

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO EM PROBLEMAS COM ANÁLISE INELÁSTICA

Paullo M. Luis F., Roehl. Deane

*Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua
Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, www.civ.puc-rio.br*

*Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica - Tecgraf, Pontifícia Universidade Católica do Rio de
Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil,*

Palavras Chave: Método de comprimento de arco, método de controle de energia, controle indireto de deformação, deformações localizadas, plasticidade.

Resumo. Muitos problemas na engenharia estrutural são caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que conformam as estruturas, envolvendo problemas de plasticidade, dano, fraturamento, entre outros. Um problema complexo na análise inelástica é a ocorrência de deformações localizadas. Este fenômeno pode ocasionar problemas de convergência durante a análise e levar à interrupção da mesma. A análise numérica de estruturas nessas condições requer, com frequência, o uso de controles de análise que permitam avaliar fenômenos de perda de rigidez. Para analisar estes fenômenos, existem métodos de controle chamados de continuação, destacando-se entre eles os métodos de comprimento de arco e controle de energia. No presente trabalho são estudados três tipos de técnicas de controle de análise, comprimento de arco, controle de deslocamento indireto e controle de dissipação de energia. Apresenta-se uma análise da eficiência dos métodos aplicados a problemas de plasticidade com encruamento e com amolecimento. Esses métodos são empregados em associação com um esquema de solução de sistemas de equações não-lineares tipo Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado.

1 INTRODUÇÃO

Na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema complexo gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração deste fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica, acontecendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mal condicionamento numérico.

Neste contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer de controles de análise que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento inelástico dos materiais. Para tal, existem os chamados métodos de continuação, Eses métodos de controle de análise podem ser clasificados como, métodos de controle geométrico, que controlam propriedades geométricas da resposta do sistema, dentre os quais destaca o método de controle de arco, amplamente estudado desde as pesquisas feitas por Crisfield(1981) e Ramm(1981) passando por diversas metodologias de modificação. Um aspecto importante na utilização destes métodos é a determinação do tamanho do parâmetro de controle, influenciando substancialmente o número de iterações necessárias para a convergência e o prosseguimento correto da análise. Muitos pesquisadores tem estudado este problema nos últimos anos, tal é o caso de Ramm(1981), Itoh e Nogami(1986), Chaisomphob et al(1988), os quais estudaram formas de auto adaptação do tamanho do parâmetro de controle no método de controle de arco. Recentemente, Valli et al(2009), estuda a auto adaptação de parâmetros de controle de arco em problemas não lineares que acontecem na mecânica dos fluídos.

No presente trabalho, são estudados três métodos de continuação: O controle de arco esférico e cilíndrico, controle de deslocamento indireto e controle de dissipação de energia. Avaliando sua eficiência ao analisar problemas que consideram plasticidade do material e não linearidade geométrica. É adotado como lei de encruamento do material o modelo proposto por Druker-Prager considerando evolução linear de encruamento e amolecimento.

Como primeira etapa de avaliação, é analisado o desempenho dos métodos de continuação considerando encruamento e amolecimento do material testando o desempenho dos métodos de controle. Como segunda etapa, é estudado o desempenho dos controles em exemplos que contemplam não linearidade geométrica apenas, e como terceira etapa, é analisado um exemplo que tem não linearidade geométrica e inelasticidade. Os métodos de controle estudados são empregados em associação com um esquema de solução de sistemas de equações não-lineares tipo Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado. A integração do elemento é feita pela quadratura de Gauss considerando 3 pontos de integração em cada direção, conhecida também como a regra de Gauss 3x3.

2 FORMULAÇÃO

Seja o sistema não linear em elementos finitos, descrito pela seguinte equação de equilíbrio estático:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

Onde \mathbf{u} e \mathbf{F} são os vetores de deslocamentos e forças nodais respectivamente, e \mathbf{K} , é a matriz de rigidez na posição de equilíbrio, que em princípio é dependente do campo dos deslocamentos, i.e., \mathbf{K} não é constante. Em uma análise incremental a equação de equilíbrio incremental pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{f} \quad (2)$$

onde “i” indica o i-ésimo passo de análise, λ_i é o parâmetro tamanho do vetor de forças nodais, e f é o vetor unitário de forças nodais; e que são obtidos a partir da soma do incremento do passo mais o valor do parâmetro no passo anterior:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i, \quad \lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i \quad (3)$$

Os incrementos de cada passo ‘i’ podem ser obtidos iterativamente através da adição ao sistema de uma equação de restrição, é usando a seguinte aproximação:

$$\mathbf{K}_i^{k-1} \cdot \Delta\mathbf{u}_i^k = \Delta\lambda_i^k \mathbf{f} + \mathbf{R}^k$$

$$\Delta\mathbf{u}_i^k = \Delta\mathbf{u}_i^{k-1} + \delta\mathbf{u}^k, \quad \Delta\lambda_i^k = \Delta\lambda_i^{k-1} + \delta\lambda^k \quad (4)$$

onde \mathbf{R}^{k-1} é o vetor de força desbalanceadora produto da diferença entre as forças internas e externas, e o super-escrito “k” indica o número da iteração dentro do passo i. Introduzindo a equação de restrição:

$$\mathbf{g}(\Delta\mathbf{u}_i^k, \Delta\lambda_i^k) = \mathbf{0} \quad (5)$$

As equações (4) e (5) podem ser resolvidas iterativamente através do método de Newton-Raphson. No presente trabalho são usados os métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado, iterando até atingir uma medida de erro ou tolerância desejada que garanta a convergência do passo. Os valores das variáveis para $k=0$ são adotados com o valor da variável na última iteração do passo anterior, se houver convergência neste último. A equação de restrição dependerá do tipo de controle utilizado durante a análise. São considerados dois critérios para o cálculo de erro da iteração, a convergência é verificada se o maior erro calculado é menor que uma medida de tolerância admissível, tal como indicado na equação (6).

$$erro_1^k = \left| \frac{R^k}{\lambda_i^k f} \right|, \quad erro_2^k = \left| \frac{W^k - W^{k-1}}{W^{k+k1}} \right|, \quad W^k = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{u}^k)^T \cdot \lambda_i^k \mathbf{f} \quad (6)$$

2.1 Controle por comprimento de arco

A técnica de comprimento de arco no controle da análise estrutural não linear, constitui um dos mais populares métodos, para salvar problemas não lineares que incluam perda de rigidez do sistema. O controle de arco introduz a seguinte equação de restrição:

$$\mathbf{g}(\Delta\mathbf{u}_i^k, \Delta\lambda_i^k) = \|\Delta\mathbf{u}_i^k\| + \Delta\lambda_i^k{}^2 - l_i^2 = \mathbf{0} \quad (6)$$

onde l_i é o parâmetro de controle de arco que é imposto a permanecer constante ao longo do passo. Introduzindo a equação (6) em (5) e (4) o parâmetro de carga $\delta\lambda_i^k$ é obtido através de:

$$a \cdot \delta\lambda_i^k{}^2 + b \cdot \delta\lambda_i^k - c = 0 \quad (7)$$

onde:

$$a = \left\| (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \right\| + 1$$

$$b = ((\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f})^T \cdot d + \Delta\lambda_i^{k-1}$$

$$c = \|d\| + (\Delta\lambda_i^{k-1})^2 - l_i^2$$

$$d = \Delta\mathbf{u}_i^{k-1} + \mathbf{K}_i^{k-1} \cdot \mathbf{R}^{k-1} + \Delta\lambda_i^{k-1} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (8)$$

Esta técnica é também conhecida como controle de arco esférico. Mais detalhes podem ser encontrados em Bazolt e Dhatt (1979), Memom e Su (2003). Uma dificuldade é a determinação de um adequado tamanho de parâmetro de controle l_i o qual deve ser o suficientemente pequeno para garantir tanto a exatidão do resultado quanto a convergência da análise, este item será abordado posteriormente.

2.2 Controle por comprimento de arco cilíndrico

O controle por comprimento de arco cilíndrico, descrito em Crisfield(1981), consiste na modificação da equação (6) para:

$$\mathbf{g}(\Delta \mathbf{u}_i^k) = \|\Delta \mathbf{u}_i^k\| - l_i^2 = \mathbf{0} \quad (9)$$

Por tanto, o parâmetro de incremento de carga $\delta \lambda_i^k$ é obtido também pela equação (7), e (8) fica modificada para:

$$\begin{aligned} a &= \left\| (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \right\| \\ b &= \left((\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \right)^T \cdot d \\ c &= \left((\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \right)^T \cdot \left((\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \right) - l_i^2 \\ d &= \Delta \mathbf{u}_i^{k-1} + \mathbf{K}_i^{k-1} \cdot R^{k-1} + \Delta \lambda_i^{k-1} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{f} \end{aligned} \quad (10)$$

Uma vantagem desta técnica é que o parâmetro de controle é proporcional à norma dos deslocamentos, mantendo portanto, uma relação de grandeza com os deslocamentos, isto pode facilitar a escolha do tamanho do parâmetro l_i a utilizar.

