

## **DISEÑO ÓPTIMO DE PERFILES LAMINADOS USANDO PROGRAMACION NO LINEAL – METODO FAIPA (FEASIBLE ARC INTERIOR POINT ALGORITHM)**

**Angel Queizan<sup>a</sup>, Ruy Garcia<sup>a</sup>, Jose Herskovits<sup>b</sup>, Victorio Sonzogni<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Grupo Calculo Numérico, Universidad Tecnológica Nacional.-Regional La Plata. Dpto. de Mecánica. La Plata Calle 60 esq 124. Argentina, aquezan@frlp.utn.edu.ar, ruy\_garcia\_ibarroule@hotmail.com*

<sup>b</sup>*COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. C.Postal 68503, 21945-970, Río de Janeiro, Brasil. jose@optimize.ufrj.br*

<sup>c</sup>*CIMEC: Centro Internacional de Metodos Computacional en Ingenieria. INTEC, UNL, CONICET. Guemes 3450 (3000), Santa Fe, Argentina, sonzogni@intec.unl.edu.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar>*

**Palabras Clave:** Optimización de perfiles laminados. Programación No Lineal. Algoritmo FAIPA.

**Resumen.** En este trabajo proponemos optimizar la forma de algunos perfiles laminados con el objetivo de que estén formados por el menor material posible y satisfagan ciertas restricciones impuestas por la normativa local. De esta manera buscamos obtener perfiles que presentan un mejor rendimiento resistente.

La función objetivo esta dada por el área de la sección transversal y restricciones de seguridad, del ala comprimida en piezas sometidas a flexión y de abolladura del alma por inestabilidad elástica. También se establecen ecuaciones y inecuaciones vinculadas a condiciones geométricas respecto a la sección transversal que deseamos satisfacer.

Vamos a comparar los perfiles obtenidos con perfiles comerciales existentes para la misma altura y ancho de ala.

Para definir el diseño óptimo usamos el algoritmo FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm) desarrollado por el Prof. Herskovits.

## 1 INTRODUCCION

Como sabemos las secciones transversales de los perfiles comerciales quedan perfectamente definidas si conocemos la altura del perfil, el ancho del ala, espesor del ala y el espesor del alma. Dados estos parámetros podemos calcular las características geométricas del perfil, como ser los momentos de inercia, módulos resistentes y área del mismo.

En este trabajo buscamos definir los espesores del ala y del alma, la altura del perfil y ancho del ala, mediante la formulación de un problema de programación no lineal (PNL), para lo cual se plantea como función objetivo minimizar el área del perfil sujeto a un conjunto de restricciones en desigualdades que nos permitan asegurar la estabilidad del ala comprimida en un estado de flexión, el abollamiento del alma y condiciones geométricas entre las dimensiones del perfil.

En el cálculo del área, momento de inercia y modulo resistente de las distintas tipologías usamos formulas simplificadas, como describimos a cada caso en particular:

## 2 OPTIMIZACION DE PERFILES IPN

En la siguiente figura podemos observar la geometría de un perfil IPN y las variables que lo definen

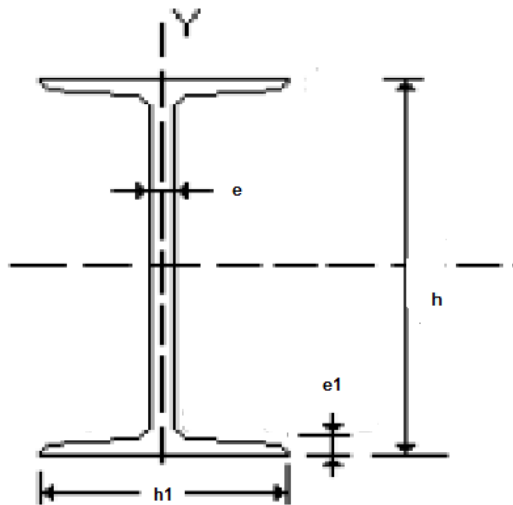


Figura 1: Perfil IPN

Siendo:

$h$  = altura total del perfil.

$h_1$  = ancho del ala.

$e$  = espesor del alma.

$e_1$  = espesor del ala.

En el caso de estos perfiles las formulas implementas, luego de algunas simplificaciones, en el cálculo de las siguientes características geométricas son:

Para el área

$$A = 2 h_1 e_1 + h e - 2 e_1 e \quad (0.1)$$

Para el Momento de inercia

$$I = \frac{h^3 e}{12} + \frac{h^2}{2} [h_1 e_1 - e_1 e] - h h_1 e_1^2 \quad (0.2)$$

Para el Momento resistente

$$W = \frac{h^2 e}{6} + h [h_1 e_1 - e_1 e] - 2 h_1 e_1^2 \quad (0.3)$$

Algunos autores, en trabajos similares han implementado otras formulas simplificadas para el calculo del área y del modulo resistente, que a continuación detallamos

Para el área

$$A = 2 h_1 e_1 + h e \quad (0.4)$$

Para el Momento de inercia

$$I = \frac{h^3 e}{12} + \frac{h^2 h_1 e_1}{2} \quad (0.5)$$

Para el Momento resistente

$$W = \frac{h^2 e}{6} + h h_1 e_1 \quad (0.6)$$

En la siguiente tabla comparamos los valores reales obtenidos de una tabla de perfiles comerciales con las formulas simplificadas propuestas anteriormente

Tipo de perfil	Área comercial [cm <sup>2</sup> ]	Área calculada por otros autores [cm <sup>2</sup> ]	Error porcentual Área por otros autores	Área calculada en el trabajo [cm <sup>2</sup> ]	Error porcentual área calculo de trabajo
IPN 80	7,58	8,076	6,54353562	7,6158	0,47229551
IPN 100	10,6	11,3	6,60377358	10,688	0,83018868
IPN 120	14,2	15,052	6	14,2666	0,46901408
IPN 140	18,3	19,332	5,63934426	18,3516	0,28196721
IPN 160	22,8	24,14	5,87719298	22,943	0,62719298
IPN 180	27,9	29,476	5,64874552	28,0408	0,5046595
IPN 200	33,5	35,34	5,49253731	33,645	0,43283582
IPN 220	39,6	41,732	5,38383838	39,7556	0,39292929
IPN 240	46,1	48,652	5,53579176	46,3726	0,59132321
IPN 260	53,4	56,306	5,44194757	53,6552	0,47790262
IPN 280	61,1	64,456	5,49263502	61,3856	0,46743044
IPN 300	69,1	72,9	5,49927641	69,4008	0,43531114
IPN 320	77,8	82,126	5,56041131	78,147	0,44601542
IPN 340	86,8	91,622	5,55529954	87,1568	0,41105991
IPN 360	97,1	102,57	5,63336766	97,5	0,41194645
IPN 380	107	113,15	5,74766355	107,533	0,49813084
IPN 400	118	124,56	5,55932203	118,3392	0,28745763
IPN 450	147	155,52	5,79591837	147,6468	0,44
IPN 500	180	189,9	5,5	180,18	0,1

Tabla 1: Área comercial – Área calculada por (0.4) – Área calculada por (0.1).

