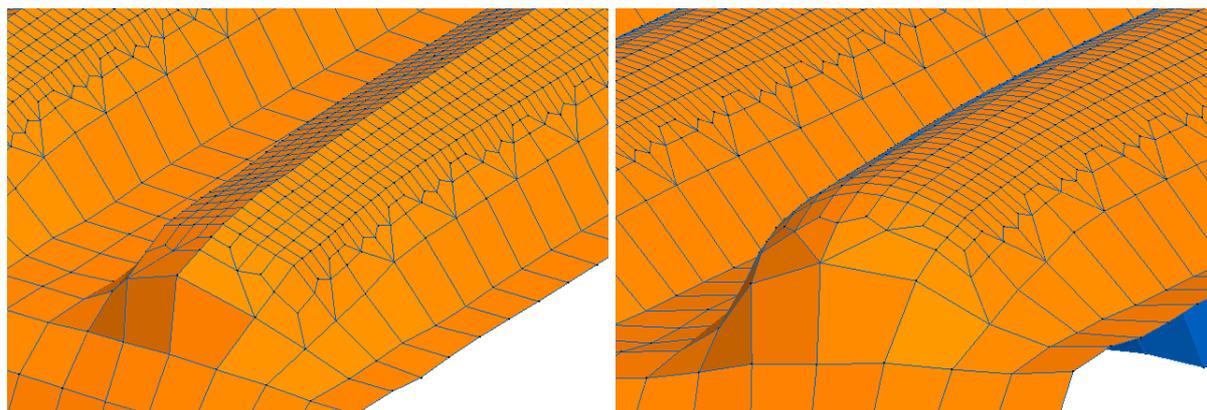


Figura 7: Izquierda: ubicación de los nuevos nodos sobre los elementos originales. Derecha: ubicación de los nuevos nodos utilizando superficies NURBS elementales.

4. INTERPOLACIÓN DE PUNTOS DE GAUSS Y VALORES NODALES

Para la interpolación de valores nodales se utilizan los mismos pesos que se calcularon durante el refinamiento para ubicar los nodos nuevos a partir de los nodos originales. Para obtener los pesos asociados a Puntos de Gauss (PDG) de los elementos modificados, se utilizan las rutinas descritas en Novara y Calvo (2009) y Novara y Calvo (2010). Esta etapa es comparativamente más costosa que las anteriores en términos de tiempo de cómputo, ya que debe generar una tetraedrización Delaunay a partir de los PDG originales, por lo cual será la etapa que domine el tiempo total del proceso.

La figura 8 ilustra el error producto de la interpolación de valores nodales en la malla resultante. Para ello, se utilizan los índices y pesos arrojados por el algoritmo para interpolar las posiciones de los nodos de la malla de salida a partir de las posiciones de los nodos de la malla de entrada. Los valores máximos en la superficie de la figura se alcanzan donde la misma presenta mayor curvatura (la geometría presenta ondulaciones horizontales). En estos puntos la reconstrucción de la geometría original mediante superficies NURBS elementales lleva a que un nodo insertado en el interior de un elemento se eleve por sobre la superficie que define el mismo generando esta diferencia, que en este caso alcanza máximos de $1e^{-5}$ (pero podría ser aún mayor). Si el algoritmo coloca los nodos sobre la superficie ignorando la curvatura estimada, el error desciende a $1e^{-17}$, pero el refinamiento realizado de esta forma puede introducir aristas angulosas ya que preserva el aspecto facetado de la malla gruesa original, razón por la cual el modo de trabajo por defecto utiliza las superficies NURBS interpolantes (los errores máximos están alrededor de $1e^{-4}$). En la figura 9 se observa el mismo procedimiento aplicado a la malla de valores nodales con similares resultados:

Estos errores en la interpolación de Puntos de Gauss asociados a la curvatura de la superficie solo aparecen cuando la malla de entrada es una malla de superficie (ya que no se puede extrapolar un punto fuera de un plano a partir de los nodos de un elemento plano), pero no así en mallas de volumen, donde los errores máximos son del orden de $1e^{-14}$ o menores, los cuales se atribuyen a problemas de índole numérica y ya no geométrico.