2.3 Adaptação do tamanho do parâmetro de controle do comprimento de arco

Com a finalidade de garantir um tamanho adequado do parâmetro l_i a fim de garantir a convergência no passo, é empregada a seguinte fórmula, presnete em Chaisomphob et al(1988) e introduzido por Ramm(1981), para a adaptação do tamanho de l_i :

$$l_{i+1} = \sqrt{\frac{N_d}{N_i}} \cdot l_i \quad (11)$$

Onde N_d e N_i são o número de iterações desejadas e utilizadas para atingir a convergência respectivamente. Sendo necessário também definir limites máximos e mínimos l_{min} e l_{max} para l_i a fim de não obter dados absurdos de análise que levem ao mau condicionamento ou um velocidade de análise lenta em demasia.

2.4 Controle por dissipação de energia

Verhossel(2009), no seu estudo de análise de micro sistemas eletromecânicos envolvendo não-linearidades de material, desenvolve uma técnica de controle a través de um parâmetro de dissipação de energia, a equação de restrição dependerá do tipo de processo de dissipação, i.e., que haverá equações distintas para processos de fratura, dano, plasticidade, etc. Para o caso de processos de plasticidade a equação de restrição é dada por:

$$\mathbf{g} = (\Delta \mathbf{u}_i^k)^T (\lambda_{i-1} \mathbf{f} - \mathbf{f}_i^{*k}) - \tau_i = \mathbf{0} \quad (12)$$

Onde \mathbf{f}_i^{*k} é um vetor de força nodal interna envolvendo a dissipação, que será definido posteriormente, e τ_i o parâmetro de controle de energia dissipada no passo, é que permanece constante durante o mesmo. Dado que em um processo elástico, existente frequentemente no começo das análises não-lineares, não há dissipação de energia, é necessário combinar a técnica anterior com outro tipo de controle que não dependa da energia dissipada, e ir acompanhando a dissipação do sistema passo a passo. O controle entrará, portanto, a ser utilizado quando for atingida uma quantidade de energia dissipada mínima necessária τ_{nec} . No presente trabalho, esta técnica é combinada com o método de comprimento de arco, para dar início à análise, e mudando o controle quando for atingido o parâmetro τ_{nec} , o qual, no presente trabalho, é o suficientemente pequeno para que a técnica entre em ação assim que se apresentar o primeiro passo de análise não-linear.

Introduzindo (12) em (4) e (5), se obtém o valor do incremento do parâmetro de carga. $\delta \lambda^k$ por meio da seguinte expressão:

$$\delta\lambda^k = \frac{g^k}{(\lambda_{i-1}f - f^{*k})^T \cdot (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot f} \quad (13)$$

Analogamente à adaptação do tamanho do comprimento de arco, é adaptado o parâmetro de dissipação de energia a traves da seguinte expressão.

$$\tau_{i+1} = \sqrt{\frac{N_d}{N_i}} \cdot \tau_i \quad (14)$$

Em este caso também é necessário o a definição de parâmetros mínimo e máximo τ_{min} , τ_{max} para garantir a convergência e uma velocidade de análise conveniente. Da mesma forma que no controle de arco Esférico, a determinação do tamanho do parâmetro de controle deve ser o suficientemente pequeno para garantir a convergência e exatidão da análise.

2.5 Controle indireto por incremento de deformação.

Esta metodologia proposta por Chen e Schreyer (1990), se baseia na consideração como controle de análise um incremento da deformação em algum ponto de interesse do elemento, este incremento pode ser relacionado com o incremento do vetor de deslocamento nodal obtido a partir da equação (4), por meio da matriz de relação cinemática que relaciona deformação com deslocamentos no ponto de interesse, \mathbf{B}_{int} :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{int} = \mathbf{B}_{int} \cdot (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot R^k + \Delta\lambda \mathbf{B}_{int} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot f \quad (15)$$

Onde $\Delta\mathbf{e}_{int}$ é o incremento do tensor de deformações no ponto de interesse expresso na sua forma vetorial. Supondo que este incremento de deformação seja determinado a sua vez por combinação linear do tensor unitário das deformações no ponto de interesse \mathbf{c}_{int} correspondentes ao ultimo valor do passo anterior (quando há convergência), expresso na sua forma vetorial, e um parâmetro escalar que forneça o tamanho de incremento de deformação Δe , i.e. :

$$\mathbf{c}_{int}^T \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{int} = \Delta e, \quad \mathbf{c}_{int} = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{int}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{int}\|} \right)_0 \quad (16)$$

Introduzindo (16) em (15), e mantendo Δe consante ao longo do passo, obtém-se:

$$\delta\lambda^k = \frac{\Delta e}{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{B}_{int} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot f} \quad \text{para } k = 1$$

$$\delta\lambda^k = - \frac{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{B}_{int} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot R^{k-1}}{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{B}_{int} (\mathbf{K}_i^{k-1})^{-1} \cdot f} \quad \text{para } k > 1 \quad (17)$$

Uma aspecto importante a levar em conta é na escolha do tamanho de incremento de deformação Δe e a seleção do ponto onde serão verificadas as deformações para o cálculo de \mathbf{c}_{int} e \mathbf{B}_{int} . No presente trabalho sao verificadas as deformações nos pontos de integração de Gauss, tomando o ponto que tiver maior norma de deformações para o cálculo de \mathbf{c}_{int} e \mathbf{B}_{int} . Inicialmente não é considerada uma adaptação do tamanho de Δe (exemplos com encruamento do material). Porém, nos casos que envolvem amolecimento do material, é também considerada uma adaptação seguindo a analogia do comprimento de arco:

$$\Delta e_{i+1} = \sqrt{\frac{N_d}{N_i}} \cdot \Delta e_i \quad (18)$$

Levando em conta também limites do tamanho do parâmetro de controle, Δe_{max} e Δe_{min} .

2.6 Análise incremental elasto-plástica.

Para os exemplos numéricos do presente trabalho é considerado que o material é homogêneo com comportamento elasto-plástico cuja lei de escoamento é dada pelo modelo de Drucker-Prager, com evolução linear da superfície de escoamento. A função de plasticidade é dada por:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} - \sqrt{3}/3(\alpha + 1)\sigma_y + H \cdot q \quad (19)$$

Onde I_1 é o primeiro invariante do tensor das tensões, J_2 é o segundo invariante do tensor de tensões desviadoras, α é o ângulo interno do cone formado pela superfície de escoamento, σ_y é a tensão do limite elástico do material (tensão de escoamento) quando submetido a um ensaio de tração uniaxial, q é o tamanho da deformação plástica acumulada e H é o módulo linear da lei de evolução do escoamento. A integração das tensões e deformações é feita seguindo o algoritmo incremental de Euler implícito e considerando deformação plástica associada à lei de escoamento, supondo inicialmente um comportamento elástico do material (preditores elásticos) e verificando em cada passo a condição de escoamento, para que, se houver condição de plasticidade, sejam corrigidas as tensões e deformações (corretor plástico) usando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_i^p + \Delta\gamma \cdot \mathbf{N}_{i+1} \\ q_{i+1} &= q_i + \Delta\gamma \\ \boldsymbol{\sigma}_{i+1} &= \mathbf{D}^e \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) - \Delta\gamma \cdot \mathbf{N}_{i+1} \right) \\ \mathbf{N}_{i+1} &= \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{i+1}} \end{aligned} \quad (20)$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}_i^p$, $\boldsymbol{\sigma}_i$, q_i são a deformação plástica, as tensões e a deformação plástica acumulada do i -ésimo passo correspondentemente. $\Delta\gamma$ é o tamanho do incremento da deformação plástica e \mathbf{D}^e é o tensor constitutivo elástico. Se no passo da análise $i+1$ houver plastificação do material é cumprido que:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}, q_{i+1}) = 0 \quad (21)$$

Resolvendo o sistema descrito nas equações (20) e (21), obtém-se o tamanho do incremento da deformação plástica necessário para a correção das tensões e deformações. Uma descrição mais detalhada do processo de integração elasto-plástica pode ser encontrada em Souza Neto *et al* (2008), etc...

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS.

3.1 Análise considerando somente comportamento elasto-plástico do material

Nesta seção é analisada uma chapa quadrada de lado L e espessura t , modelada através de um único elemento plano de 4 nós, com restrições e graus de liberdade tal como mostrado na Figura 1.