Como podemos ver el error en la tabla 1 de la formula aproximada para el calculo del área usada en otros trabajos presenta el mayor error relativo porcentual en el perfil IPN 100 de 6.6037 (promedio es de 5.7110), mientras que la implementada en este trabajo presenta el mayor error relativo porcentual en el mismo perfil pero su valor es de 0.8301 (promedio es de 0.4514)

Tipo de perfil	Momento de Inercia comercial [cm <sup>4</sup> ]	Momento de Inercia Otros autores [cm <sup>4</sup> ]	Error porcentual Momento de Inercia otros autores	Momento de Inercia aprox. [cm <sup>4</sup> ]	Error porcentual Momento de Inercia
IPN 80	77,8	95,936	23,311054	76,87664	1,18683805
IPN 100	171	207,5	21,3450292	169,08	1,12280702
IPN 120	328	394,992	20,4243902	325,45176	0,77690244
IPN 140	573	686,588	19,8233857	570,20936	0,48702269
IPN 160	935	1114,88	19,2385027	931,416	0,38331551
IPN 180	1450	1716,876	18,4052414	1440,98064	0,62202483
IPN 200	2140	2534	18,411215	2134,658	0,24962617
IPN 220	3060	3612,092	18,0422222	3052,04856	0,25985098
IPN 240	4250	5001,408	17,6801882	4236,59856	0,315328
IPN 260	5740	6762,14067	17,8073287	5730,05169	0,17331556
IPN 280	7590	8938,12267	17,761827	7566,49899	0,30963127
IPN 300	9800	11542,5	17,7806122	9771,03	0,29561224
IPN 320	12510	14743,7227	17,8554969	12470,475	0,31594735
IPN 340	15700	18486,9447	17,7512399	15636,5842	0,403922
IPN 360	19610	23123,88	17,9188169	19523,673	0,44021928
IPN 380	24010	28318,0433	17,9427044	23910,8508	0,41294947
IPN 400	29210	34464	17,9869908	29083,008	0,43475522
IPN 450	45850	54128,25	18,0550709	45625,194	0,49030752
IPN 500	68740	81187,5	18,1080884	68369,25	0,53935118

Tabla 2: Momento de inercia comercial – Momento de inercia calculado por (0.5) – Momento de inercia calculado por (0.2).

Mientras en la tabla 2 para la formula aproximada en el calculo del momento de inercia usada en otros trabajos presenta el mayor error relativo porcentual en el perfil IPN 8 de 23.31 (promedio es de 18.71), mientras que la implementada en este trabajo presenta el mayor error relativo porcentual en el mismo perfil pero su valor es de 1.1868 (promedio es de 0.4852)

Como podemos observar, por lo dicho en los párrafos anteriores, las formulas simplificadas usadas por nosotros presentan una mayor calidad que las implementadas en otros trabajos.

Para el diseño óptimo planteamos el siguiente problema de optimización, definido por una función objetivo y un conjunto de restricciones en desigualdad

Función objetivo

$$\text{Min} \{A\} = \text{Min} \{2 h_1 e_1 + h e - 2 e_1 e\} \quad (0.7)$$

Sujeto a conjunto de restricciones

$$\frac{h_1}{2 e_1} - 15 \sqrt{\frac{2400}{\sigma_u}} \leq 0 \quad (0.8)$$

$$\frac{h}{e} - 71.4282 \leq 0 \quad (0.9)$$

$$1 - \frac{1}{W_t} \left[ \frac{h^2 e}{6} + h[h_1 e_1 - e_1 e] - 2 h_1 e_1^2 \right] \leq 0 \quad (0.10)$$

$$\frac{h_1}{h} - 1 \leq 0 \quad (0.11)$$

Donde las variables de diseño son:

$h_1$  = ancho del ala.

$e$  = espesor del alma.

$e_1$  = espesor del ala.

Y los parámetros fijos:

$W_t$  = Momento resistente del perfil comercial.

$\sigma_u$  = La tensión ultima, la que tomamos igual a 2600 [kg/cm<sup>2</sup>].

$h$  = altura total del perfil.

Los parámetros fijos, variables para cada perfil, figuran en la siguiente tabla

Tipo de perfil	Altura del perfil [cm]	Modulo resistente [cm <sup>3</sup> ]
IPN 80	8	19,5
IPN 100	10	34,2
IPN 120	12	54,7
IPN 140	14	81,9
IPN 160	16	117
IPN 180	18	161
IPN 200	20	214
IPN 220	22	278
IPN 240	24	354
IPN 260	26	442
IPN 280	28	542
IPN 300	30	653
IPN 320	32	782
IPN 340	34	923
IPN 360	36	1090
IPN 380	38	1260
IPN 400	40	1460
IPN 450	45	2040
IPN 500	50	2750

Tabla 3: Parámetros fijos para cada perfil IPN.

Las restricciones nos garantizan, la (0.8) estabilidad del ala comprimida, el no abollamiento del alma del perfil la (0.9), la (0.10) nos asegura que el modulo resistente del perfil diseñado sea mayor o igual al comercial y la (0.11) que el ancho del ala sea inferior o igual a la altura del perfil.

Para la resolución del problema aplicamos un algoritmo de programación no lineal descrito en el punto 4, por tratarse de un algoritmo de punto interior tenemos que garantizar que el punto de inicio esta contenido en la región de diseño. En la tabla 4 indicamos los puntos de inicio del proceso iterativo para cada perfil IPN, el cual definimos de la siguiente manera:

Ancho inicial del ala = Ancho comercial del ala

Espesor del alma inicial = 1.2 \* Espesor del alma comercial

Espesor del ala inicial = Espesor del ala comercial

Tipo de perfil	Ancho del ala inicial [cm]	Espesor alma inicial [cm]	Espesor ala inicial [cm]
IPN 80	4,2	0,468	0,59
IPN 100	5	0,54	0,68
IPN 120	5,8	0,612	0,77
IPN 140	6,6	0,684	0,86
IPN 160	7,4	0,756	0,95
IPN 180	8,2	0,828	1,04
IPN 200	9	0,9	1,13
IPN 220	9,8	0,972	1,22
IPN 240	10,6	1,044	1,31
IPN 260	11,3	1,128	1,41
IPN 280	11,9	1,212	1,52
IPN 300	12,5	1,296	1,62
IPN 320	13,1	1,38	1,73
IPN 340	13,7	1,464	1,83
IPN 360	14,3	1,56	1,95
IPN 380	14,9	1,644	2,05
IPN 400	15,5	1,728	2,16
IPN 450	17	1,944	2,43
IPN 500	18,5	2,16	2,7

Tabla 4: Punto de inicio del proceso de optimización. Perfil IPN

En la tabla 5 evaluamos las restricciones en el punto inicial pudiendo observar que todas ellas presentan un valor negativo o nulo, garantizando el cumplimiento de que el punto inicial esta contenido en la región de diseño.

Tipo de perfil	Restricción (0.8) Seguridad ala comprimida	Restricción (0.9) Seguridad abollamiento alma	Restricción (0.10) Modulo resistente calculado mayor al comercial	Restricción (0.11) Ancho del ala inferior o igual a la altura
IPN 80	-10,85221181	-54,33448291	-0,009384615	-0,475
IPN 100	-10,73506325	-52,90998148	-0,014736842	-0,5
IPN 120	-10,64530008	-51,82065686	-0,019149543	-0,516666667
IPN 140	-10,57432454	-50,96066374	-0,023320147	-0,528571429
IPN 160	-10,516797	-50,26447884	-0,024682051	-0,5375

IPN 180	-10,46922615	-49,68936957	-0,02470559	-0,544444444
IPN 200	-10,42923296	-49,20627778	-0,028391589	-0,55
IPN 220	-10,3951404	-48,79475514	-0,029420432	-0,554545455
IPN 240	-10,36573232	-48,43999425	-0,029048927	-0,558333333
IPN 260	-10,40444164	-48,37885461	-0,029553077	-0,565384615
IPN 280	-10,49706016	-48,32618977	-0,030003247	-0,575
IPN 300	-10,55350915	-48,28035185	-0,031094028	-0,583333333
IPN 320	-10,62540667	-48,2400942	-0,03059491	-0,590625
IPN 340	-10,66836444	-48,20445628	-0,031016316	-0,597058824
IPN 360	-10,74486718	-48,35157692	-0,029868349	-0,602777778
IPN 380	-10,7773875	-48,31414477	-0,034177698	-0,607894737
IPN 400	-10,82357088	-48,28035185	-0,031552877	-0,6125
IPN 450	-10,91359146	-48,28035185	-0,030248529	-0,622222222
IPN 500	-10,98560792	-48,28035185	-0,031334545	-0,63

Tabla 5: Valor de las restricciones en el punto inicial. Perfil IPN

Luego de realizar la optimización en cada perfil IPN tenemos los resultados de las variables de diseño en la tabla 6, la columna valor calculado es la variable optimizada y en la columna valor comercial indicamos el valor que tiene esa variable de diseño en el perfil comercial.