5. CONCLUSIONES

Se presentó el procedimiento completo desarrollado para el refinamiento de geometrías 2.5D que representan chapas o láminas delgadas. El algoritmo detecta automáticamente la estructu-

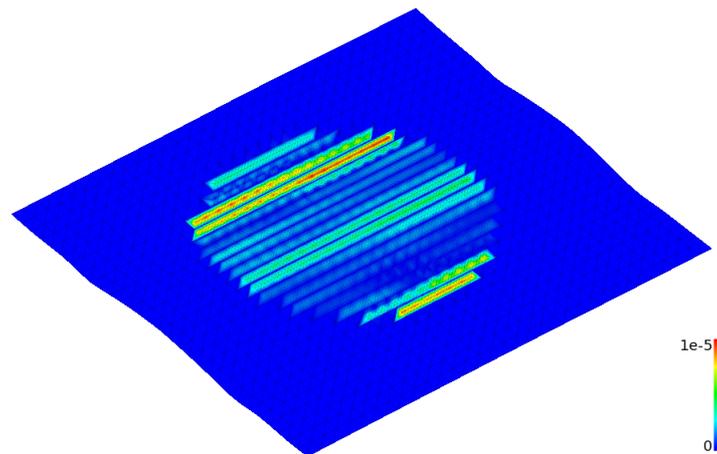


Figura 8: Error en la interpolación de valores nodales cuando el refinamiento utiliza superficies NURBS.

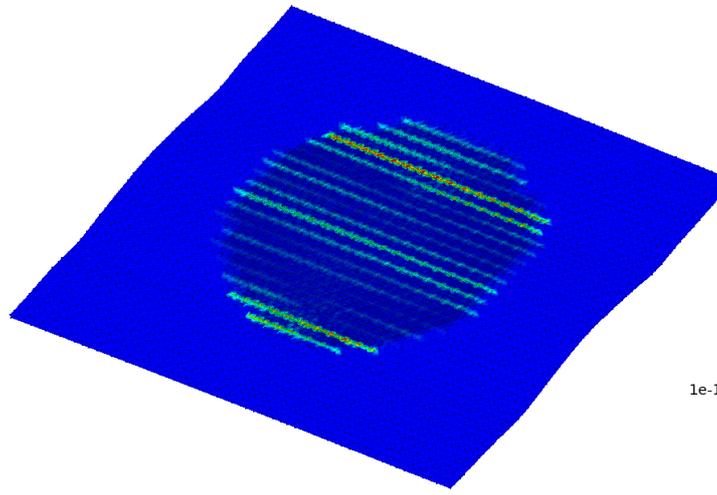


Figura 9: Error en la interpolación de valores nodales cuando el refinamiento no utiliza superficies NURBS.

ra 2D subyacente y aplica los cambios topológicos necesarios en la malla 2D de referencia, que luego se transmiten a la malla 3D. Estos cambios preservan las posiciones de los nodos originales, limitando así la difusión numérica artificial producto de la interpolación de valores nodales y PDG al transferir los datos luego desde la malla original hacia la nueva malla refinada. Además, en mallas de solo cuadriláteros/hexaedros, los nuevos elementos también serán cuadriláteros/hexaedros siempre que el refinamiento sea posible con las restricciones mencionadas de mantener los nodos originales y evitar que el refinamiento se propague mucho más allá del área delimitada por los parámetros de entrada. El proceso de refinamiento no presenta un costo computacional elevado, ya que la mayor parte del mismo se realiza utilizando una superficie 2D de referencia, y detectando y aplicando patrones simples predeterminados. Sin embargo, el proceso de construcción de la malla de PDG, necesaria para la interpolación de los nuevos PDG, aún puede presentar un costo computacional elevado, representando la mayor parte del tiempo de ejecución total del proceso.

REFERENCIAS

- Novara P. y Calvo N. Remallado mínimo en problemas de spinning-forming. *18º Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, 2009.
- Novara P. y Calvo N. Corte de mallas de elementos finitos 2.5-dimensionales. *IX Argentinean Congress on Computational Mechanics, II South American Congress on Computational Mechanics and XXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (MECOM-CILAMCE)*, 2010.