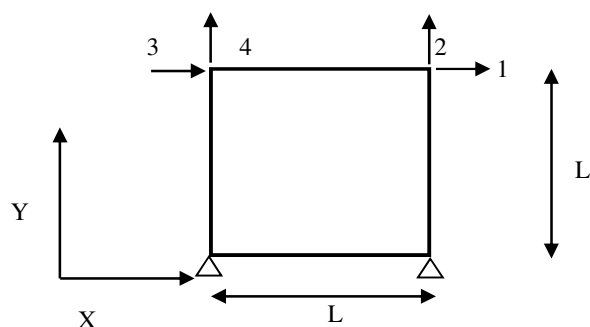


Figura 1: Configuração da estrutura

A estrutura está submetida a uma carga concentrada P atuando no grau de liberdade 1 (Figura 2), adota-se esta configuração de carregamento por ser a que gerou a maior exigência na análise comparado com outros tipos de carregamentos testados preliminarmente, isto deve-se a que esta configuração de carregamento produz distorções importantes na estrutura.

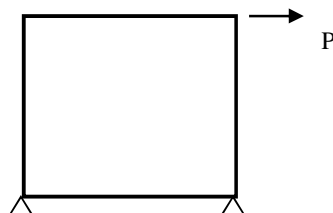


Figura 2: Configuração do carregamento atuante na estrutura

Na Tabela 1 são descritos os valores que definem a geometria do elemento, assim como as propriedades mecânicas do material que são mantidos constantes em todos os exemplos no presente trabalho.

Tabela 1: Propriedades da estrutura

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Espessura	t	m	0.1
Comprimento da chapa	L	m	2.0
Módulo de Elasticidade	E	GPa	480
Tensão de Escoamento	σ_y	GPa	1.0
Parâmetro da função de escoamento	A	--	0.3
Coefficiente de Poisson	N	GPa	0.2
Tolerância máxima	tol	--	10^{-7}

3.1.1 Análise considerando encruamento do material

Nesta seção é considerada uma evolução da condição de escoamento para valores positivos de H (encruamento linear do material), estudando a influência tanto do tamanho do parâmetro de controle, assim como o valor do módulo de encruamento. É analisado o número de iterações necessárias para atingir um tamanho de deslocamento fixo para os quatro métodos, considerando somente as iterações dos passos após do começo da análise se tornar não linear,

i.e., não são contabilizadas as iterações enquanto à estrutura permanece em regime elástico linear.

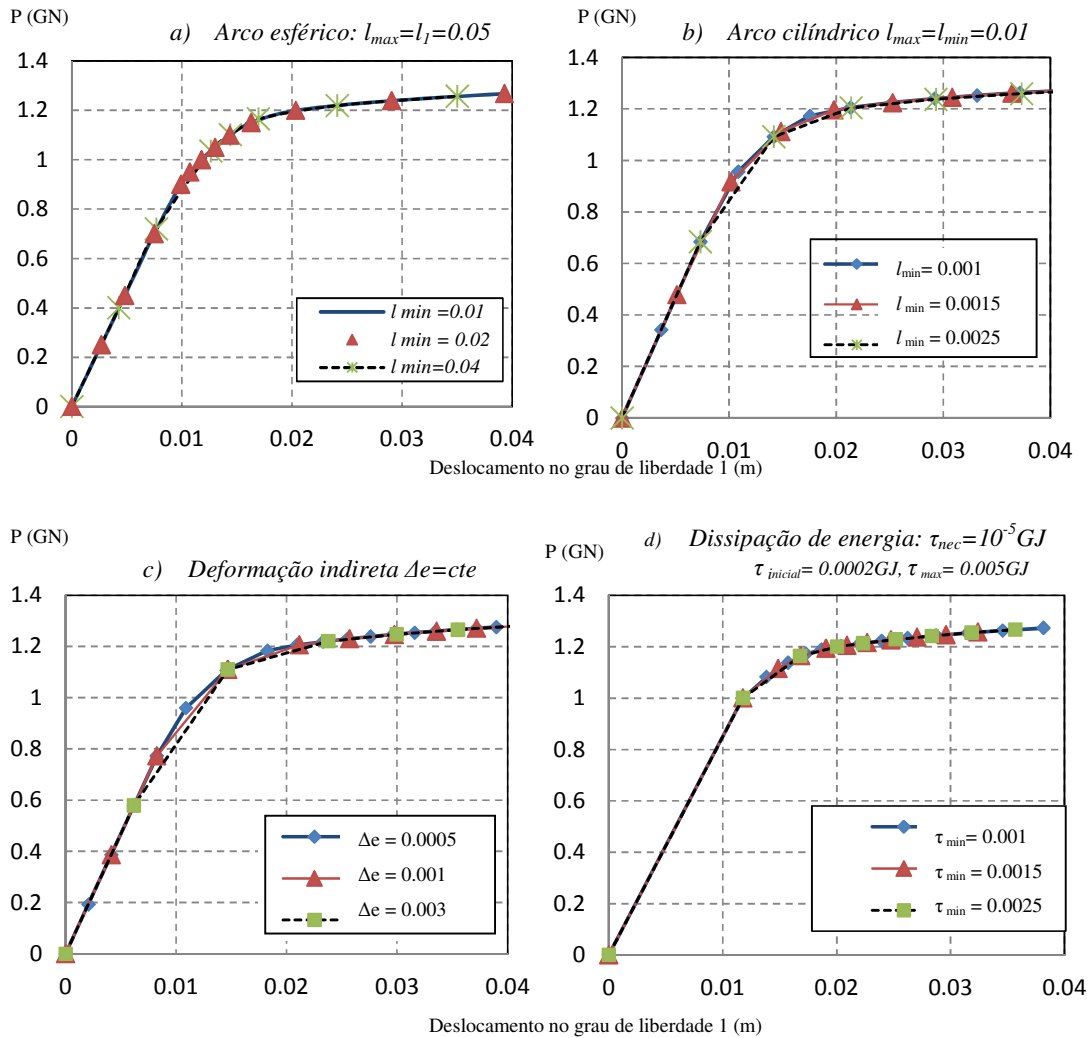


Figure 3: Força P vs deslocamento no grau de liberdade 1, $H = 10\text{GPa}$.

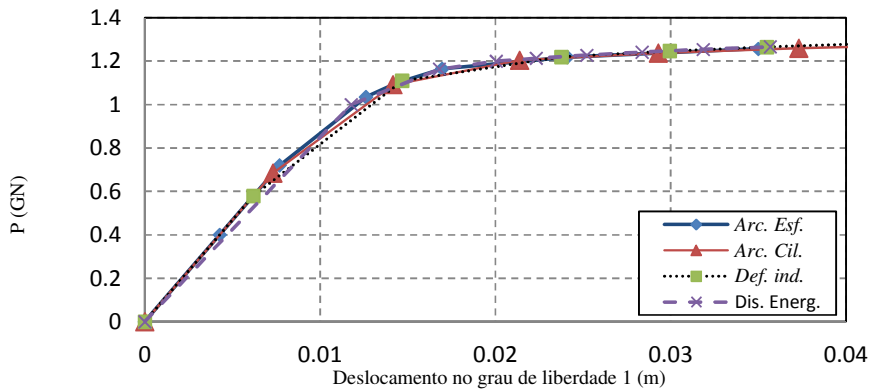
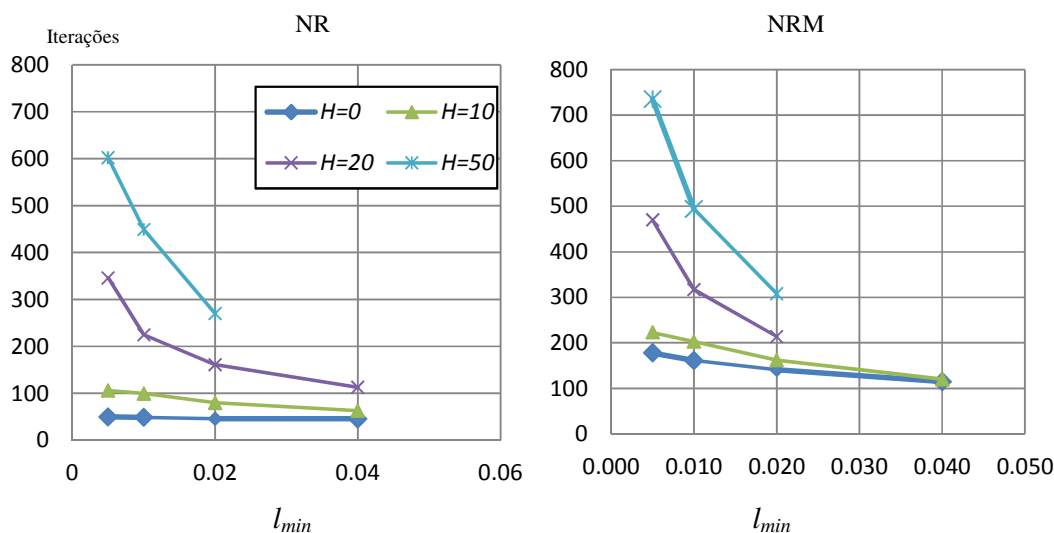
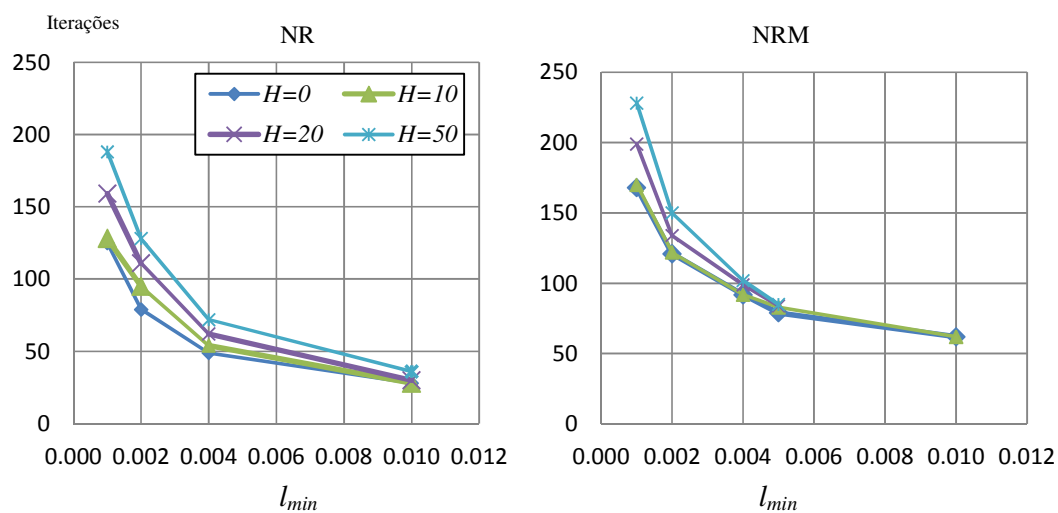