En las tablas 7-a, 7-b, 7-c y 7-d mostramos el valor que va tomando la función objetivo, área del perfil, en cada iteración para cada perfil.

En la tabla 8 indicamos el valor del área y el momento resistente que resultan luego de la de la optimización.

Perfil	Ancho del ala [cm]		Espesor del ala [cm]		Espesor del alma [cm]	
	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial
IPN 80	7,9999	4,2	0,3152	0,59	0,112	0,39
IPN 100	9,9999	5	0,3477	0,68	0,14	0,45
IPN 120	11,5086	5,8	0,3992	0,77	0,168	0,51
IPN 140	12,9944	6,6	0,45083	0,86	0,196	0,57
IPN 160	14,4912	7,4	0,5027	0,95	0,224	0,63
IPN 180	15,9943	8,2	0,5549	1,04	0,252	0,69
IPN 200	17,46	9	0,6057	1,13	0,28	0,75
IPN 220	18,946	9,8	0,6573	1,22	0,308	0,81
IPN 240	20,4445	10,6	0,7093	1,31	0,336	0,87
IPN 260	21,9232	11,3	0,76061	1,41	0,364	0,94
IPN 280	23,3662	11,9	0,81067	1,52	0,392	1,01
IPN 300	24,7444	12,5	0,858495	1,62	0,42	1,08
IPN 320	26,1956	13,1	0,9088	1,73	0,448	1,15
IPN 340	27,58	13,7	0,9568	1,83	0,476	1,22
IPN 360	29,1168	14,3	1,01019	1,95	0,504	1,3
IPN 380	30,4346	14,9	1,05591	2,05	0,532	1,37
IPN 400	31,9172	15,5	1,1073	2,16	0,56	1,44
IPN 450	35,5241	17	1,2324	2,43	0,63	1,62
IPN 500	39,081	18,5	1,3558	2,7	0,7	1,8

Tabla 6: Resultados de las variables de diseño en cada perfil. Perfil IPN

Iteraciones	IPN 8	IPN 10	IPN 12	IPN 14	IPN 16
0	8,14776	11,4656	15,208	19,715	24,7196
1	6,86118	9,60868	13,2352	17,1868	21,5779
2	6,73072	9,53992	12,6505	16,4941	20,8583
3	6,58989	8,81807	12,4284	16,0963	20,2031
4	6,18974	8,67569	12,1227	15,6358	19,6312
5	6,01318	8,58483	11,4096	14,8485	18,7286
6	5,93874	8,38916	11,3601	14,7779	18,62
7	5,91875	8,25956	11,2805	14,6837	18,3843
8	5,88122	8,2571	11,2456	14,6403	18,3432
9	5,87022	8,25696	11,1738	14,4763	18,1925
10	5,86996	8,25696	11,1009	14,3397	18,0146
11	5,86996	8,25696	11,0732	14,2859	17,9334
12	5,86996	8,25696	11,0723	14,284	17,9301
13		8,25696	11,0723	14,2839	17,9301
14			11,0723	14,2839	17,9301

Tabla 7-a: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles IPN 8, IPN 10, IPN 12, IPN 14 y IPN 16

Iteraciones	IPN 18	IPN 20	IPN 22	IPN 24	IPN 26
0	30,2378	36,306	42,9243	50,0927	58,013
1	26,4634	31,8237	37,6831	44,0419	50,9517
2	25,8824	31,0162	36,1987	42,276	48,8276
3	24,7817	29,7832	35,308	41,2519	47,6919
4	24,0793	28,9072	34,3051	40,0761	46,2788
5	22,9781	27,7245	32,1081	37,5555	44,2613
6	22,7739	27,4394	31,9535	37,3765	44,0541
7	22,6711	27,3218	31,7218	37,1046	43,2939
8	22,5643	27,1973	31,683	37,0598	43,1467
9	22,2215	26,7199	31,5322	36,8799	42,9982
10	22,0186	26,4398	31,3115	36,6276	42,4275
11	22,0078	26,4156	31,2794	36,5914	42,2974
12	22,0074	26,4148	31,2784	36,5904	42,2614
13	22,0074	26,4148	31,2784	36,5903	42,2606
14	22,0074	26,4148	31,2784	36,5903	42,2606
15					42,2606
16					42,2606

Tabla 7-b: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles IPN 18, IPN 20, IPN 22, IPN 24 y IPN 26



Iteraciones	IPN 28	IPN 30	IPN 32	IPN 34	IPN 36
0	66,4275	75,181	84,7112	94,5598	105,846
1	58,2738	65,8412	74,1277	82,6323	92,3438
2	55,7214	62,8936	70,7916	78,8962	88,1942
3	54,5049	61,5425	69,2863	77,2155	86,3287
4	52,7934	59,5306	66,9674	74,5765	83,3168
5	50,2952	56,6123	63,5682	70,7285	78,8391
6	50,0803	56,3725	63,3092	70,4411	78,5303
7	49,0193	55,2248	62,0522	69,0837	77,0992
8	48,9949	55,1948	62,0134	69,021	77,0003
9	48,4663	54,719	61,4355	68,6507	76,6998
10	48,2444	54,3805	61,1885	68,192	76,169
11	48,2258	54,3654	61,138	68,0585	75,9597
12	48,2254	54,365	61,137	68,0544	75,9531
13	48,2254	54,3649	61,137	68,0543	75,9531
14	48,2254	54,3649	61,137	68,0543	75,9531

Tabla 7-c: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles IPN 28, IPN 30, IPN 32, IPN 34 y IPN 36

Iteraciones	IPN 38	IPN 40	IPN 45	IPN 50
0	116,822	128,615	160,652	196,236
1	101,672	111,949	139,545	169,972
2	97,0728	106,917	133,321	162,419
3	94,9731	104,619	130,443	158,874
4	91,5509	100,858	125,688	152,995
5	86,628	95,326	118,582	144,204
6	86,2734	94,9492	118,123	143,644
7	84,6697	93,2543	116,101	141,215
8	84,5496	93,1079	115,884	140,916
9	84,2489	92,8453	115,639	140,653
10	83,6259	92,0079	114,56	139,473
11	83,3731	91,8527	114,382	139,119
12	83,3651	91,8472	114,364	139,082
13	83,365	91,8472	114,363	139,081
14	83,365	91,8472	114,363	139,081
15			114,363	139,081

Tabla 7-d: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles IPN 38, IPN 40, IPN 45 y IPN 50

Perfil	Área [cm <sup>2</sup> ]		Momento resistente [cm <sup>3</sup> ]		Eficiencia del perfil diseñado
	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial	
IPN 80	5,8699	7,58	19,5	19,5	1,2913
IPN 100	8,2569	10,6	34,2	34,2	1,2837
IPN 120	11,072	14,2	54,7	54,7	1,2824
IPN 140	14,2839	18,3	81,9	81,9	1,2811
IPN 160	17,93	22,8	117	117	1,2716
IPN 180	22,007	27,9	161	161	1,2677
IPN 200	26,4147	33,5	214	214	1,2682
IPN 220	31,2784	39,6	278	278	1,26604
IPN 240	36,59034	46,1	354	354	1,2598
IPN 260	42,2606	53,4	442	442	1,2635
IPN 280	48,2253	61,1	542	542	1,2773
IPN 300	54,3649	69,1	653	653	1,27103
IPN 320	61,137	77,8	782	782	1,2725
IPN 340	68,0543	86,8	923	923	1,2754
IPN 360	75,953	97,1	1090	1090	1,2784
IPN 380	83,365	107	1260	1260	1,2835
IPN 400	91,8471	118	1460	1460	1,2847
IPN 450	114,3633	147	2040	2040	1,2853
IPN 500	139,081	180	2750	2750	1,2942

Tabla 8: Área y Momento Resistente en cada perfil optimizado y comercial. Perfil IPN

En las siguientes figuras graficamos los resultados obtenidos luego de realizar la optimización, comparando el valor diseñado con su respectivo valor comercial.