Figura 4: Força P vs deslocamento no grau de liberdade 1, $H = 10\text{GPa}$; comparação dos distintos controles de análise.

Na Figura 3 e Figura 4, é apresentado o comportamento do sistema para o deslocamento do grau de liberdade 1 em função ao crescimento da carga P para os quatro tipos de controle analisados e considerando distintos tamanhos de controle. Todos os métodos convergem para uma mesma curva de equilíbrio, o que representa que o algoritmo implementado representa convenientemente a resposta do sistema analisado. Portanto, pode-se proceder a fazer o estudo da eficiência dos métodos de controle analisados.



a) Controle de arco esférico: $l_{max} = l_{inicial} = 0.05$



b) Controle de arco Cilíndrico: $l_{max} = l_{inicial} = 0.01$

Figura 5: Número de iterações necessário para um deslocamento do grau 1 $u_1=0.038m$ vs tamanho mínimo do controle para distintos valores de módulo de encruamento H em GPa, controle de comprimento de arco.

Na Figura 5, é mostrado o número necessário de iterações no método de controle de arco esférico e cilíndrico para atingir um nível de deslocamento fixo variando o tamanho mínimo do controle. Observa-se que quando usado o algoritmo de Newton-Raphson Modificado, em ambos os casos é necessário um número maior de iterações, é observado também em ambos

os casos que quando incrementado o valor do módulo de encruamento H , o número iterações necessárias incrementa, sendo a influencia más sensível no controle de arco esférico.

Observa-se que quando incrementado o tamanho mínimo do controle o número de iterações necessárias diminui. Porém, o incremento do tamanho mínimo somente é possível até certo limite, dado que o erro introduzido é muito grande e o algoritmo é incapaz de convergir para uma solução. Para o problema estudado o método de controle de arco esférico foi capaz de calcular o nível de deslocamento desejado até com um mínimo de 46 iterações para um módulo de encruamento de $H=0$, e um tamanho máximo de $l_{min} = 0.04$. este, observou-se também que para módulos de encruamento $H = 50\text{GPa}$, o valor máximo de l_{min} diminui para 0.02. Já no controle de arco cilíndrico, o menor número de iterações necessárias é de 28 iterações para um módulo de encruamento de $H=0$, e um valor máximo de $l_{min} = 0.01$.

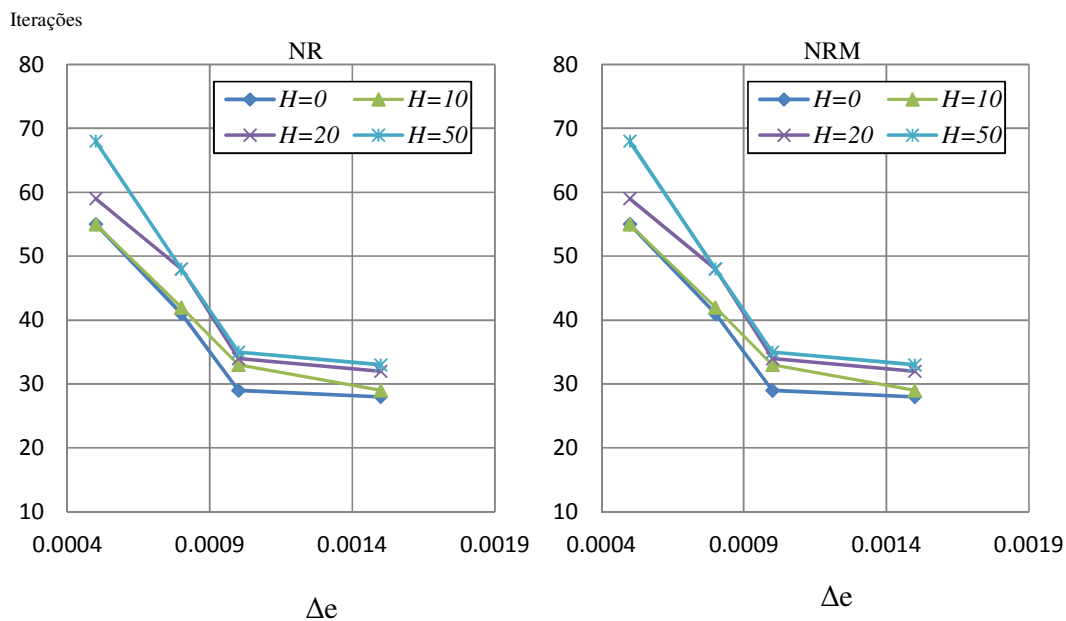


Figura 6: Número de iterações necessário para um deslocamento do grau 1 $u_1=0.038\text{m}$. vs tamanho do controle para distintos valores de módulo de encruamento H em Gpa, Controle indireto por incremento de deformação sem auto adaptação

No caso do controle por incremento de deformação, observado na Figura 6, da mesma forma que no controle de arco, o incremento do módulo de encruamento H se traduz no aumento do número de iterações, sendo mais visível para a análise com NRM, o número mínimo de iterações possíveis para calcular o nível de deslocamento desejado por meio deste controle foi de 28 iterações, com o método de NR, e um tamanho de controle de $\Delta e = 0.0015$. Este número de iterações é igual à quantidade obtida no controle de arco cilíndrico cabe salientar que nesta análise não foi imposta uma adaptação do tamanho do controle, portanto, a análise depende apenas de um parâmetro, sendo que com adaptação dependeria de três. Também pode ser observada que a diferença entre o número de iterações calculadas por NR e NRM, para um mesmo tamanho de controle, é em proporção maior que no caso do controle de arco, no qual as iterações com o método de NRM eram em torno de 1.5 vezes maior que as necessárias em NR.

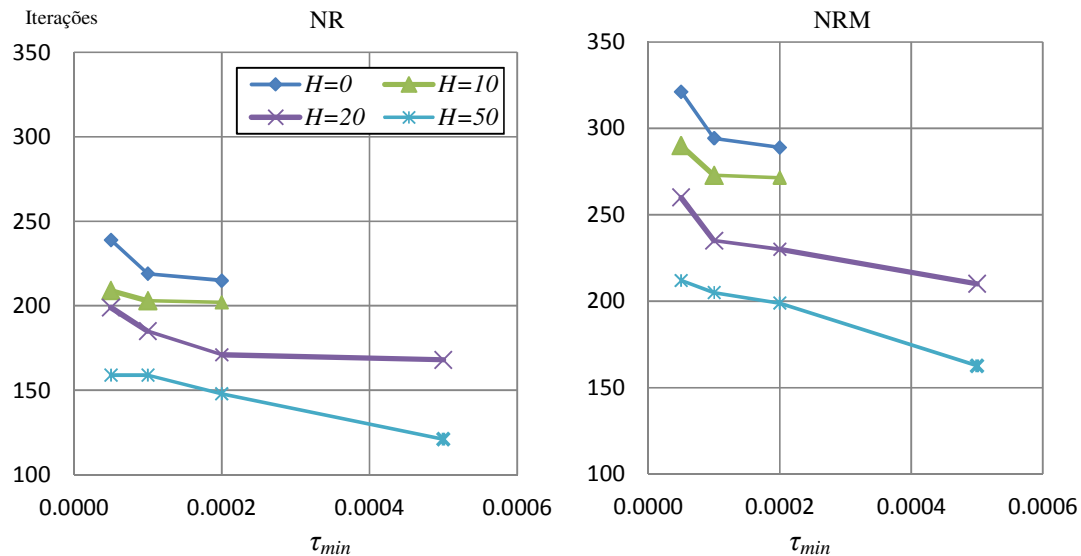


Figura 7: Número de iterações necessário para um deslocamento do grau 1 $u_1=0.038m$. vs tamanho do controle para distintos valores de módulo de encruamento H em Gpa, Controle indireto dissipação de energia $\tau_{nec}=10^5GJ$, $\tau_{máx}=0.005GJ$, $\tau_{inicial}=0.0002GJ$

Na Figura 7 observa-se que a diferença dos dois métodos de controle anteriores, o número de iterações necessárias para o nível de deslocamento desejado diminui quando acrescentado o encruamento H . Isto se deve à própria natureza do controle (dissipação de energia), precisando de mais iterações quando a dissipação é maior. Por outra parte, com o algoritmo implementado para este método conseguiu-se um número mínimo de iterações em torno a 120. Sendo quase 3 vezes maior ao número de iterações do controle de arco esférico e 4 vezes maior aos métodos de controle de arco cilíndrico e de deformação.

3.1.2 Análise considerando amolecimento do material

Nesta seção é analisado o desempenho dos algoritmos implementados para o caso de amolecimento do material (valores negativos de H). Considerando apenas os dois métodos que obtiveram o menor número de iterações para o caso de encruamento, sendo estes o controle de arco cilíndrico e o controle indireto por incremento de deformação.

Nas tabelas 2, 3 e 4 são apresentados os números de iterações necessárias para um nível de deslocamento do grau de liberdade 1 de 0.02m, para os métodos de controle de deslocamento indireto sem e com auto adaptação do tamanho do parâmetro, e o método de controle de arco cilíndrico auto adaptado, correspondentemente, usando o método de Newton-Raphson. Observa-se em todos os casos que o aumento do módulo de amolecimento se traduz em um incremento do número total de iterações necessárias similarmente ao visto no caso de encruamento do material. O controle por deslocamento indireto sem adaptação apresenta um maior número de iterações necessárias para um mesmo valor de módulo de amolecimento, ao requerido utilizando adaptação do tamanho do controle, sendo avaliado um número mínimo de 41 iterações no caso de $H = 10MPa$. Já no caso do controle de arco cilíndrico apresenta um de iterações similar às obtidas com o controle indireto com auto adaptação, e registrando um número mínimo de 23 iterações necessárias com um valor de $H = -10 MPa$. Pode-se observar que quando o valor do módulo de amolecimento é de $H = -50 MPa$, nos três casos há uma interrupção da análise antes de alcançar o deslocamento desejado para um determinado valor mínimo do tamanho do controle, problema que não é registrado ao diminuir este limite

inferior.

Tabela 2: Número de iterações necessárias para um deslocamento u_j de 0.02m
Controle por incremento de deformação sem adaptação

H	Incremento de deformação Δe				
	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001
-10	184	90	49	28	28
-50	227	129	74	35	NC
-100	445	259	135	NC	NC

NC: Não foi possível calcular

Tabela 3: Número de iterações necessárias para um deslocamento de u_j 0.02m
Controle por incremento de deformação com adaptação $\Delta e_{\text{inicial}}=0.0005$

H	Incremento de deformação mínimo Δe_{min}			
	0.00005	0.00010	0.00020	0.0005
-10	28	28	28	28
-50	41	41	41	35
-100	138	114	NC	NC

NC: Não foi possível calcular

Tabela 4: Número de iterações necessárias para um deslocamento de u_j 0.02m
Controle de arco cilíndrico com adaptação $\Delta l_{\text{inicial}}=0.004$

H	Incremento de arco mínimo Δl_{min}			
	0.00050	0.00100	0.00200	0.00400
-10	22	22	22	22
-50	37	37	37	31
-100	130	106	NC	NC

NC: Não foi possível calcular

3.2 Análise considerando não linearidade geométrica

Nesta seção é estudado desempenho dos controles de arco cilíndrico, indireto de deformação em um problema que envolve não linearidade geométrica apenas, isto é considerando grandes deformações e deslocamentos e material no regime elástico-linear. Para isto, seção é analisada uma treliça tri-articulada de pouca altura em relação ao comprimento do vão, carregada com uma força concentrada no nó central, tal como mostrado na figura 8.

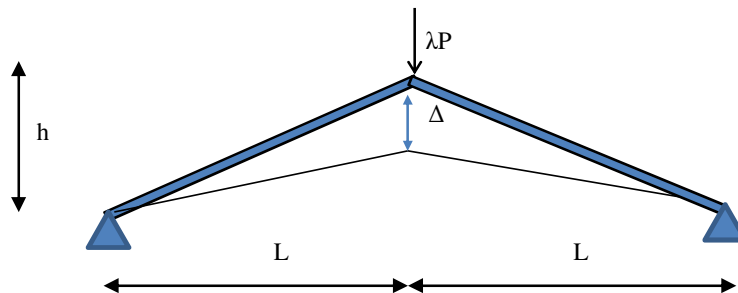


Figura 8: Configuração da estrutura

Esta estrutura, que representa o modelo mais simples de um arco simétrico abatido, é utilizada como exemplo por muitos autores na literatura referente ao tema, tais como Bathe(2006) e Crsfield(2003). A consideração da não linearidade geométrica é analisada incrementalmente assumindo como referência a configuração inicial indeformada, ou seja, é adotada uma análise de tipo Lagrangiana total. As propriedades física e mecânicas da estrutura apresentam-se na tabela 5

Tabela 5: Propriedades da estrutura

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Altura da treliça	h	m	1.0
Comprimento do vão	L	m	5.0
Área da seção transversal inicial	A_0	m^2	10^{-4}
Módulo de Elasticidade	E	GPa	100
Coefficiente de Poisson	N	GPa	0.2
Tolerância máxima	tol	--	10^{-7}

3.2.1 Análise do desempenho dos controles para a representação da resposta do sistema

Nesta seção é analisada a capacidade dos controles para representar a resposta do sistema quando considerada a não linearidade geométrica. A resposta do sistema, adotando para a análise o controle de arco cilíndrico é mostrada na figura9.

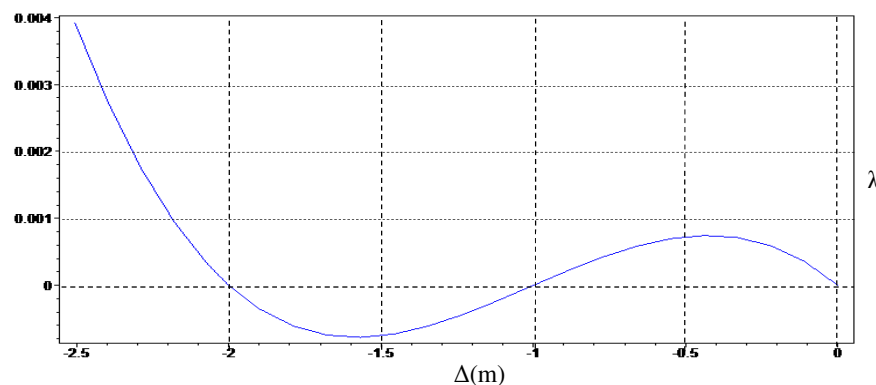


Figura 9:Deslocamento vertical controle de arco cilíndrico $\Delta l_{ini}=0.11$, $\Delta l_{min}=0.01$, $N_{incr} = 20$.

Como pode ser visto na figura 9, o controle de arco, consegue representar adecuadamente a resposta do sistema, conhecida na literatura, o fenômeno de Snap through é observado, com uma inicial perda de rigidez após atingir a carga crítica, mudando a configuração estrutura com o posterior ganho de rigidez quando os elementos estruturais passam de comprimidos a tracionados. Cabe salientar que não é considerado o efeito de flambagem de elemento isolado, i.e., é considerado apenas o efeito de estabilidade global. A seguir é apresentada a resposta do sistema adotando como controle de análise o controle indireto por incremento de deformação.