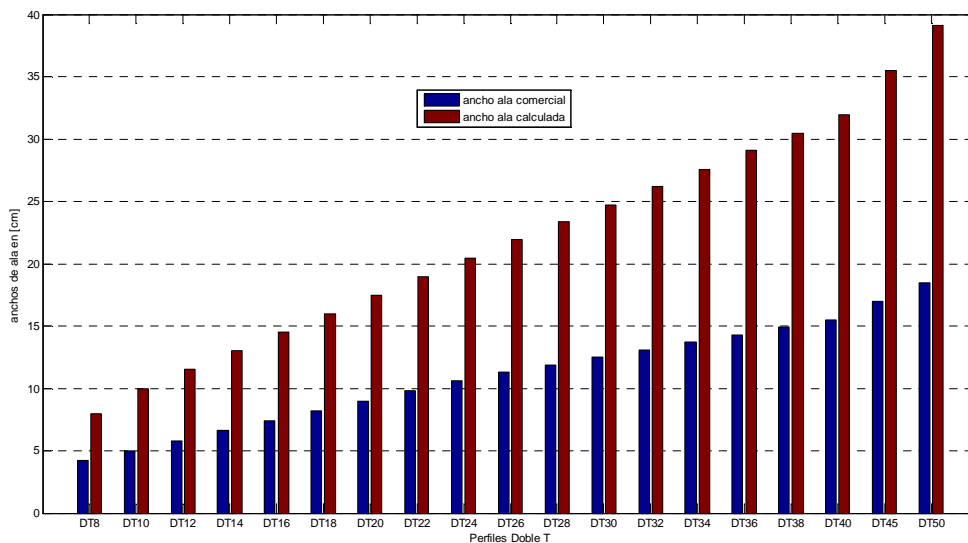


Figura 2: Resultados de la optimización  
Ancho del ala calculada vs. Comercial. Perfiles IPN

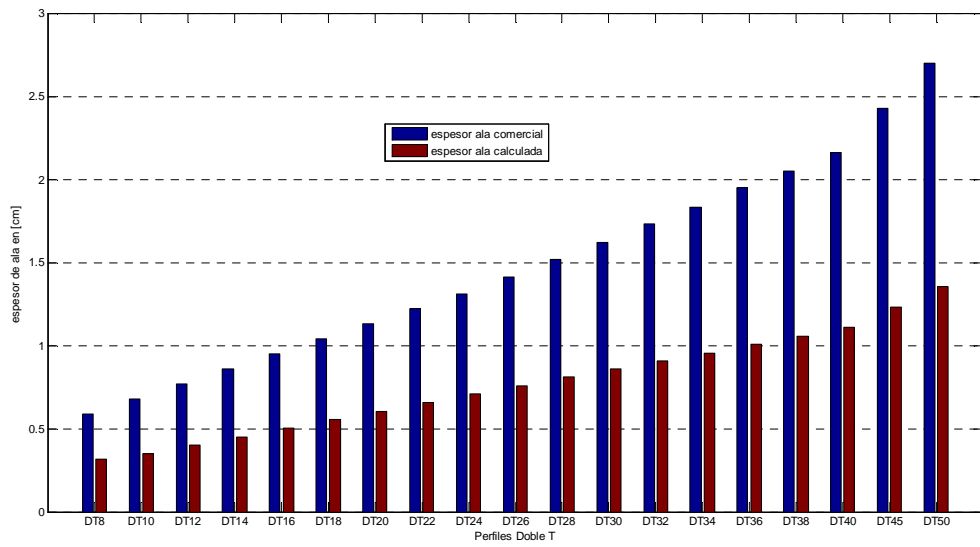


Figura 3: Resultados de la optimización  
Espesor del ala calculada vs. Comercial. Perfiles IPN

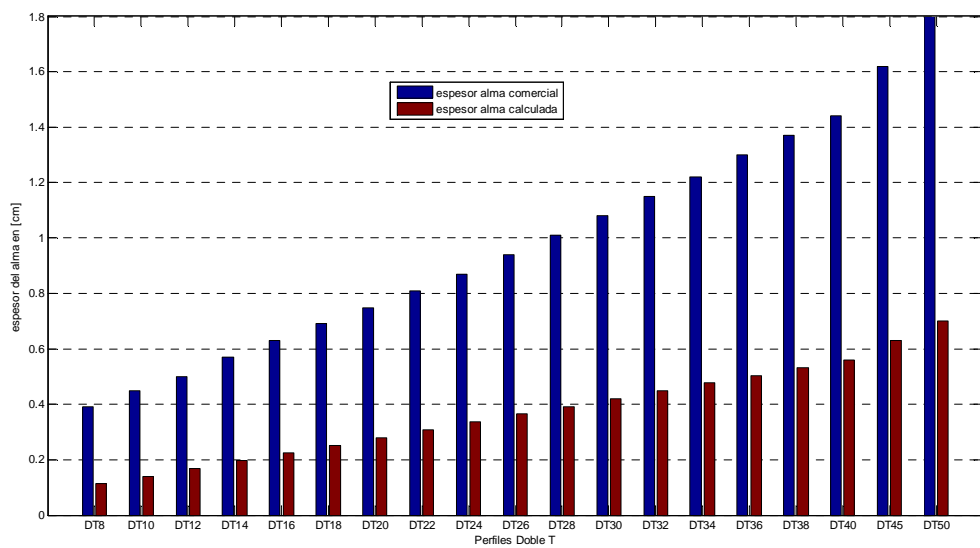


Figura 4: Resultados de la optimización  
Espesor del alma calculada vs. Comercial. Perfiles IPN

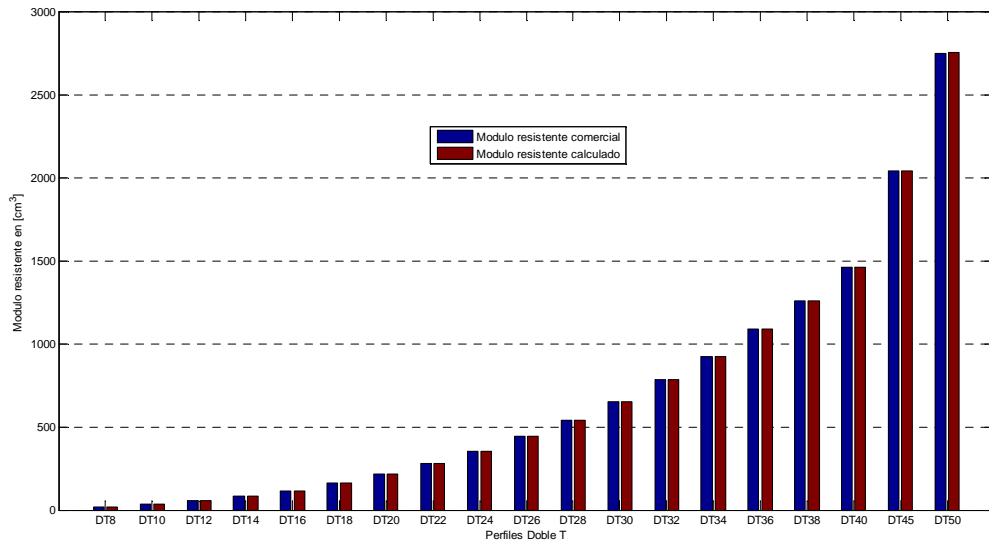


Figura 5: Resultados de la optimización  
Modulo resistente calculado vs. Comercial. Perfiles IPN