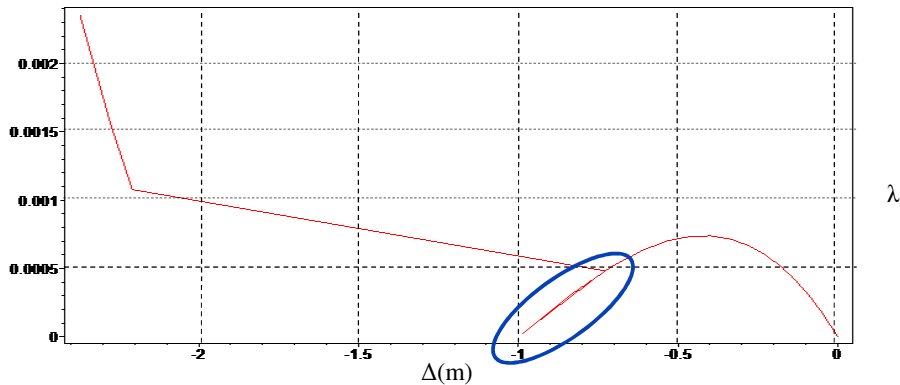


Figura 10: Deslocamento vertical controle indireto $e_{ini}=0.001$, $e_{min}=0.0001$, $N_{incr} = 20$.

A figura 10 mostra que a análise utilizando o controle indireto por incremento de deformação apresenta problemas na análise ao atingir a fase final de descarregamento, ou seja, quando o fator tende a ser nulo. Nas proximidades deste nível de carregamento a análise retorna o caminho anterior, e inclusive chega a encontrar um novo ponto de equilíbrio, como mostrado na figura 10, sem conseguir representar o trecho onde muda o sinal do fator de carga. Isto pode ser explicado já que o controle indireto funciona incrementando deformação, e no ponto de mudança do sinal do fator de carga também ocorre uma mudança no sinal da deformação na estrutura toda de forma simultânea, ou seja, há uma diminuição da deformação em todos os elementos da estrutura ao mesmo tempo, o que não pode ser representado pelo controle que aumenta deformações sempre como mesmo sinal anterior. Portanto, este exemplo representa uma das situações onde o controle indireto apresenta problemas para continuar com a análise.

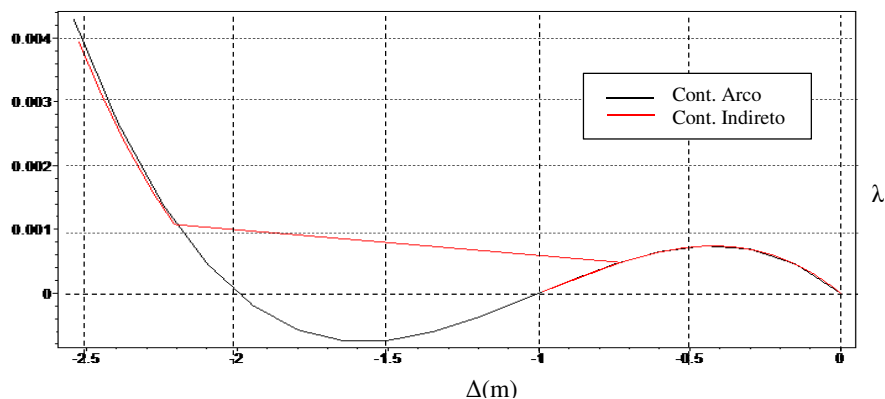


Figura 11: comparação Deslocamento vertical controle indireto e controle de arco cilíndrico $e_{ini}=0.001$, $e_{min}=0.0001$, $\Delta l_{ini}=0.11$, $\Delta l_{min}=0.01$, $N_{incr} = 20$.

Analisa-se agora o número de iterações necessárias para atingir a convergência em

cada passo de análise para ambos os controles considerados.

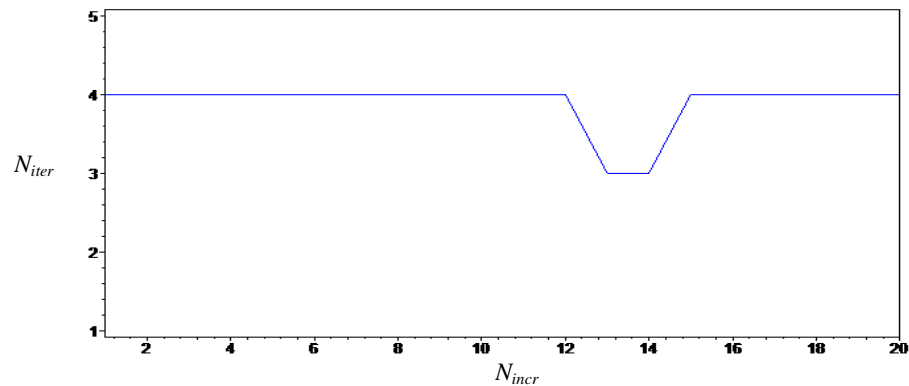


Figura 12: Número de iterações necessárias por passo de análise controle de arco cilíndrico $\Delta l_{ini} = 0.11$, $\Delta l_{min} = 0.01$, $N_{incr} = 20$.

Observa-se, no caso do controle de arco cilíndrico, figura 12, que para o tamanho de controle considerado o número de iterações necessárias para cada passo de análise permanece oscila entre quatro a três iterações por passo, durante toda análise, o que representa a estabilidade do controle para este exemplo. Já o controle indireto de deformação, Figura 13 apresenta um número de iterações que oscila entre três e sete iterações nos primeiros passos de análise, apresentando uma incremento súbito no numero de iterações (N iterações = 30) no passo de análise onde o controle apresenta problemas para continuar com a análise, ou seja, no trecho onde se produz a mudança do sinal do incremento de carga.

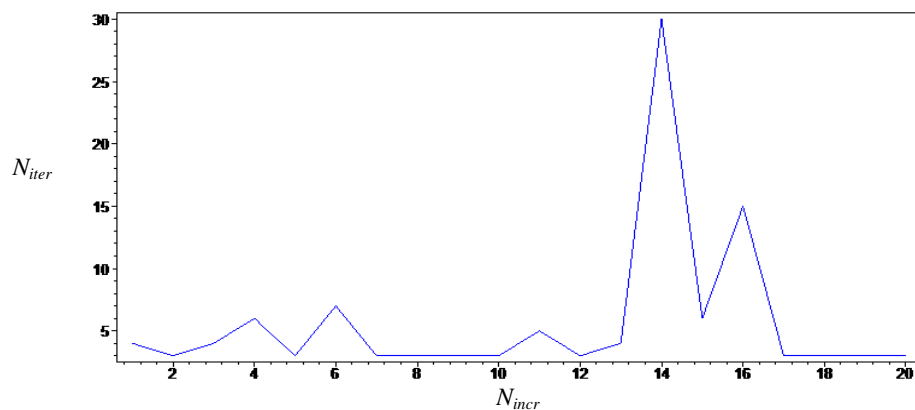


Figura 13: Número de iterações necessárias por passo de análise controle de arco $e_{ini}=0.001$, $e_{min}=0.0001$, $N_{incr}=20$.

3.3 Análise considerando não linearidade geométrica e não linearidade do material

Nesta seção, serão analisados os controles considerando um problema que engloba não linearidade geométrica e não linearidade do material que nos exemplos anteriores foram analisados de forma separada e em sistemas simples de poucos graus de liberdade. Nesta seção é considerado um modelo bidimensional com varios de graus de liberdade.

3.3.1 Adaptação do controle indireto por incremento de deformação para consideração de não linearidade geométrica em modelos bidimensionais

Para o uso do controle indireto de deformação em modelos bidimensionais com não linearidade geométrica, é necessário fazer uma adaptação, já que a dedução para o caso de geometria linear (pequenos deslocamentos e deformações) implica trabalhar diretamente com o tensor de pequenas deformações, ou também conhecido como o tensor de deformações de engenharia, o qual é simétrico, tal como deduzido nas equações (17) e (18), expressões que não são mais válidas no caso da não linearidade geométrica. Para manter semelhança análoga ao caso linear geométrico, é empregado como medida de deformação o tensor de Deformações de Green-Lagrange, que também é simétrico e que é obtido como.

$$\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (22)$$

Onde \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação e \mathbf{I} é o tensor identidade unitário. Por tanto para o caso de não linearidade geométrica as expressões (16) e (17) podem ser transformadas em.

$$\mathbf{c}_{int}^T \cdot \Delta \mathbf{E}_{int} = \Delta e, \quad \mathbf{c}_{int} = \left(\frac{\mathbf{E}_{int}}{\|\mathbf{E}_{int}\|} \right)_0 \quad (23)$$

Introduzindo (16) em (15), e mantendo Δe constante ao longo do passo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \lambda^k &= \frac{\Delta e}{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{E} g_{int}} \quad \text{para } k = 1 \\ \delta \lambda^k &= -\frac{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{E}^r_{int}}{\mathbf{c}_{int}^T \cdot \mathbf{E} g_{int}} \quad \text{para } k > 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Onde \mathbf{E} é a forma vetorial do tensor de Green-Lagrange, o super-escrito g significa que é obtido da solução de deslocamentos tangenciais e o super-escrito r indica que é obtido através da solução dos deslocamentos residuais.