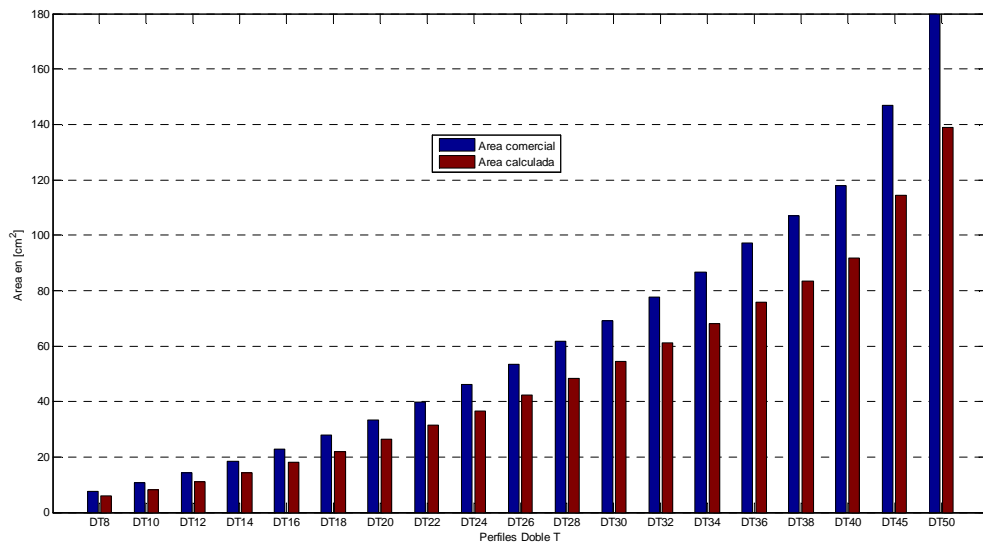


Figura 6: Resultados de la optimización  
Área calculada vs. Comercial. Perfiles IPN

### 3 OPTIMIZACION DE PERFILES U

En el caso de estos perfiles U procedemos de la misma manera que en el caso de los perfiles IPN.

En la siguiente figura podemos observar la geometría de un perfil U, las variables que lo definen que serán tomadas como variables de diseño.

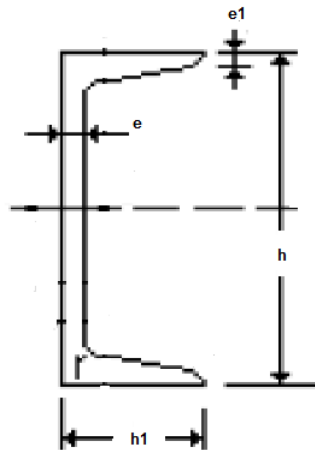


Figura 7: Perfil U

Siendo:

$h$  = altura total del perfil.

$h_1$  = ancho del ala.

$e$  = espesor del alma.

$e_1$  = espesor del ala.

Para el diseño óptimo planteamos el siguiente problema de optimización, definido por una función objetivo y un conjunto de restricciones en desigualdad

Función objetivo

$$\text{Min} \{A\} = \text{Min} \{2 h_1 e_1 + h e - 2 e_1 e\} \quad (0.12)$$

Sujeto a conjunto de restricciones

$$\frac{h_1}{e_1} - 15 \sqrt{\frac{2400}{\sigma_u}} \leq 0 \quad (0.13)$$

$$\frac{h}{e} - 71.4282 \leq 0 \quad (0.14)$$

$$1 - \frac{1}{W_t} \left[ \frac{h^2 e}{6} + h[h_1 e_1 - e_1 e] - 2 h_1 e_1^2 \right] \leq 0 \quad (0.15)$$

$$\frac{h_1}{h} - 1 \leq 0 \quad (0.16)$$

Donde las variables de diseño son:

$h_1$  = ancho del ala.

$e$  = espesor del alma.

$e_1$  = espesor del ala.

Y los parámetros fijos:

$W_t$  = Momento resistente del perfil comercial.

$\sigma_u$  = La tensión última, la que tomamos igual a 2600 [kg/cm<sup>2</sup>].

$h$  = altura total del perfil.

Los parámetros fijos, variables para cada perfil, figuran en la siguiente tabla

Tipo de perfil	Altura [cm]	Modulo resistente [cm <sup>3</sup> ]
UPN 8	8	26,5
UPN 10	10	41,2
UPN 12	12	60,7
UPN 14	14	86,4
UPN 16	16	116
UPN 18	18	150
UPN 20	20	191
UPN 22	22	245
UPN 25/8	25	302
UPN 25/10	25	414
UPN 30	30	487

Tabla 8: Parámetros fijos para cada perfil U

En la tabla 9 indicamos los puntos de inicio del proceso iterativo para cada perfil U, el cual definimos de la siguiente manera:

Ancho inicial del ala = Ancho comercial del ala

Espesor del alma inicial = 1.2 \* Espesor del alma comercial

Espesor del ala inicial = 1.2 \* Espesor del ala comercial

Tipo de perfil	Ancho del ala inicial [cm]	Espesor alma inicial [cm]	Espesor ala inicial [cm]
UPN 8	4,5	0,72	0,96
UPN 10	5	0,72	1,02
UPN 12	5,5	0,84	1,08
UPN 14	6	0,84	1,2
UPN 16	6,5	0,9	1,26
UPN 18	7	0,96	1,32
UPN 20	7,5	1,02	1,38
UPN 22	8	1,08	1,5
UPN 25/8	8	1,2	1,5
UPN 25/10	10	1,2	1,92
UPN 30	9	1,56	1,68

Tabla 9: Punto de inicio del proceso de optimización. Perfil U

En la tabla 10 evaluamos las restricciones en el punto inicial pudiendo observar que todas ellas presentan un valor negativo o nulo, garantizando el cumplimiento de que el punto inicial esta contenido en la región de diseño.

Tipo de perfil	Restricción (0.13) Seguridad ala comprimida	Restricción (0.14) Seguridad abollamiento alma	Restricción (0.15) Modulo resistente calculado mayor al comercial	Restricción (0.16) Ancho del ala inferior o igual a la altura
UPN 8	-9,724033	-60,3173889	-0,07230189	-0,4375
UPN 10	-9,50957222	-57,5396111	-0,09834951	-0,5
UPN 12	-9,31894041	-57,1427857	-0,11570346	-0,54166667
UPN 14	-9,411533	-54,7618333	-0,12092593	-0,57142857
UPN 16	-9,25280284	-53,6507222	-0,12635517	-0,59375
UPN 18	-9,1085027	-52,6785	-0,139712	-0,61111111
UPN 20	-8,97675039	-51,8206569	-0,1428377	-0,625
UPN 22	-9,07819967	-51,0581296	-0,14073469	-0,63636364
UPN 25/8	-9,07819967	-50,5951667	-0,13907285	-0,68
UPN 25/10	-9,20319967	-50,5951667	-0,14413527	-0,6
UPN 30	-9,05439014	-52,1977308	-0,14614538	-0,7

Tabla 10: Valor de las restricciones en el punto inicial. Perfil U

Luego de realizar la optimización en cada perfil U tenemos los resultados de las variables de diseño en la tabla 11, la columna valor calculado es la variable optimizada y en la columna valor comercial indicamos el valor que tiene esa variable de diseño en el perfil comercial.

En las tablas 12-a y 12-b mostramos el valor que va tomando la función objetivo, área del perfil, en cada iteración para cada perfil.

En la tabla 13 indicamos el valor del área y el momento resistente que resultan luego de la de la optimización.