Cabe salientar que esta adaptação não é necessária nos controles de arco, de dissipação de energia e similares, os quais trabalham diretamente com os vetores de deslocamentos ou com vetores resultantes de forças internas, dissipadas, etc.

3.3.2 Definição do modelo

O modelo a analisar nesta seção é tomado do trabalho de Verhoosel(2009), quem analisa uma viga furada submetida a forças que tendem a abrir longitudinalmente a viga tal como mostrado na figura 14.

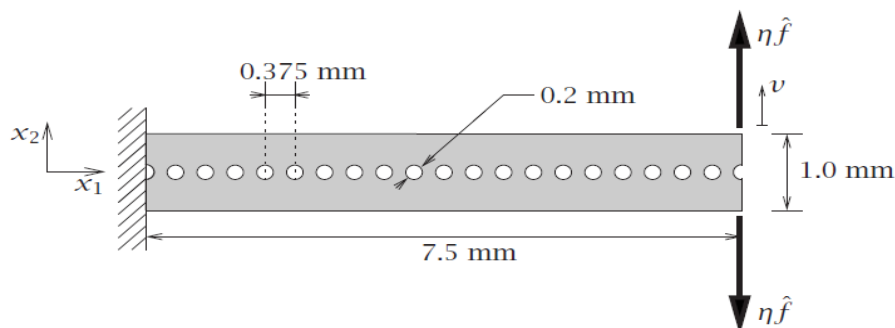


Figura 14: Viga furada engastada e livre submetida a força.
Referência: Verhoosel(2009)

No presente trabalho estudada uma viga de menor comprimento que a analisada por Verhoosel (2009), sob a suposição que a configuração do carregamento que age sobre a estrutura faz que as tensões sejam localizadas no extremo livre da viga, dissipando-se rapidamente em direção ao extremo engastado. O resto das dimensões da viga permanece igual à viga da figura 14. O modelo a ser analisado no presente trabalho é mostrado na figura 15

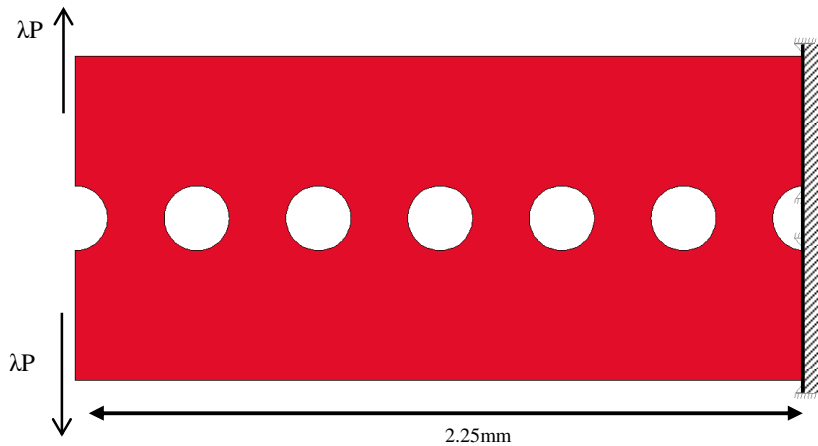


Figura 15: Viga furada engastada reduzida

A estrutura mostrada na figura 15 é modelada com elementos finitos bidimensionais quadrilaterais de 8 nós conhecidos como Q-8 utilizando uma malha de 3486 elementos, resultando uma estrutura com 21412 graus de liberdade. A configuração da malha em elementos finitos é mostrada na figura 16. O engaste é modelado restringindo o deslocamento nas duas direções de todos os nós se localizam no extremo localizado. Assim também o carregamento é aplicado de forma distribuída nas arestas que se encontram no extremo livre.

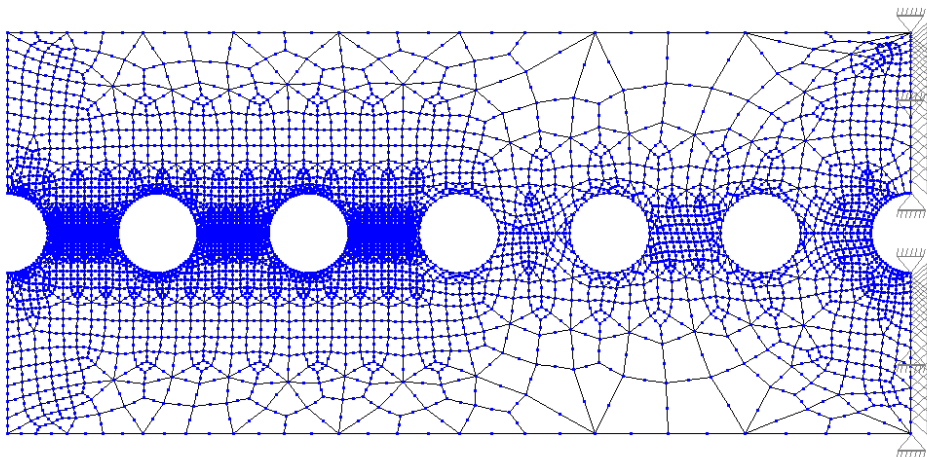


Figura 16: Modelos de elementos finitos, $N_{el}=3486$, $NGL=21412$

É considerando que o material tem comportamento elasto-plástico com com amolecimento linear, seguindo o lei constitutiva de Von-Mises, isto equivale a adotar como zero o valor da

constante α na função de escoamento de Drucker-Prager descrita na equação(19). As propriedades geométricas e mecânicas do modelo são mostradas na tabela 6.

Tabela 6: Propriedades da estrutura

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Altura da viga	h	mm	1.0
Comprimento da viga	L	mm	2.25
Espessura	t	mm	1.0
Módulo de Elasticidade	E	N/mm ²	100
Tensão de escoamento	σ_y	N/mm ²	1.0
Coefficiente de Poisson	N	--	0.3
Tolerância máxima	tol	--	10^{-7}

A análise é feita empregando o algoritmo de elementos finitos HYPLAS, desenvolvido por De Souza Neto et al (2008), sobre o qual foram feitas as implementações e modificações respectivas para o uso do método de continuação indireto por incremento de deformação. É adotada uma auto-adaptação do tamanho dos controles seguindo o critério de Ramm(1982), tal como indicado nas equações (11) e (18), fixando um valor de número de iterações desejadas iguala a 4, isto para ter uma adaptação mais refinada que possa diminuir a chance interrupção da análise por mal condicionamento do sistema gerado por um incremento excessivo. Um exemplo de procedimento para implementação sobre o algoritmo do HYPLAS é mostrado em Herrera(2011).

3.3.3 Análise do desempenho dos controles para a representação da resposta do sistema

A seguir, é mostrada a resposta do deslocamento vertical do extremo livre da viga para ambos os controles estudados nesta seção, para vários valores do módulo de amolecimento do material, fixando o número de incrementos ou passos de análise.

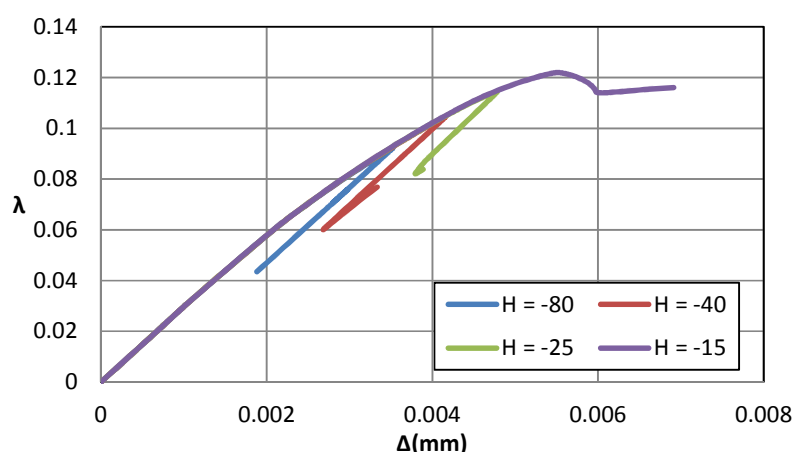


Figura 17: Relação λ vs Δ no controle de arco cilíndrico, $\Delta l_{m\acute{a}x}=0.3$, $\Delta l_{m\acute{i}n}=0.001$, $N_{incr} = 60$