Perfil	Ancho del ala [cm]		Espesor del ala [cm]		Espesor del alma [cm]	
	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial
UPN 8	7,2882	4,5	0,5057	0,8	0,112	0,6
UPN 10	8,018	5	0,5563	0,85	0,14	0,6
UPN 12	8,7983	5,5	0,6105	0,9	0,168	0,7
UPN 14	9,6515	6	0,6697	1	0,196	0,7
UPN 16	10,3888	6,5	0,7208	1,05	0,224	0,75
UPN 18	11,0649	7	0,7677	1,1	0,242	0,8
UPN 20	11,7825	7,5	0,8175	1,15	0,28	0,85
UPN 22	12,689	8	0,8804	1,25	0,308	0,9
UPN 25/8	13,0358	8	0,9045	1,25	0,35	1
UPN 25/10	15,6302	10	1,0845	1,6	0,35	1
UPN 30	15,0224	9	1,0423	1,4	0,42	1,3

Tabla 11: Resultados de las variables de diseño en cada perfil. Perfil U

Iteraciones	UPN 8	UPN 10	UPN 12	UPN 14	UPN 16	UPN 18
0	13,0176	15,9312	20,1456	24,144	28,512	33,2256
1	10,4608	12,7764	15,8076	18,9696	22,2036	26,8027
2	9,72258	12,2657	15,3452	18,6763	22,0295	25,6148
3	9,5338	11,9656	14,8461	17,7468	19,4261	24,8131
4	8,77191	11,0224	13,6742	16,6637	19,2012	23,5448
5	8,62072	10,7764	13,3962	16,5085	19,1191	22,5468
6	8,44631	10,5726	13,1823	16,3119	19,0179	22,4259
7	8,35701	10,546	13,1113	16,0024	18,334	22,1849
8	8,21998	10,314	12,7304	15,591	18,2576	21,6218
9	8,1597	10,1811	12,5728	15,4246	18,2395	21,2172
10	8,15461	10,1671	12,5555	15,41	18,239	21,1467
11	8,15433	10,1661	12,5538	15,409	18,239	21,1403
12	8,15433	10,1661	12,5538	15,409	18,239	21,1402
13	8,15433	10,1661	12,5538	15,409		21,1402
14						21,1402
15						21,1402

Tabla 12-a: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles UPN 8, UPN 10, UPN 12, UPN 14, UPN 16 y UPN 18

Iteraciones	UPN 20	UPN 22	UPN 25	UPN 25	UPN 30
0	38,2848	44,52	50,4	63,792	71,7984
1	30,9438	36,1468	39,9333	51,5051	53,1278
2	29,4373	34,3151	37,9585	49,5385	51,1272
3	28,5428	33,2969	36,8876	48,2226	49,9348
4	27,102	31,619	34,8623	45,654	47,0539
5	25,9184	30,2862	33,5206	44,3266	46,7251
6	25,7337	30,0693	33,4755	44,2413	46,3683
7	25,5137	29,8252	32,7784	43,472	46,0218
8	24,8922	29,1169	32,0386	42,4041	44,1471
9	24,4599	28,6311	31,728	41,9374	43,1334
10	24,4129	28,5828	31,7009	41,8972	43,0517
11	24,4085	28,5787	31,6999	41,8951	43,0432
12	24,4085	28,5786	31,6999	41,8951	43,0431
13	24,4085	28,5786	31,6999	41,8951	43,0431
14					43,0431

Tabla 12-b: Valor del área durante el proceso iterativo de optimización.  
Perfiles UPN 20, UPN 22, UPN 25, UPN 25 y UPN 30

Perfil	Área [cm <sup>2</sup> ]		Momento resistente [cm <sup>3</sup> ]		Eficiencia del perfil diseñado
	Valor Calculado	Valor Comercial	Valor Calculado	Valor Comercial	
UPN 8	8,1543	11	26,5	26,5	1,348976
UPN 10	10,166	13,5	41,2	41,2	1,327943



UPN 12	12,5537	17	60,7	60,7	1,354174
UPN 14	15,409	20,4	86,4	86,4	1,3239008
UPN 16	18,2389	24	116	116	1,315863
UPN 18	21,1401	28	150	150	1,324492
UPN 20	24,4085	32,2	191	191	1,319211
UPN 22	28,5786	37,4	245	245	1,308669
UPN 25/8	31,6998	42,5	302	302	1,340698
UPN 25/10	41,895	53,7	414	414	1,281774
UPN 30	43,0431	60,7	487	487	1,410214

Tabla 13: Área y Momento Resistente en cada perfil optimizado y comercial. Perfil U

En las siguientes figuras graficamos los resultados obtenidos luego de realizar la optimización, comparando el valor diseñado con su respectivo valor comercial.

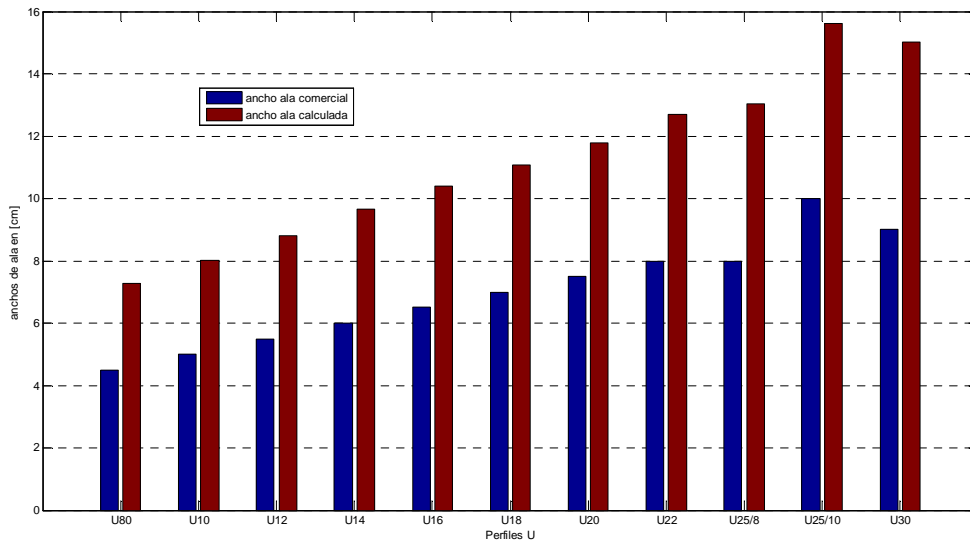


Figura 8: Resultados de la optimización Ancho del ala calculada vs. Comercial. Perfiles UPN

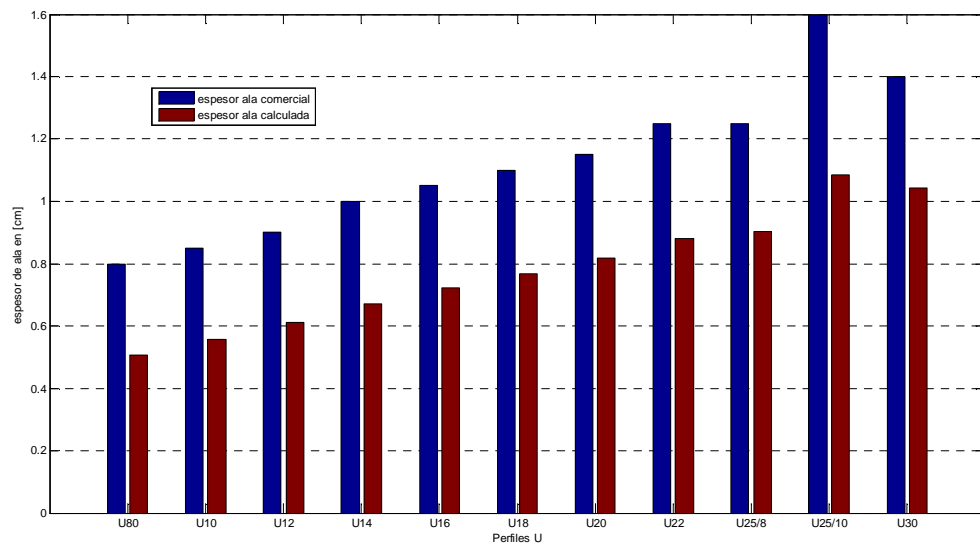


Figura 9: Resultados de la optimización  
Espesor del ala calculada vs. Comercial. Perfiles UPN

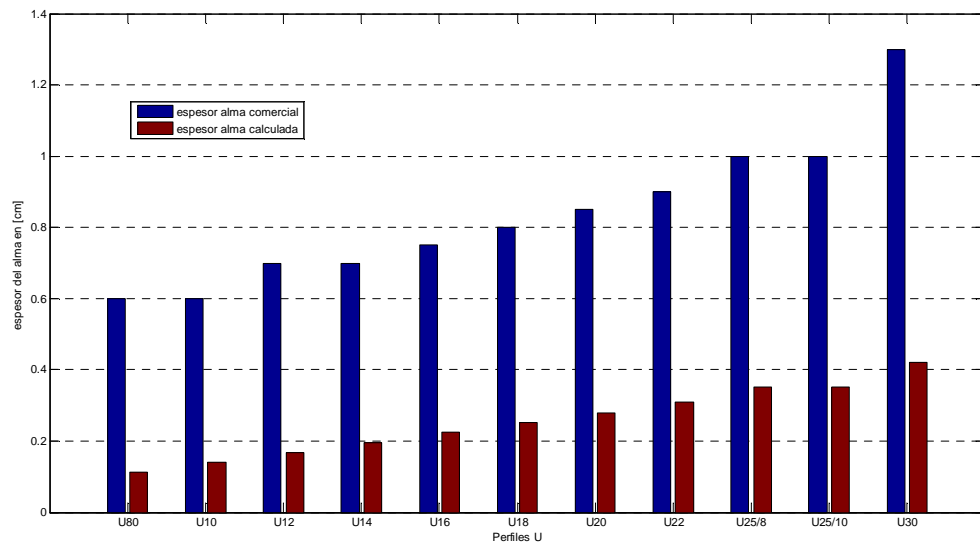


Figura 10: Resultados de la optimización  
Espesor del alma calculada vs. Comercial. Perfiles UPN

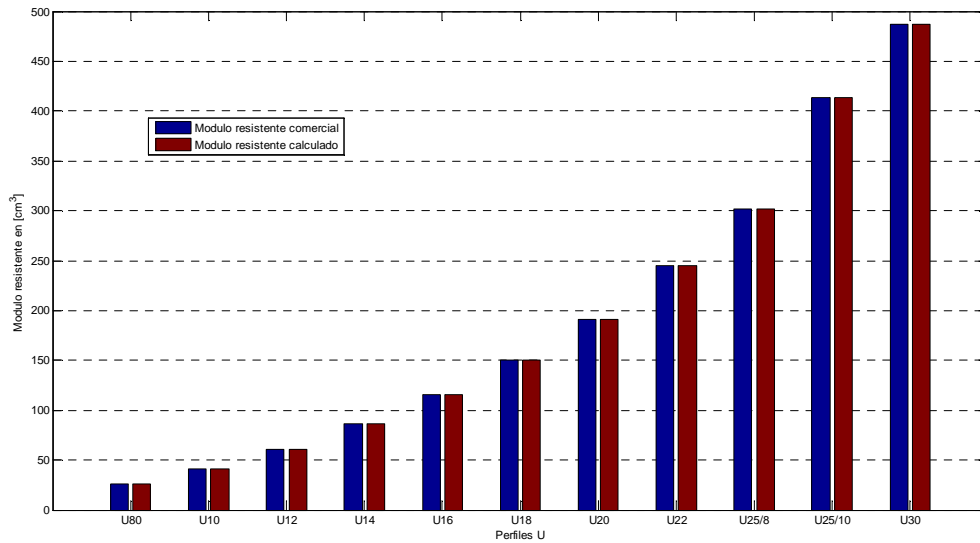


Figura 11: Resultados de la optimización Modulo resistente calculado vs. Comercial. Perfiles UPN

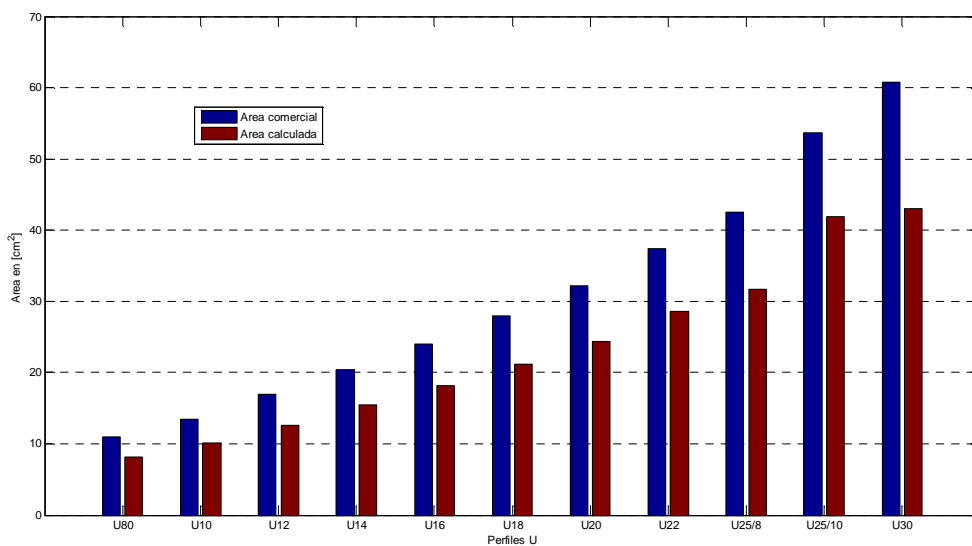


Figura 12: Resultados de la optimización Área calculada vs. Comercial. Perfiles UPN

#### 4 DESCRIPCION DEL ALGORITMO DE OPTIMIZACION

En este trabajo, dado las no linealidades de la función objetivo como de sus restricciones, implementamos una técnica de programación no lineal para poder obtener las soluciones a nuestros problemas.

La metodología aplicada es la FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm), esta formulación presenta la característica de poder realizar una búsqueda a lo largo de un arco como se ve en la figura 13, esto nos favorece en el caso de las restricciones no lineales ya que

nos permite ir moviéndonos en forma iterativa siempre dentro de la región de diseño.

Para la descripción del algoritmo FAIPA suponemos la siguiente formulación general

$$\begin{aligned} & \text{Min } \{f(x)\} \\ & \underline{x} \\ & \text{Restricciones } \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ h(x)=0 \end{cases} \end{aligned} \quad (0.17)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f$  es la función objetivo  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $g$  es conjunto de las inecuaciones  $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  y  $h$  es el conjunto de ecuaciones  $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ . Nosotros asumimos que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son continuas y su derivadas también.

El algoritmo FAIPA:

Parámetros:  $\varphi > 0$ ,  $\alpha \in (0,1)$  y  $r > 0$ ,  $r \in \mathfrak{R}^p$ .

Datos iniciales:

$\lambda > 0$  y  $\underline{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  simétrica y definida positiva.

$\underline{x} \in \mathfrak{R}^n$  es un punto factible.