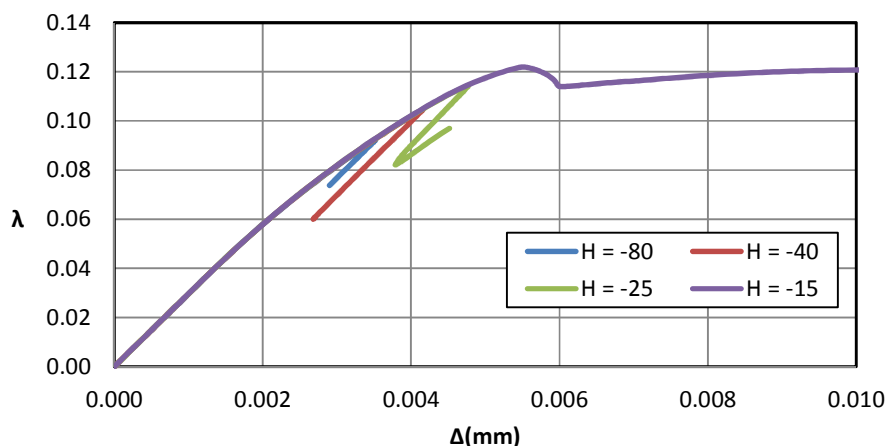


Figura 18: Relação λ vs Δ no controle de arco cilíndrico, $\Delta e_{\text{máx}}=0.03$, $\Delta e_{\text{min}}=0.0001$, $N_{\text{incr}} = 60$

As figuras 17 e 18 mostram que o valor máximo do parâmetro de carga (carga crítica) diminui quando incrementado o módulo de amolecimento, variando de $\lambda_{\text{crit}} = 0.09$ para $H = -80 \text{ N/mm}^2$ a $\lambda_{\text{crit}} = 0.12$ para $H = -15 \text{ N/mm}^2$. Este ponto limite indica o início da fratura que se propaga ao longo do eixo da viga como mostrado em Verhoosel(2009), onde o valor de carga crítica é de $\lambda_{\text{crit}} = 0.102$. As figuras 5.4 e 5.5 mostram também que para $H = -15 \text{ N/mm}^2$ o controle de arco cilíndrico consegue avançar mais no caminho de equilíbrio que o controle indireto, para um mesmo número de incrementos e um mesmo critério de auto-ataptação de tamanho de controle. Esta vantagem, porém, vai diminuindo quando incrementado o valor do módulo de amolecimento, chegando a se inverter a vantagem para valores elevados de H , como é observado no caso de $H = -80 \text{ N/mm}^2$, onde o controle indireto de deformação consegue um maior avanço na curva de equilíbrio que o controle de arco cilíndrico. Isto indica que o controle de arco cilíndrico é mais sensível ao incremento do módulo de amolecimento. Compara-se agora o número de iterações necessárias para atingir o valor máximo do parâmetro de carga, ou seja, a carga crítica, para os níveis de amolecimento estudados.

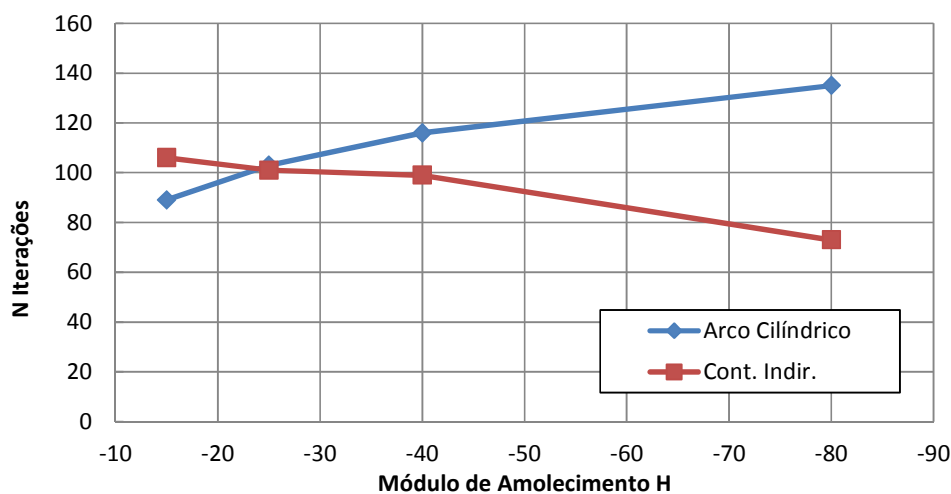


Figura 19: Número de iterações necessárias para atingir a carga crítica

A figura 19 mostra que no caso do controle de arco cilíndrico o número de iterações necessárias para atingir a carga crítica aumenta quando incrementado o módulo de amolecimento H , já no controle indireto de deformação é observado que o número de iterações necessárias diminui quando incrementado o valor de H . Salientando que o valor da carga crítica diminui quando incrementado o valor do módulo de amolecimento H . Este comportamento confirma a maior sensibilidade do controle de arco cilíndrico ao aumento do valor do módulo de amolecimento. Isto explica-se devido a que com o aumento do módulo de amolecimento surgem importantes incrementos de deformação, que os quais não influenciam no campo de deslocamentos mas sim no equilíbrio de tensões obrigando ao controle de arco, o qual trabalha com a norma geral dos deslocamentos, a reduzir o tamanho do controle precisando maior número de iterações, o que não é observado no controle indireto de deformação, onde justamente é controlado o incremento de deformação.

4 CONCLUSÕES

Os algoritmos implementados para os três tipos de controle convergem para uma mesma curva de equilíbrio validando de esta forma a implementação dos mesmos.

Para os casos com encruamento do material é observado que tanto no controle de arco e controle indireto, o aumento do módulo de encruamento se traduz em um incremento das iterações necessárias para chegar a um nível de deslocamento desejado. Contrariamente no método de dissipação de energia o número de iterações diminui com o incremento do valor do encruamento H .

Ainda no caso de encruamento do material, pode ser observado que o controle indireto sem auto adaptação tem um desempenho similar ao método de controle de arco cilíndrico com auto adaptação do tamanho do parâmetro, para um mesmo nível de deslocamento e encruamento, com número mínimo de iterações em torno a 28, com a vantagem do controle indireto que depende apenas de um parâmetro imposto a diferencia do método de controle de arco cilíndrico que depende de três por causa da auto adaptação.

O método de controle indireto apresenta a maior diferencia entre os esquemas de solução de equações de NR e NRM, precisando o esquema de NRM mais de duas vezes o número de iterações que as necessárias com NR. Esta proporção entre ambos os esquemas de solução de equações aumenta quando diminuído o tamanho do parâmetro de controle e o módulo de encruamento. Nos outros métodos de controle a proporção de iterações entre NRM e NR oscila entre 1.2 a 2 vezes.

Para o caso de amolecimento do material, o controle indireto sem auto adaptação apresenta um número maior de iterações ao controle de arco cilíndrico. Já uma auto adaptação do parâmetro do controle indireto apresenta desempenho similar ao controle de arco cilíndrico.

O controle de arco cilíndrico mostra-se eficiente para a representação da resposta do exemplo com análise não linear geométrica apenas. Exemplo para o qual o controle indireto de deformação apresenta problemas para a continuação da análise

No exemplo da viga com furos, o controle de arco precisa de maior número de incrementos e iterações para atingir a carga crítica que o requerido pelo controle indireto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baloz, J.L. and Dhatt, G. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14:985-993, 1979.
- Bathe, K-J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006.
- Chen, Z., and Schreyer, H.L. *A numerical solution scheme for softening problems involving*

- total strain control*. Computer and Structure, 37:1043–1050, 1990.
- Chaisomphob, T., K-Nukulchai, W., and Nishino, F. *An Automatic Arc Length Control algorithm for Tracing Equilibrium Paths of Non-linear Structures*. Journal of Structural and Earthquake Eng, 5:227-230, 1988.
- Crisfield, M.A. *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*. Computer and Structure, 13:55-62, 1981.
- Crisfield, M.A. *Non-linear finite element method Analysis of Solids and Structures*. Volume 1: Essentials, J. Willey, 2003.
- Herrera, L.A. *Modelación Numérica del Concreto Simple con Elementos Finitos Usando un Modelo Constitutivo de Daño*. Disertación de Maestría, DICA, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia, 2011.
- De Souza Neto, E.A., Peric, D. and Owen, R.D.J. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Application*. J. Willey, 2008.
- Itoh, F. and Nogami, K. *On the tracing calculation of the equilibrium path for imperfect systems*. Proc. Of JSCE. Structural Eng./Earthq. Eng., 3; N° 1, 1986.
- Memon, B.A., Su, X-Z. Arc-length technique for nonlinear finite element analysis. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 5:618–628, 2004.
- Ramm, E. *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. In: Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Springer, 1981.
- Verhoosel, C. *Multiscale and probabilistic modeling of electromechanical systems*. D.Sc. Thesis, MED, Delft University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 2009.
- Valli, A.M.P., Elias, R.N., Carey, G.F., and Coutinho, A.L.G.A. *PID adaptive control of incremental and arclength continuation in nonlinear applications*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Published Online (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/fld., 2009.
- Felippa, C. *Nonlinear Finite Element Methods (ASEN 6107)*, DAES., University of Colorado at Boulder. Published Online (<http://www.colorado.edu>). DOI: CAS/courses.d/NFEM.d., 2012.