Paso 1) Cálculo de la dirección  $\underline{d}$

Computo de  $(d_0, \lambda_0, \mu_0)$  y  $(d_1, \lambda_1, \mu_1)$  por medio de la resolución de los sistemas lineales.

$$\begin{cases} Bd_0 + \nabla g(x)\lambda_0 + \nabla h(x)\mu_0 = -\nabla f(x) \\ \Lambda \nabla g^t(x)d_0 + G(x)\lambda_0 = 0 \\ \nabla h^t(x)d_0 = -h(x) \end{cases} \quad (0.18)$$

$$\begin{cases} Bd_1 + \nabla g(x)\lambda_1 + \nabla h(x)\mu_1 = 0 \\ \Lambda \nabla g^t(x)d_1 + G(x)\lambda_1 = -\lambda \\ \nabla h^t(x)d_1 = 0 \end{cases} \quad (0.19)$$

Si  $d_0 = 0$  para el algoritmo

Si  $r_i \leq \|\mu_{0i}\|$  hacemos  $r_i > \|\mu_{0i}\|$   $i = 1, 2, \dots, p$

Definimos la función  $\phi(x, r) = f(x) + r^t \text{sgn}[h(x)]h(x)$

Si  $d_1^t \nabla \phi(x, r) > 0$  entonces

$$\rho = \inf \left[ (\varphi) \|d_0\|^2; (\alpha-1) d_0^t \nabla \phi(x, r) / d_1^t \nabla \phi(x, r) \right]$$

Sino

$$\rho = \varphi \|d_0\|^2$$

Cálculo de la dirección  $d = d_0 + \rho d_1$

Paso 2) Cálculo de la dirección de descenso en arco.

Definimos  $\tilde{w}_i^I = g_i(x+d) - g_i(x) - \nabla g_i^t d$  y  $\tilde{w}_i^E = h_i(x+d) - h_i(x) - \nabla h_i^t d$   $i = 1, 2, \dots, m$ .

Calculamos  $\tilde{d}$  y  $\tilde{\lambda}$  mediante la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} B\tilde{d} + \nabla g(x)\tilde{\lambda} + \nabla h(x)\tilde{\mu} = 0 \\ \Lambda \nabla g^t(x)\tilde{d} + G(x)\tilde{\lambda} = -\lambda \tilde{w}_i^I \\ \nabla h^t(x)\tilde{d} = -\mu \tilde{w}_i^E \end{cases} \quad (0.20)$$

Paso 3) Búsqueda a lo largo del arco.

Encontrar un paso  $t$  que satisfaga un criterio de búsqueda aplicado a  $\phi(x, r)$  tal que las restricciones cumplan

$$g_i(x+td+t^2\tilde{d}) < 0 \text{ if } \tilde{\lambda}_i \geq 0 \text{ o } g_i(x+td+t^2\tilde{d}) < g_i(x)$$

Paso 4) Actualizamos

$x = x + td + t^2\tilde{d}$  y definimos los nuevos valores  $\lambda > 0, \mu > 0$  y la matriz  $\underline{B}$  simétrica y definida positiva.

Volvemos al paso 1)

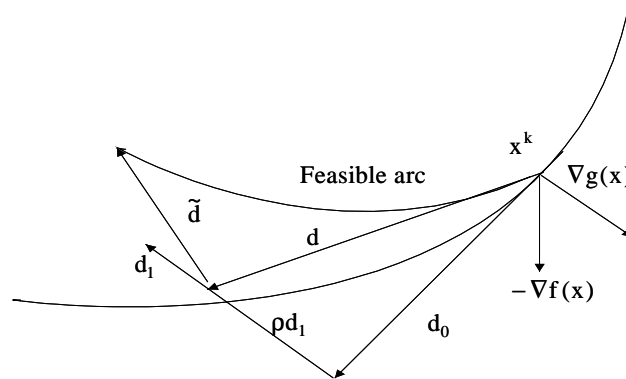


Figura 13: Direcciones de búsqueda. FAIPA

## 5 CONCLUSIONES

En las tablas 8 y 13 en la última columna se indica la eficiencia del perfil diseñado, para lo cual definimos el coeficiente de eficiencia de la siguiente forma:

$$efi = \frac{W^*/A^*}{W/A} = \frac{A W^*}{A^* W} \quad (0.21)$$

Siendo:

$W^*$  = Momento resistente del perfil diseñado.

$A^*$  = Área del perfil diseñado.

$W$  = Momento resistente del perfil comercial.

$A$  = Área del perfil comercial.

En nuestra formulación, siempre la restricción que nos garantiza que el perfil diseñado tenga mayor o igual momento resistente que el comercial, restricciones (0.10) y (0.15), se hace activa, lo cual podemos ver en las figuras 5 y 11. Esto hace que en el diseño óptimo el coeficiente de eficiencia (0.21) tome la forma

$$efi = \frac{A}{A^*} \quad (0.22)$$

Si definimos la disminución porcentual del área del perfil diseñado respecto al área comercial, por la siguiente formula

$$dism \% = \frac{A - A^*}{A} 100 \quad (0.23)$$

Y sustituyendo (0.22) en (0.23), nos queda

$$dism \% = \frac{efi - 1}{efi} 100 \quad (0.24)$$

Para el caso de los perfiles IPN tenemos

Perfil	Eficiencia	Disminución porcentual del área
IPN 80	1,2913	22,55866181
IPN 100	1,2837	22,10017917
IPN 120	1,2824	22,02121023
IPN 140	1,2811	21,94208102
IPN 160	1,2716	21,3589179
IPN 180	1,2677	21,11698351
IPN 200	1,2682	21,1480839
IPN 220	1,26604	21,01355407
IPN 240	1,2598	20,622321
IPN 260	1,2635	20,8547685
IPN 280	1,2773	21,70985673
IPN 300	1,27103	21,3236509
IPN 320	1,2725	21,41453831
IPN 340	1,2754	21,59322565
IPN 360	1,2784	21,77722153
IPN 380	1,2835	22,08804051
IPN 400	1,2847	22,16081575
IPN 450	1,2853	22,19715242
IPN 500	1,2942	22,73218977

Tabla 14: Coeficiente de eficiencia y disminución porcentual del área. Perfiles IPN

De la tabla 14 podemos ver que el promedio de disminución porcentual del área es del 21,67 % respecto a la comercial en el caso de los perfiles IPN.

Para el caso de los perfiles UPN tenemos

Perfil	Eficiencia del perfil diseñado	Disminución porcentual del área
UPN 8	1,348976	25,86969672
UPN 10	1,327943	24,69556299
UPN 12	1,354174	26,15424606
UPN 14	1,3239008	24,46563972
UPN 16	1,315863	24,00424664
UPN 18	1,324492	24,49935522
UPN 20	1,319211	24,19711479
UPN 22	1,308669	23,58648367
UPN 25/8	1,340698	25,41198689
UPN 25/10	1,281774	21,98312651
UPN 30	1,410214	29,0887766

Tabla 15: Coeficiente de eficiencia y disminución porcentual del área. Perfiles UPN

De la tabla 15 podemos ver que el promedio de disminución porcentual del área es del 24,9% respecto a la comercial en el caso de los perfiles UPN.

Por lo anterior vemos que para ambas topologías de perfiles hemos obtenido diseños que presentan una gran reducción del área.

También podemos observar el buen comportamiento que presenta la metodología FAIPA en la resolución del problema de programación no lineal en las tablas 7-a, 7-b, 7-c y 7-d para los perfiles IPN y en las tablas 12-a y 12-b para los UPN, en las cuales se manifiesta una muy buena convergencia a la solución óptima.

**Agradecimientos:** A la facultad Regional La Plata – Dpto. de Mecánica y Industrial en la cual trabajo y financian mi trabajo de investigación. Al CIMEC por lo bien que siempre me han recibido y al profesor Herskovits por facilitarme su algoritmo y brindarme toda la colaboración.

## REFERENCIAS

- Hernandez Ibañez, Santiago: Métodos de diseño óptimo de estructuras. Ed.: Paraninfo. 1990. ISBN: 84-380-0038-X.
- Herskovits, J., P. Mappa, E. Goulart y C.M. Mota Soares, 2005. Mathematical programming models and algorithms for engineering design optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 194: 3244-3268.
- Herskovits J. and Santos, G., Feasible Arc Interior Point Algorithms for Nonlinear Optimization, IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, 1998.
- Herskovits J., A View On Nonlinear Optimization, in "Advances in Structural Optimization", vol 25 pp 71-116 Editora Kluwer Academic Publishers - Holland 1995.